**Infoblatt**

**Voraussetzung und Ziel:**

Voraussetzung ist, dass die Unterrichtseinheit *Lineare Gleichungen* im Regelunterricht behandelt wurde.

Absicht ist, das erworbene Wissen über lineare Gleichungen – auf andere Gleichungen übertragbar – zu strukturieren und aus dieser Struktur die typischen Fragestellungen abzuleiten und zu üben.

**Struktur:**

Am Beispiel der linearen Gleichungen wird zunächst exemplarisch erarbeitet (bzw. wiederholt), wie man bei der **Strukturierung eines mathematischen Sachverhaltes** vorgehen kann – **vier Schritte**, s.u.

Ein Transfer in außermathematische Gebiete ist nicht ausgeschlossen.

**1. Worum es geht:**

Gegeben ist eine Gleichung wie zum Beispiel 5·x + 6 = 7·x – 8. Gesucht ist die Zahl, die man für x setzen muss, damit das Gleichheitszeichen stimmt. Das ist hier die Zahl 7, man könnte sie auch durch geschicktes Probieren erhalten.

Solche Gleichungen heißen *linear*, nicht lineare Gleichungen wären z. B. 3·x2 + 5 = 7·x oder .

**2. Begriffe:**

Gleichung, Äquivalenzumformung, Lösung, Probe

**3. Zusammenhänge / Grundaufgaben:**

Äquivalenzumformungen lassen die Lösung der Gleichung unverändert:

- auf beiden Seiten dieselbe Zahl oder denselben Term addieren oder subtrahieren

- auf beiden Seiten mit derselben Zahl multiplizieren oder durch dieselbe Zahl (0) dividieren

Ziel ist, durch „Sortieren“ in mehreren Schritten zur Form Zahl = x oder x = Zahl zu kommen.

Beachte: In linearen Gleichungen gibt es zwei Sorten von Summanden, Vielfache von x (wie z.B. 5·x oder 7·x) und Zahlen (wie z. B. 6 oder 8).

Vielfache von x kann man untereinander zusammenfassen (z.B. 7·x – 5·x = 2·x), dasselbe gilt für Zahlen (z.B. 6 + 8 = 14). In der Mischung geht das nicht (z.B. ist 5·x + 6 nicht 11·x)!

Ein Beispiel mit Erläuterung:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Gleichung:** | **Befehl (nach dem Befehlstrich | ):** | **Erläuterung:** |
| 5·x + 6 = 7·x – 8  < 5·x – 5·x + 6 = 7·x – 5·x – 8 > | | – 5·x | Vielfache von x sollen nur noch auf einer Seite der Gleichung vorkommen |
| 6 = 2·x – 8  < 6 + 8 = 2· x – 8 + 8 > | | + 8 | Zahlen ohne x sollen nur noch auf der anderen Seite der Gleichung vorkommen |
| 14 = 2·x | | : 2 | Letzter Schritt zur Form Zahl = x oder x = Zahl |
| 7 = x |  | Ziel erreicht |
| Lösung: 7 |  | Lösung aufschreiben |
| Probe: |  | Für x die Zahl 7 einsetzen, getrennt nach Seite |
| linke Seite:  5·7 + 6 = 35 + 6 = 41 |  | Getrennt nach linker und rechter Seite (Abkürzung „l.S.“ und „r.S.“) |
| rechte Seite:  7·7 – 8 = 49 – 8 = 41 |  | Ergibt sich dieselbe Zahl darf man hinter „Probe:“ einen Haken machen ☺ |

**4. Schwierigkeiten:**

- beim Termumformen

- beim Rechnen

**Didaktischer Kommentar**

Das Umformen von linearen Termen und das **Lösen von linearen Gleichungen** gilt für Schülerinnen und Schüler der Klasse 7 anerkanntermaßen als **schwierig**. Vielen von ihnen erscheint das Hantieren mit Variablen und Zeichen – vom bekannten Umgang mit Zahltermen losgelöst – undurchsichtig und fehleranfällig.

In der Tat kann man bei der Lösung der Gleichung 5·x – 6 = 12 + 3·x auf unterschiedliche Weise korrekt vorgehen, auf überraschend vielfältige Weise aber Fehler machen, vgl. Aufgabe 3.) und 4.) auf dem Arbeitsblatt. Es ist wichtig, sich dies als Lehrkraft, die die Sache beherrscht, bewusst zu machen.

Bei keinem Teilgebiet der Schulmathematik fragt sich die Lehrkraft, was daran „um Gottes Willen“ so schwierig sein soll. Also: Geduld, Verständnis und Langmut ☺.

Hat man mit linearen Termen zu tun, ist ein **häufig anzutreffender Fehler** die Zusammenfassung von a·x + b zu (a+b)·x, zum Beispiel 3·x + 7 = 10·x. Dies ist insbesondere dann verführerisch, wenn a + b eine Stufenzahl ist.

Auf dem Infoblatt wird deshalb von zwei Sorten von Elementen gesprochen und diese Unterscheidung mit Hilfe von Farben visualisiert. Dies ist natürlich die unterste Stufe der didaktischen Reduktion. Eine höhere Erkenntnisstufe wäre die Erinnerung, dass bei einer gültigen Termumformung die Gleichheit für beliebige Zahl-Einsetzungen richtig sein muss. Man denke sich gerne also etwas „Extremes“ für x, zum Beispiel die Zahl 100 (und nicht gerade die Zahl 1 ☺).

Vereinbarungsgemäß lässt man bei der Verknüpfung von Zahl und Variable den Malpunkt gerne weg.

Das kann man auch hier tun. Für das Schreiben des Malpunktes spricht die Verdeutlichung der beiden unterschiedlichen Elementsorten.

Alle Schulbücher bemühen für das Kalkül der Gleichungslösung durch Äquivalenzumformungen das **Waage-Modell**, um die Prozesse des „auf beiden Seiten der Gleichung dasselbe tun“ und des „schrittweisen Abräumens zur Trennung der beiden Element-Sorten“, zu veranschaulichen und zu begründen. Gerne wird man auch in der Mkid-Stunde zu den linearen Gleichungen an diese Vorstellungswelt anknüpfen, trotz des engen Gültigkeitsrahmens dieses Modells. Ein weiteres Element der didaktischen Reduktion ist das implizite Postulat der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

In unterschiedlichen Schulbüchern wird die **Probe** unterschiedlich stark betont. Aus unserer Sicht kann man vor allem aus erkenntnistheoretischer Sicht deren Wert gar nicht überschätzen.

Die Erziehung zur Stellung der Frage „Stimmt das?“ bzw. „Kann das sein?“ ist eine grundsätzlich wichtige, weit über das Feld der Mathematik hinaus.

Aus diesem Grund wird im Arbeitsblatt die Probe ausgiebig thematisiert.

Bei der **Notation der Gleichungslösung** kann man – im Falle von Schwierigkeiten – eine Zwischenzeile notieren, so dass der auszuführende Befehl zunächst auf beiden Seiten notiert und erst im nächsten Schritt ausgerechnet wird, vgl. Infoblatt im Beispiel zur Erläuterung

5·x + 6 = 7·x – 8 | – 5·x

< 5·x – 5·x + 6 = 7·x – 5·x – 8 >

6 = 2·x – 8

Noch ausführlicher wäre unter Bewusstmachung des Kommutativgesetztes der Addition:

5·x + 6 = 7·x – 8 | – 5·x

< 5·x + 6 – 5·x = 7·x – 8 – 5·x >

< 5·x – 5·x + 6 = 7·x – 5·x – 8 >

6 = 2·x – 8

Beide Zielformen, nämlich x = Zahl und Zahl = x, sind zugelassen, die davon getrennte Notation der Lösung „Lösung: …“ ist vereinbart, ebenso die Notation der auszuführende „Befehle“ hinter dem so genannten Befehlstrich „|“.

1.) **Löse die Gleichung** und **mache die Probe**.

Trage jeweils in die Tabelle unten ein: zuerst die Lösungszahl und dann den gemeinsamen Wert der linken Seite und der rechten Seite der Gleichung bei der Probe mit der Lösungszahl.

a) 5·x + 4 = 19  b) 6·x – 5 = 13 + 3·x c) 5 – 4·x = 9·x + 18

d) 3·x – 8,5 = 1,5 – x e) x + 2,5·x – 4,5 = 6,5 – x·2 f) 3·y + 4 + 5·y = 6 + 7·y + 8

2.) Ahmed, Bertram und Cecil lösen die Gleichung 3·(4 + 3·x) + 9 = 28 + (5·x – 25)·(-2).

Lösungszahl von Ahmed: 1, Lösungszahl von Bertram: 2, Lösungszahl von Cecil: 3.   
**Finde heraus wer** **Recht hat**, ohne dass du die Gleichung selbst löst.   
Trage die richtige Lösungszahl in die Tabelle unten ein.

3.) Alle vier Versuche zur Lösung der Gleichung 5·x – 6 = 12 + 3·x enthalten einen Fehler.

**Kringle** den falsch ausgeführten Befehl nach dem Befehlstrich **ein** und trage die zugehörige Zahl ohne Rechenzeichen oder „x“ (Beispiel: „– 3·x“ 🡪 „3“ oder „– 2“ 🡪 „2“) in die Tabelle unten ein.

|  |  |
| --- | --- |
| a) 5·x – 6 = 12 + 3·x | – 6  5·x = 6 + 3·x | – 3·x  2·x = 6 | : 2  x = 3 Lösung: 3 | b) 5·x – 6 = 12 + 3·x | + 6  5·x = 18 + 3·x | – 3·x  2·x = 18 | – 2  x = 16 Lösung: 16 |
| c) 5·x – 6 = 12 + 3·x | – 3·x  2·x – 6 = 12 | + 6  2·x = 18 | – 1  x = 17 Lösung: 17 | d) 5·x – 6 = 12 + 3·x | – 5·x  -6 = 12 – 2·x | + 12  6 = -2·x | : (-2)  -3 = x Lösung: -3 |

4.) Beide Versuche zur Lösung der Gleichung 5·x – 6 = 12 + 3·x enthalten einen Fehler.

**Kringle** die Fehlerstelle in einer der Gleichungen **ein** und trage die zugehörige Zahl ohne Rechenzeichen oder „x“ (Beispiel: „– 3·x“ 🡪 „3“ oder „– 2“ 🡪 „2“) in die Tabelle unten ein.

|  |  |
| --- | --- |
| a) 5·x – 6 = 12 + 3·x | + 6  5·x = 6 + 3·x | – 3·x  2·x = 6 | : 2  x = 3 Lösung: 3 | b) 5·x – 6 = 12 + 3·x | + 6  5·x = 12 + 9·x | – 9·x  -4·x = 12 | : (-4)  x = -3 Lösung: -3 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Aufgabe: | 1a) | 1a) | 1b) | 1b) | 1c) | 1c) | 1d) | 1d) | 1e) | 1e) | 1f) | 1f) |
| Zahl: |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  | Zur Kontrolle: Summe = **67** | | | | | | Zur Kontrolle: Summe = **100** | | | | | |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Aufgabe: | 2.) | 3a) | 3b) | 3c) | 3d) | 4a) | 4b) |
| Zahl: |  |  |  |  |  |  |  |
|  | Zur Kontrolle: Summe = **39** | | | | | | |

1.) **Löse die Gleichung** und **mache die Probe**.

**Trage** jeweils **in die Tabelle unten ein**: **zuerst die Lösungszahl** und **dann** den gemeinsamen **Wert der linken Seite und der rechten Seite** der Gleichung bei der Probe mit der Lösungszahl.

a) 5·x + 4 = 19 *(3)*  b) 6·x – 5 = 13 + 3·x *(6)* c) 5 – 4·x = 9·x + 18 *(-1)*

d) 3·x – 8,5 = 1,5 – x *(2,5)* e) x + 2,5·x – 4,5 = 6,5 – x·2 *(2)* f) 3·y + 4 + 5·y = 6 + 7·y + 8 *(10)*

2.) Ahmed, Bertram und Cecil lösen die Gleichung 3·(4 + 3·x) + 9 = 28 + (5·x – 25)·(-2).

Lösungszahl von Ahmed: 1, Lösungszahl von Bertram: 2, Lösungszahl von Cecil: 3.   
**Finde heraus wer** **Recht hat**, ohne dass du die Gleichung selbst löst.   
**Trage die richtige Lösungszahl** **in die Tabelle unten ein**.

3.) Alle vier Versuche zur Lösung der Gleichung 5·x – 6 = 12 + 3·x enthalten einen Fehler.

**Kringle** den falsch ausgeführten Befehl nach dem Befehlstrich **ein** und **trage die zugehörige Zahl** ohne Rechenzeichen oder „x“ (Beispiel: „– 3·x“ 🡪 „3“ oder „– 2“ 🡪 „2“) **in die Tabelle unten ein**.

|  |  |
| --- | --- |
| a) 5·x – 6 = 12 + 3·x | – 6  5·x = 6 + 3·x | – 3·x  2·x = 6 | : 2  x = 3 Lösung: 3 | b) 5·x – 6 = 12 + 3·x | + 6  5·x = 18 + 3·x | – 3·x  2·x = 18 | – 2  x = 16 Lösung: 16 |
| c) 5·x – 6 = 12 + 3·x | – 3·x  2·x – 6 = 12 | + 6  2·x = 18 | – 1  x = 17 Lösung: 17 | d) 5·x – 6 = 12 + 3·x | – 5·x  -6 = 12 – 2·x | + 12  6 = -2·x | : (-2)  -3 = x Lösung: -3 |

4.) Beide Versuche zur Lösung der Gleichung 5·x – 6 = 12 + 3·x enthalten einen Fehler.

**Kringle** die Fehlerstelle in einer der Gleichungen **ein** und **trage die zugehörige Zahl** ohne Rechenzeichen oder „x“ (Beispiel: „– 3·x“ 🡪 „3“ oder „– 2“ 🡪 „2“) **in die Tabelle unten ein**.

|  |  |
| --- | --- |
| a) 5·x – 6 = 12 + 3·x | + 6  5·x = 6 + 3·x | – 3·x  2·x = 6 | : 2  x = 3 Lösung: 3 | b) 5·x – 6 = 12 + 3·x | + 6  5·x = 12 + 9·x | – 9·x  -4·x = 12 | : (-4)  x = -3 Lösung: -3 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Aufgabe: | 1a) | 1a) | 1b) | 1b) | 1c) | 1c) | 1d) | 1d) | 1e) | 1e) | 1f) | 1f) | 2.) | 3a) | 3b) | 3c) | 3d) | 4a) | 4b) |
| Zahl: | 3 | 19 | 6 | 31 | -1 | 9 | 2,5 | -1 | 2 | 2,5 | 10 | 84 | 3 | 6 | 2 | 1 | 12 | 6 | 9 |
|  | Zur Kontrolle: Summe = **67** | | | | | | Zur Kontrolle: Summe = **100** | | | | | | Zur Kontrolle: Summe = **39** | | | | | | |

**Verlaufsplan**

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer

EA … Einzelarbeit PA … Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Phase / Zeit** | **L / SuS** | **Medien** |
|  |  |  |
| **1. Erarbei­tung**  FEU 15 Min. | L stellt das Thema vor:  *Wie man das Thema Lineare Gleichungen in vier Schritten erfassen kann – anschließend wird geübt*  L entwickelt und notiert mit den SuS zunächst die Punkte 1. bis 3. (vgl. Infoblatt) in geeigneter Zusammenfassung und holt sich dabei so viel wie möglich Informationen von den SuS. Der Punkt 4. wird im Laufe der Bearbeitung des Arbeitsblattes ergänzt.  Für die allgemeine Strategie der Strukturierung ist hier zentral die Visualisierung des Sortierens der beiden Elemente (Vielfache von x und Zahlen) durch Äquivalenzumformungen mithilfe von Farben.  „Wie kann man die prüfen, ob die Lösungszahl richtig ist?“  L betont die Wichtigkeit der Probe.  L und SuS lösen exemplarisch gemeinsam die Aufgaben 1c) und 3b) des Arbeitsblattes.  Dabei erläutert L auch den Unterschied zwischen Aufgabe 3.) und 4.) und die Zahl-Einträge in der Tabelle unten mit der abschnittsweisen Kontrollsumme. | Tafel / Heft |
| **2. Übung**  EA / PA 30 Min. | SuS bearbeiten die Aufgaben des Arbeits­blattes und kontrollieren sich selbständig mit der Probe und der Tabelle.  L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend. | Arbeits­blatt / Heft |