**Infoblatt**

**Sachanalyse:**

**Satz:** Die Anzahl der Möglichkeiten, n Objekte anzuordnen, ist n! := 1 · 2 · 3 · … · n (lies: „n Fakultät“).

**Beweis** durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: n = 1: die Anzahl der Möglichkeiten 1 Objekt anzuordnen ist 1.

Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für n = k. Zu zeigen ist jetzt, dass sie dann auch für n = k + 1 gilt.

Es kommt ein weiteres Objekt hinzu. Wo kann man es platzieren?

Bei jeder der k! Anordnungen geht das an den beiden Rändern und in den k – 1 Zwischenräumen.

Das sind für jede der k! Anordnungen k + 1 Möglichkeiten, insgesamt sind es also k! · (k + 1) = (k + 1)! Möglichkeiten.

**Relevanz:**

Die Grundzüge der Kombinatorik gehören unseres Erachtens zur Allgemeinbildung.

**Didaktische Bemerkungen:**

Kombinatorik gilt als schwierig. Immerhin kann man für kleine Zahlen (hier: n = 1; 2; 3; 4) *alle Möglichkeiten aufschreiben, daran lernen und Prinzipielles erkennen*. Das ist grundsätzlich eine wichtige Strategie, ebenso der rekursive Ansatz (s.u.) Wie folgt aus dem Fall n = 3 der Fall n = 4?

Ein Paradigma für die Anzahl der Reihungen ist die Anzahl möglicher Aufstellungen beim Familien-Foto. Man könnte den obigen Satz deshalb auch die „Foto-Regel“ nennen.

Interessant ist, dass die Anzahl möglicher Reihungen beim Aufstellen sehr schnell wächst mit der Anzahl der zu fotografierenden Personen.

**Hinführung zur Foto-Regel:**

**1 Person**: A A

🡪 **1 mögliche Reihenfolge**

**2 Personen** A; B AB oder BA

🡪 **2 mögliche Reihenfolgen**

**3 Personen** A; B und C: CAB CBA … C am linken Rand

ACB BCA … C in der Mitte

ABC BAC … C am rechten Rand

Zu AB und BA wird C an jede der 3 möglichen Positionen hinzugefügt.

🡪 **2 · 3 = 6 mögliche Reihenfolgen**

**4 Personen** A; B; C und D: DCAB DACB DABC DCBA DBCA DBAC … D am linken Rand

CDAB ADCB ADBC CDBA BDCA BDAC … D links der Mitte

CADB ACDB ABDC CBDA BCDA BADC … D rechts der Mitte

CABD ACBD ABCD CBAD BCAD BACD … D am rechten Rand

Zu CAB; ACB; ABC; CBA; BCA und BAC wird D an jeder der 4 möglichen Positionen hinzugefügt.

🡪 **2 · 3 · 4 = 24 mögliche Reihenfolgen**

n! (lies: „n Fakultät“) ist eine abkürzende Schreibweise für 1 · 2 · 3 · 4 · … · n.

**Foto-Regel:** Für n Dinge oder Personen gibt es n! Möglichkeiten, sie in eine Reihenfolge zu bringen.

1.) Berechne: a) 5! b) 6! c) 10! : 8!

2.) Schreibe als eine Fakultät: a) 9 · 8! b) 11! : 11 c) 3! + 3! + 3! + 3!

3.) Familie Schmidt stellt sich zum Familienfoto in einer Reihe auf: Vater Emil, Mutter Anne, Töchter Hildegund, Sophie und Christiane. Wie viele Möglichkeiten gibt es?



4.) Familie Schmidt stellt sich wieder zum Familienfoto in einer Reihe auf:

Vater Emil, Mutter Anne, Töchter Hildegund, Sophie und Christiane.

Alle sagen, die Mutter sollte auf jeden Fall in der Mitte sein. Fertige eine kleine Skizze an und berechne, wie viele Möglichkeiten es gibt.

(Bild zur Wiederverwendung und Veränderung gekennzeichnet: https://de.wikipedia.org/wiki/George\_Monckton-Arundell,\_8.\_Viscount\_Galway#/media/Datei:The\_Monckton-Arundell\_family.jpg)

5.) Familie Schmidt stellt sich wieder zum Familienfoto in einer Reihe auf: Vater Emil, Mutter Anne, Töchter Hildegund, Sophie und Christiane und Oma und Opa. Opa und Oma sollen an beiden Rändern stehen. Fertige eine kleine Skizze an und berechne, wie viele Möglichkeiten es gibt.

6.) Wie viele „Wörter“ kann Mert aus den vier Buchstaben seines Namens bilden, also z.B. TREM oder TERM?

7.) Wie viele „Wörter“ kann Peer aus den vier Buchstaben seines Namens bilden, also z.B. PERE oder REEP? Schreibe alle Möglichkeiten auf und zähle sie ab.

Könnte man auch durch eine Rechnung auf diese Anzahl kommen?

Wie lässt sich diese Rechnung begründen?

8.) Wie viele „Wörter“ kann Anna aus den vier Buchstaben ihres Namens bilden, also z.B. ANAN oder NNAA? Schreibe alle Möglichkeiten auf und zähle sie ab.

Könnte man auch durch eine Rechnung auf diese Anzahl kommen?

Wie lässt sich diese Rechnung begründen?

**Verlaufsplan**

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer

EA … Einzelarbeit PA … Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung! Je nach zur Verfügung stehender Zeit wird man noch eine Knobelaufgabe aus der Knobelaufgaben-Sammlung einschieben.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Phase / Zeit** | **L / SuS** | **Medien** |
| **1. Erarbeitung**  FEU 20 Min. | L stellt eine Schätzfrage und damit das Thema vor:  *5 Personen sollen sich zu einem Gruppenfoto in einer Reihe aufstellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?*  SuS schätzen. Die Schätzungen werden festgehalten, wer gewinnt, bekommt nach der Auflösung einen kleinen Preis.  Erfahrungsgemäß wird die tatsächliche Anzahl unterschätzt. Bei n = 3 überblickt man die Anzahl (=6) evtl. noch, n = 5 hat schon das 20-fache an möglichen Reihenfolgen (=120).  Für n = 30 (Schulklasse) ist die Anzahl der möglichen Reihenfolgen schon extrem groß: 265 Quintillionen  30! 265.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000  L führt zur Foto-Regel hin (vgl. Infoblatt) und dokumentiert geeignet.  Für die Performance: 3 SuS stellen sich in den 6 Reihenfolgen auf, diese werden fotografiert ☺.  L lässt die SuS erklären, wie der Fall n = 5 aus dem Fall n = 4 hergeleitet werden kann. Daran wird ersichtlich, ob die SuS das Argumentations-Prinzip verstanden haben.  L weist auf die beiden Strategien hin:  - *An überschaubaren Verhältnissen lernen* (vgl. auch   Aufgaben 7 und 8 des Arbeitsblattes).  - *Wie folgt ein Fall aus dem vorherigen Fall?* (Rekursion) | Tafel, Heft |
| **2. Übung**  EA / PA 30 Min. | L lobt, aber beobachtet und berät zurückhaltend.  Lösungen:  1a) 120 b) 720 c) 90 (zuerst kürzen!)  2a) 9! b) 10! c) 4!  3.) 5! = 120  4.) 4! = 24  5.) 2 · 5! = 240 (Opa links, Oma rechts oder umgekehrt)  6.) 4! = 24  7.) 4! : 2 = 12 (Man denke sich zunächst die beiden Buchstaben „E“ nummeriert; immer zwei Reihungen „verschmelzen“ nach Wegfall der Nummerierung zu einer:  PERE = PE1RE2 = PE2RE1 .)  8.) (4! : 2) : 2 = 6 (vgl. Aufgabe 7)  Variation für die „Schnellen“: 3 Erwachsene und 4 Kinder stellen sich zum Foto auf, immer schön abwechselnd.  Wie viele Reihenfolgen? [Lösung: 4! · 3! = 144] | Arbeitsblatt |
| **3. Besprechung**  FEU 10 Min. | Wichtig ist die Besprechung der Aufgaben 7 und 8.  Variation für die „Schnellen“:  ELENE mit 5! : 3! = 20 Reihenfolgen | Arbeitsblatt |