**Sachanalyse**

**Satz:** Zeichnet man n Geraden (, so entstehen dabei eventuell Schnittpunkte. Deren Anzahl sei s.

(1) Für die Maximalzahl der Schnittpunkte smax(n) gilt: smax(n) = = .

(2) Fürist es nicht möglich, n Geraden so zu zeichnen, dass genau s Schnittpunkte entstehen.

**Beweis:**

Zu (1): Möchte man die maximale Anzahl von Schnittpunkten ausschöpfen, wird man beim Zeichnen Parallelen und mehr als zwei Geraden durch einen Punkt („Büschel“) vermeiden. So gibt es zu je zwei Geraden einen Schnittpunkt und umgekehrt,  ist damit die Maximalzahl der Schnittpunkte.

Alternative Beweisführung durch vollständige Induktion:

Es wird gezeigt, dass gilt smax(n) = 1 + 2 + 3 + … + (n-1) und das ist bekanntermaßen .

Induktionsanfang: n = 2: 2 Geraden haben maximal 1 Schnittpunkt und = 1.

Induktionsschluss: Die Behauptung gelte für n = k, es sei also smax(k) = 1 + 2 + 3 + … + (k-1).

Fügt man zu k Geraden eine weitere hinzu, so kommen unter Vermeidung von Parallelen und Büscheln k Schnittpunkte hinzu, damit ist also smax(k+1) = smax(k) + k = 1 + 2 + 3 + … + (k-1) + k.

Damit gilt die Behauptung auch für n = k + 1.

Zu (2): Einzelheiten zum komplizierten Beweis dieser Behauptung findet sich bei

Kurzschenkel, O. und H. Walter: Zur Nichtexistenz gewisser Schnittpunktskonfigurationen in der Ebene. MNU 25 (1972), Heft 6, S. 365-367▪

|  |  |
| --- | --- |
| **Beispiel:**  Die Abb. 1 zeigt den Fall n = 5 und s = 7.  Wenn man die Gerade h, das ist eine der beiden parallelen Geraden (in Abb. 1 gestrichelt), um S dreht, erhält man einen weiteren Schnittpunkt.  Zwei weitere Schnittpunkte erhält man, wenn man die Gerade g um S dreht und damit das Büschel auflöst.  Dann ist die Maximalzahl von 10 Schnittpunkten erreicht. | Abb. 1: n = 5 Geraden mit s = 7 Schnittpunkten |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bemerkungen:**  Für s = 0 (n Parallelen) und s = 1 (ein Büschel mit n Geraden) sowie s = smax sind die Zeichnungen eindeutig.  Zu anderen Kombinationen von n und s sind ggf. unterschiedliche Anordnungen der Geraden („Zeichnungen“) möglich. Zum Beispiel erhält man n = 5 Geraden mit s = 7 Schnittpunkten auch mithilfe von drei parallelen Geraden (selbst ausprobieren!).  Für s = n – 1 bzw. s = n „sieht“ man eine Lösung „direkt“:  Zeichne ein Büschel mit n – 1 Geraden und 1 Gerade parallel zu einer der Büschelgeraden bzw. zu keiner Büschelgeraden parallel.  Ansonsten hat das Auffinden einer Zeichnung den Charakter einer mittelschweren Knobelaufgabe, z. B. n = 6 und s = 11 (vgl. Abb. 2). | Abb. 2: n = 6 Geraden mit  s = 11 Schnittpunkten |

**Infoblatt**

Das Thema Schnittpunkte „lebt“ von den Vorteilen der Handlungsorientierung und der – auch außerhalb der Mathematik wichtigen – Strategie *mithilfe von Beispielen allgemeine Strukturen erkennen*, „data mining“ im Kleinen also ☺.

Man geht dabei vor wie in der Mkid-Stunde *eulersche Polyederformel* in Klasse 6.

**Schritt 1 – Ausfüllen der Tabelle auf dem Arbeitsblatt**

Auf jeden Fall wird man einige Beispiele gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern (SuS) bearbeiten (u.a. n = 6 und s = 11, vgl. Sachanalyse).

Eine Möglichkeit wäre auch, die Abbildung auf dem Arbeitsblatt (n = 5 und s = 7) zu variieren, vgl. Überlegungen im Abschnitt *Beispiel* der Sachanalyse.

Insgesamt sollte klar werden, dass man durch die Verwendung von Büscheln und Parallelen bei festem n zu unterschiedlichen Anzahlen s kommen kann.

Das Pflichtprogramm wären die Fälle n = 2 bis n = 5, die Zeile n = 6 dient der Binnendifferenzierung.

Ein **typischer Fehler** beim Zeichnen: Ein Schnittpunkt, der außerhalb des Blattes liegt, wird ignoriert.

Die korrekt ausgefüllte Tabelle:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | s=0 | s=1 | s=2 | s=3 | s=4 | s=5 | s=6 | s=7 | s=8 | S=9 | s=10 | s=11 | s=12 | s=13 | s=14 | s=15 |  |
| n=2 | ✓ | ✓ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| n=3 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| n=4 | ✓ | ✓ | 0 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| n=5 | ✓ | ✓ | 0 | 0 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |  |
| n=6 | ✓ | ✓ | 0 | 0 | 0 | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ | ✓ |  |

**Schritt 2 – Fragen auf dem Arbeitsblatt**

Bevor sich die SuS an das Beantworten der Fragen machen, werden die Ergebnisse verglichen und ggf. durch die Lehrkraft ergänzt.

Mögliche Antworten:

Zu 1.) Vermeidet man Parallelen und Büschel, kommt man zur Maximalzahl von Schnittpunkten.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Zu 2.) | n=2 | n=3 | n=4 | n=5 | n=6 | n=7 | n=8 | n=9 |
| Maximalzahl der Schnittpunkte: | 1 | 1+2  =3 | 3+3  =6 | 6+4  =10 | 10+5  =15 | 15+6  =21 | 21+7  =28 | 28+8  =36 |

SuS würden ggf. an einem Beispiel argumentieren: Hat man bereits 6 Geraden und 15 Schnittpunkte und fügt dann eine weitere Gerade hinzu, kommen maximal 6 Schnittpunkte dazu.

Bei Nachfragen kann man auch auf die Formel abheben und diese am Zahlenbeispiel durch Bildung von Pärchen mit gleicher Summe entwickeln:

n = 7 Geraden; Anzahl der Schnittpunkte: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = (1 + 6) + (2 + 5) + (3 + 4) = (6 : 2) · 7

Bei n Geraden gibt es maximal (n – 1) : 2 · n Schnittpunkte. Ggf. verifiziert man dies auch für geradezahlige n.

Zu 3.) Stets eine Lösung gibt es für die Fälle s = 0; s = 1; s = n – 1; s = n (vgl. Sachanalyse) und natürlich für die Maximalzahl.

Die Vermutung, dass es zwischen n und der Maximalzahl stets eine Lösung gibt, muss man offenlassen.

Zu 4.) Vermutung: Es gibt keine Lösungen für die Fälle 2  s  n – 2.

Die Lehrkraft gibt die Information, dass man das beweisen kann.

|  |  |
| --- | --- |
| Wenn du einige Geraden auf ein Blatt Papier gezeichnet hast, kannst du die Anzahl der Schnittpunkte abzählen.  Im Folgenden ist **n** die **Anzahl der Geraden** und  **s** die **Anzahl der Schnittpunkte**.  Die Abbildung rechts zeigt n = 5 Geraden mit s = 7 Schnittpunkten. Die beiden gestrichelten Geraden sind zueinander parallel.  **Ziel:** Bestimme alle möglichen Anzahlen s von Schnittpunkten, die durch n Geraden erzeugt werden.  Manchmal gibt es zu einer Kombination von n und s mehrere Lösungen, manchmal gar keine. |  |

**Zeichne** auf Konzeptpapier und **markiere** dann **in der Tabelle**:

|  |
| --- |
| ✓… es gibt eine Lösung 0 … es gibt keine Lösung |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | s=0 | s=1 | s=2 | s=3 | s=4 | s=5 | s=6 | s=7 | s=8 | s=9 | s=10 | s=11 | s=12 | s=13 | s=14 | s=15 |
| n=2 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| n=3 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| n=4 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| n=5 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| n=6 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Fragen:**

1.) Man möchte möglichst viele Schnittpunkte erreichen, worauf muss man beim Zeichnen achten?

…………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

2.) Trage die Maximalzahl der Schnittpunkte in die Tabelle ein. Wie könnte diese Zahlenfolge weitergehen? Kannst du diese Vermutung begründen?

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | n=2 | n=3 | n=4 | n=5 | n=6 | n=7 | n=8 | n=9 |
| Maximalzahl der Schnittpunkte: |  |  |  |  |  |  |  |  |

…………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

3.) Welche Lösungen gibt es auf jeden Fall immer? Wie sehen die zugehörigen Zeichnungen aus?

…………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

4.) Welche Lösungen gibt es nicht? Versuche eine Regel zu erkennen.

…………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

**Auswahl von Lösungszeichnungen zum Arbeitsblatt**

n … Anzahl der Geraden; s … Anzahl der Schnittpunkte; Parallelen sind gestrichelt.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n = 5; s = 0 | n = 5; s = 1 | n = 5; s = 4 |
|  |  |  |
| 5 Parallelen | 1 Büschel mit 5 Geraden | 1 Büschel mit 4 Geraden und  1 Gerade parallel zu einer der Büschelgeraden |
|  |  |  |
| n = 5; s = 5 | n = 5; s = 6 | n = 5; s = 7 |
|  |  |  |
| 1 Büschel mit 4 Geraden | 3 Parallelen und 2 Parallelen | 1 Büschel mit 3 Geraden und 2 Parallelen |
|  |  |  |
| n = 5; s = 8 | n = 5; s = 9 | n = 5; s = 10 |
|  |  |  |
| 1 Büschel mit 3 Geraden | 2 Parallelen | 5 Geraden in allgemeiner Lage |

n … Anzahl der Geraden; s … Anzahl der Schnittpunkte; Parallelen sind gestrichelt.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| n = 6; s = 7 | n = 6; s = 8 | n = 6; s = 9 |
|  |  |  |
| 3 Parallelen und 2 Parallelen und  2 Büschel mit jeweils 3 Geraden | 3 Parallelen und  2 Büschel mit jeweils 3 Geraden | 3 Parallelen und 3 Parallelen |
|  |  |  |
| n = 6; s = 10 | n = 6; s = 11 | n = 6; s = 12 |
|  |  |  |
| 3 Parallelen und  1 Büschel mit 3 Geraden | 2 Büschel mit jeweils 3 Geraden | 3 Parallelen |
|  |  |  |
| n = 6; s = 13 | n = 6; s = 14 | n = 6; s = 15 |
|  |  |  |
| 1 Büschel mit 3 Geraden | 2 Parallelen | 6 Geraden in allgemeiner Lage |

**Verlaufsplan**

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer

EA … Einzelarbeit PA … Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird man variieren beim eigenständigen Ausfüllen der Tabelle sowie im Hinblick auf die Beantwortung der gestellten Fragen beim Umfang, bei der Durchdringung und beim Abstraktionsgrad.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Phase / Zeit** | **L / SuS** | **Medien** |
|  |  |  |
| **1. Erarbeitung I**  FEU 25 Min. | L führt mit dem Arbeitsblatt in das Thema ein.  L und SuS bearbeiten einige Fälle\* gemeinsam.  SuS probieren natürlich zunächst selbst.  \*Vorschlag:  n=4; s=0 … nur Parallelen  n=5; s=4 … Büschel mit 4 Geraden und 1 Gerade parallel zu  einer der Büschelgeraden  n=5; s=2 … keine Zeichnung möglich  n=5; s=10 … kein Büschel, keine Parallelen  n= 6; s=11 … zwei Büschel mit 3 Geraden, vgl. Sachanalyse  🡪 In der Tabelle abhaken bzw. ankreuzen.  (vgl. auch Infoblatt – Schritt 1) | Arbeitsblatt  Tafel o.ä.  Konzeptpapier |
| **2. Erarbeitung II**  EA / PA 30 Min. | SuS füllen die Tabelle weiter aus und haken in der Tabelle ab.  n = 2 bis n = 5: Pflicht  n = 6: Kür  L lobt und beobachtet, aber berät zurückhaltend. | Arbeitsblatt  Konzeptpapier |
| **3. Erarbeitung III**  FEU 15 Min. | L und SuS vergleichen die Ergebnisse und vervollständigen die Tabelle.  L erläutert ggf. die gestellten vier Fragen.  L überzeugt sich davon, dass SuS wissen, was zu tun ist. | Arbeitsblatt  Tafel o.ä. |
| **4. Erarbeitung IV**  EA / PA 15 Min. | SuS suchen Antworten auf die vier Fragen.  L lobt und beobachtet, aber berät zurückhaltend. | Arbeitsblatt |
| **5. Erarbeitung V**  FEU 15 Min. | L und SuS besprechen die Antworten.  (vgl. auch Arbeitsblatt – Schritt 2) |  |