**Sachanalyse**

|  |  |
| --- | --- |
| Möchte man einen Stern zeichnen, kann man – vgl. Abb. 1 – zum Beispiel n = 10 Punkte auf einem Kreis auswählen, den Streckenzug etwa bei P1 beginnen und dann über P2, P3 usw. fortführen, nämlich jeweils k = 3 Punkte gegen den Uhrzeigersinn „weiter“.  Wir nehmen erfreut zur Kenntnis, dass wir beim Erreichen des Startpunktes P1 vorher bei allen anderen Punkten P2 bis P10 genau einmal „vorbei“ gekommen sind. | Abb. 1: Stern mit n = 10 und k = 3 |

Für k = 1 geht man zum jeweils nächsten Punkt weiter und erhält ein regelmäßiges 10-Eck (Abb. 2).

Für k = 2 geht man zum jeweils übernächsten Punkt weiter, erhält dann aber zunächst nur ein 5-Eck erhalten, da man „zu früh“ zu Startpunkt zurückkehrt. Setzt man bei einem der noch übrigen Punkte neu an, so erhält man ein weiteres Fünfeck und insgesamt auch einen Stern (Abb. 3).

Für k = 4 geht man jeweils 4 Punkte weiter und erhält zunächst nur einen Stern mit 5 Spitzen. Setzt man bei einem der noch übrigen Punkte neu an, so erhält man insgesamt einen Stern, der aus zwei Sternen mit 5 Spitzen besteht (Abb. 4).

Für k = 5 muss man insgesamt fünfmal ansetzen (Abb. 5).

Für den Fall k = 6 beobachtet man, dass das Weitergehen um 6 Punkte gegen den Uhrzeigersinn einem Weitergehen um 4 Punkte mit dem Uhrzeigersinn entspricht und umgekehrt. Es ergibt sich dieselbe Figur wie für k = 4 (Abb. 4).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| Abb. 2: 10-1-Stern | Abb. 3: 10-2-Stern | Abb. 4: 10-4-Stern | Abb. 5: 10-5-Stern |

Allgemein nennen wir Figuren, die auf diese beschriebene Weise entstehen, **n-k-Sterne**. Die regelmäßige Lage der Punkte auf dem Kreis ist dabei nicht Voraussetzung, als Vorgabe würde sogar ein beliebiges konvexes n-Eck ohne Umkreis genügen.

n-k-Sterne kann man zur Erreichung aller Punkte entweder zeichnen, ohne den Stift absetzen zu müssen, wir nennen solche Sterne **charmant**  (Beispiele: 10-3-Stern und 10-1-Stern, vgl. Abb. 1 und 2) oder man muss mehrfach ansetzen und sie bestehen aus mehreren Teilen (Beispiele: 10-2-Stern, 10-4-Stern und 10-5-Stern, vgl. Abb. 3 bis 5). In beiden Fällen erreicht man alle Punkte genau einmal.

Diese Überlegungen für den Fall n = 10 führen – ohne eine weitere allgemein ausgeführte Begründung – zum folgenden

|  |
| --- |
| **Satz 1:** Es seig der größte gemeinsame Teiler von n und k (0 < k < n).   * n-k-Sterne sind genau dann charmant, wenn g = 1 ist. * n-k-Sterne bestehen für g > 1 aus g charmanten (n:g)-(k:g)-Sternen. * n-k-Sterne und n-(n–k)-Sterne stimmen überein. |

Bevor wir uns dem zweiten Thema *Winkel in Sternen* zuwenden, sollen zwei Methoden zur Feststellung von Winkelsummen – hier am einfachen Beispiel der Winkelsumme im Dreieck – erläutert werden.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bleistift-Methode:** Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ABC, vgl. Abb. 6. Man denke sich einen Bleistift auf die Strecke AB gelegt die Spitze bei B (durchgezogener Pfeil, zur Unterscheidung werden die Pfeile etwas neben die zugehörigen Strecken gezeichnet). Der Bleistift wird mit dem Uhrzeigersinn um seine Spitze gedreht, bis er auf der Strecke BC liegt, er überstreicht dabei den Innenwinkel bei B (neue Lage: gestrichelter Pfeil). Das Ende des Bleistifts wird jetzt auf C verschoben und dann wird der Bleistift um sein Ende mit dem Uhrzeigersinn gedreht bis zur Lage auf der Strecke AC (neue Lage: fein gestrichelter Pfeil), er überstreicht dabei den Innenwinkel bei C usw. (Endlage: gepunkteter Pfeil). | Abb. 6: Illustration der Bleistift-Methode |

Durch die dreimalige Drehung hat der Bleistift „die drei Innenwinkel aufsummiert“, der Vergleich von Anfangs- und Endlage liefert die Winkelsumme von 180°.

|  |  |
| --- | --- |
| **Spaziergänger-Methode:** Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ABC, vgl. Abb. 7. Ein Spaziergänger startet in A und bewegt sich in Richtung B. In B dreht er sich gegen den Uhrzeigersinn und geht weiter in Richtung C usw. Zum Schluss ist er wieder in A und blickt in Richtung B.  Durch die dreimalige Drehung hat der Spaziergänger „die drei Außenwinkel aufsummiert“. Der Vergleich der Blickrichtungen zu Beginn und zum Schluss liefert die Winkelsumme der Außenwinkel von 360°. | Abb. 7: Illustration der Spaziergänger-Methode |

Außenwinkel und Innenwinkel ergeben zusammen immer einen gestreckten Winkel von 180°, hier gibt es 3 Stück davon. Also bleibt für die Innenwinkelsumme: 3 · 180° – 360° = 180°.

**Satz 2:** Ein charmanter n-k-Stern (k < n/2) hat in seinen Spitzen die Winkelsumme (n – 2·k) · 180°

|  |  |
| --- | --- |
| Beweis mit der Spaziergänger-Methode:  Für charmante n-k-Sterne mit k < n/2 ist die Anzahl k der Punkte, die man bis zum nächsten Sternpunkt jeweils weiterrückt, auch die Anzahl der Umdrehungen, die der Spaziergänger insgesamt vollzieht (am Beispiel der Abb. 8 sind es k = 3).  Also gilt: Summe aller Außenwinkel = k · 360° = 2· k · 180°.  Die Summe aller Außen- und Innenwinkel zusammen ist = n · 180°.  Damit bleibt für die Summe aller Innenwinkel die Differenz, nämlich (n – 2·k) · 180°.  Bemerkung: Für k = n/2 ist die Winkelsumme offensichtlich 0 (vgl. Abb. 5). Für alle anderen Sterne kann man die Winkelsumme mit Hilfe von Satz 1 bestimmen.  Ein Hinweis: Den Satz kann man an der Abb. 8 mit der Bleistift-Methode bestätigen. Man muss sich dabei die Anzahl der Volldrehungen merken ☺, hier sind es zwei. | Abb. 8: ein unregelmäßiger 10-3-Stern |

Literatur: Haag, W.: Wege zu geometrischen Sätzen. Klett Stuttgart 2003, S. 8ff

**Infoblatt**

Neben ästhetischen Reizen und den Vorteilen der Handlungsorientierung ist bei den Winkeln in Sternen wieder die – auch außerhalb der Mathematik wichtige – Strategie *mithilfe von Beispielen allgemeine Strukturen erkennen* von Bedeutung, „data mining“ im Kleinen also ☺.

Bei der Erarbeitung der eulerschen Polyederformel (Mkid Klasse 6) wurde auch so vorgegangen.

**Thema 1 – Charakterisierung von n-k-Sternen:**

In den Arbeitsblättern 1, 1a und 1b werden Kreise und Punkte in regelmäßiger Lage vorgegeben – das ist von der Sache her nicht zwingend, wegen des ästhetischen Erlebnisses aber von Vorteil.

Auf jeden Fall wird man die Fälle 10-3-Stern und 10-4-Stern (hierbei erläuterungsbedürftig: „k Punkte weiter gehen“) und die anschließende Begriffsbildung gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern (SuS) bearbeiten. Mögliche wäre es auch, die Kategorien in der Tabelle zunächst noch nicht vorzugeben.

Eine erste Erkenntnis der SuS für die Frage 1 wäre: Wenn k ein Teiler von n ist, dann ist der n-k-Stern nicht charmant.

Das ist zunächst ja richtig und sehr lobenswert (!). Für eine Charakterisierung taugt dies allerdings noch nicht, der 10-4-Stern ist auch nicht charmant und 4 ist kein Teiler von 10. Die abschließende Erkenntnis, dass ein n-k-Stern charmant ist, wenn n und k teilerfremd (andere Formulierung: größer gemeinsamer Teiler = 1) sind und sonst nicht, liegt etwas tiefer, ggf. muss die Lehrkraft dazu einen Hinweis geben.

Bei den Antworten der SuS auf die gestellten Fragen darf man mit einem unterschiedlichen Abstraktionsgrad rechnen, eher beispiel- oder variablenorientiert. Ggf. wird die Lehrkraft zu einer variablenorientierten Formulierung ermutigen. Diese kann dabei von den SuS als knapp und präzise erlebt werden.

Binnendifferenzierung: Anzahl und Abstraktionstiefe der Antworten.

**Thema 2 – Winkelsumme an den Spitzen von charmanten n-k-Sternen:**

Die Lehrkraft erläutert das Thema und die Bleistift-Methode an der Winkelsumme im Dreieck, vgl. Sachanalyse.

Didaktische Reduktion hierbei: es werden nur charmante n-k-Sterne betrachtet.

Das Beispiel des 10-3-Sterns wird gemeinsam bearbeitet.

Auch hier könnte man sich überlegen, ob man die Kategorien und der n-k-Kombinationen der Tabelle vorgibt, oder mit den SuS zusammen erarbeitet.

Insbesondere können sie bezüglich der fünften Spalte an der Bleistift-Methode erkennen, dass die Winkelsumme in den Sternspitzen ein ganzzahliges Vielfaches von 180° betragen muss. Denn der Bleistift liegt zum Schluss wieder auf der Ausgangsstrecke und zeigt dabei entweder in dieselbe oder in die entgegengesetzte Richtung wie zu Beginn.

Im Unterschied zur Vorgehensweise beim Thema 1 werden jetzt keine Grundfiguren mehr vorgegeben. Auch das Erstellen von erkenntnisträchtigen Skizzen von Hand auf Konzeptpapier ist eine wichtige Kompetenz. Die Lehrkraft soll darauf achten, dass die Skizzen groß sind (mindestens DIN A5), sonst hat man mit der konkreten Durchführung der Bleistift-Methode ein Problem.

Es ist nicht unbedingt daran gedacht, den Beweis des Satzes mit den SuS zu führen. Die Lehrkraft sollte den Beweis mithilfe der Spaziergänger-Methode aber kennen (vgl. Sachanalyse) und ggf. einzelnen Interessierten auf Nachfrage (die wichtigste Frage im Fach Mathematik lautet: „Warum?“ ☺) etwa am Beispiel des 10-3-Sterns erläutern können.

Möchte man einen Stern zeichnen, kann man zum Beispiel n Punkte auf einem Kreis markieren und diese so verbinden, dass man von einem Punkt immer k Punkte „weiter geht“.

|  |  |
| --- | --- |
| n = 10; k = 3 | n = 10; k = 4 |
|  |  |
| Beobachtung: ……………………………………………………… | Beobachtung: ……………………………………………………… |

Solche Figuren nennen wir **n-k-Sterne,** dabei ist **n** die **Anzahl der Punkte auf dem Kreis** und **k** die **Anzahl der Punkte um die man „weitergeht“**.

Wenn man beim Zeichnen nicht neu ansetzen muss, nennen wir den n-k-Stern **charmant**.

Mithilfe von Beispielen (Tabelle unten) sollst du **Antworten** auf die folgenden Fragen **herausfinden**:

1.) Für welche Kombination von n und k ist der n-k-Stern charmant, für welche nicht?

2.) Wenn der n-k-Stern nicht charmant ist, wie viele Teile hat er? Welche?

3.) Gibt es gleiche n-k-Sterne?

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **n** | **k** | **Charmant?** | **Anzahl der Teile?** | **Welche?** | **Gleich wie?** |
| 10 | 3 |  |  |  |  |
| 10 | 4 |  |  |  |  |
| 5 | 2 |  |  |  |  |
| 5 | 3 |  |  |  |  |
| 6 | 2 |  |  |  |  |
| 6 | 3 |  |  |  |  |
| 7 | 2 |  |  |  |  |
| 7 | 5 |  |  |  |  |
| 8 | 2 |  |  |  |  |
| 8 | 3 |  |  |  |  |
| 9 | 3 |  |  |  |  |
| 9 | 4 |  |  |  |  |
| 10 | 1 |  |  |  |  |
| 15 | 6 |  |  |  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| n = 5; k = 2 | n = 5; k = 3 |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| n = 6; k = 2 | n = 6; k = 3 |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| n = 7; k = 2 | n = 7; k = 5 |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| n = 8; k = 2 | n = 8; k = 3 |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| n = 9; k = 3 | n = 9; k = 4 |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| n = 10; k = 1 | n = 15; k = 6 |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| Es geht hier um **charmante n-k-Sterne** (k soll dabei kleiner als n/2 sein) – diese dürfen auch unregelmäßig sein – und um die **Winkelsumme an den Sternspitzen**, vgl. Abbildung rechts.  Fülle die **Tabelle** aus, verwende dabei die **Bleistift-Methode**. **Skizziere** dazu von Hand die verlangten Sterne **groß** (!) auf Konzeptpapier.  Es gibt eine **Formel**, wie man diese Winkelsumme mithilfe von **n** und **k** ausrechnen kann.  **Findest du diese Formel** mithilfe der ausgefüllten Tabelle? | Abbildung: Winkelsumme an den Spitzen eines unregelmäßigen 10-3-Sterns |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **n** | **k** | **Anzahl der Volldrehungen**  **des Bleistifts** | **Winkelsumme an den Sternspitzen** | **Wie viel mal 180°?** |
|  |  |  |  |  |
| **10** | **3** | 2 | 720° | **4** · 180° |
| **5** | **2** |  |  |  |
| **7** | **2** |  |  |  |
| **7** | **3** |  |  |  |
| **8** | **3** |  |  |  |
| **9** | **2** |  |  |  |
| **9** | **4** |  |  |  |
| **11** | **2** |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Ein charmanter n-k-Stern (k < n/2) hat in seinen Spitzen die Winkelsumme

……………………………………………………………………………

**Verlaufsplan**

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer

EA … Einzelarbeit PA … Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird man mehr oder weniger vorgeben.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Phase / Zeit** | **L / SuS** | **Medien** |
|  |  |  |
| **1. Erarbei­tung I**  FEU 15 Min. | L und SuS bearbeiten den 10-3-Stern und 10-4-Stern (hierbei erläuterungsbedürftig durch den L: „k Punkte weiter gehen“) und die anschließende Begriffsbildung auf dem Arbeitsblatt 1 gemeinsam.  SuS tragen ihre Beobachtungen ein, z.B. „die Zeichnung geht auf“ und „Startpunkt zu früh erreicht“.  Variante: die Kategorien in der Tabelle zusammen mit den SuS festlegen.  L überzeugt sich davon, dass SuS die drei Fragen verstanden haben. | Arbeitsblatt 1 |
| **2. Erarbei­tung II**  EA / PA 30 Min. | SuS füllen die Tabelle aus und forschen nach Antworten auf die drei gestellten Fragen.  L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend (vgl. auch Bemerkungen auf dem Infoblatt). | Arbeits­blätter 1, 1a und 1b |
| **3. Erarbei­tung III**  FEU 15 Min. | L stellt das Thema anhand des Arbeitsblattes 2 vor und erläutert die Bleistift-Methode an der Winkelsumme im Dreieck an der Tafel.  Das Beispiel des 10-3-Sterns wird dann gemeinsam bearbeitet.  Es wird problematisiert, dass die Winkelsumme immer ein ganzzahliges Vielfaches von 180° sein muss (vgl. Infoblatt).  Variante: die Kategorien in der Tabelle zusammen mit den SuS festlegen.  L überzeugt sich davon, dass alle SuS wissen, was zu tun ist. | Arbeitsblatt 2  Tafel |
| **4. Erarbei­tung IV**  EA / PA 30 Min. | SuS füllen die Tabelle aus und forschen nach der Formel, ggf. wählen sie zur Bestätigung noch weitere Beispiele selbst aus.  L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend. | Arbeitsblatt 2  Freiland-Skizzen auf Konzeptpapier |
| **5. Erarbei­tung V**  FEU 15 Min. | Ggf. thematisiert der L den Spezialfall der Winkelsumme im n-Eck (k=1).  Auf Nachfrage oder wenn die Situation dafür „reif“ ist, skizziert der L den Beweis des Winkelsummensatzes für Sternspitzen beispielhaft für den 10-3-Stern. | Tafel |