**Sachanalyse**

|  |  |
| --- | --- |
| Möchte man einen Stern zeichnen, kann man – vgl. Abb. 1 – zum Beispiel n = 10 Punkte auf einem Kreis auswählen, den Streckenzug etwa bei P1 beginnen und dann über P2, P3 usw. fortführen, nämlich jeweils k = 3 Punkte gegen den Uhrzeigersinn „weiter“.  Man nimmt dabei erfreut zur Kenntnis, dass man beim Erreichen des Startpunktes P1 vorher bei allen anderen Punkten P2 bis P10 genau einmal „vorbei“ gekommen ist. | Abb. 1: Stern mit n = 10 und k = 3 |

Für k = 1 geht man zum jeweils nächsten Punkt weiter und erhält ein regelmäßiges 10-Eck (Abb. 2).

Für k = 2 geht man zum jeweils übernächsten Punkt weiter, erhält dann aber zunächst nur ein 5-Eck, da man „zu früh“ zu Startpunkt zurückkehrt. Setzt man bei einem der noch übrigen Punkte neu an, so erhält man ein weiteres Fünfeck und insgesamt auch einen Stern (Abb. 3).

Für k = 4 geht man jeweils 4 Punkte weiter und erhält zunächst nur einen Stern mit 5 Spitzen. Setzt man bei einem der noch übrigen Punkte neu an, so erhält man insgesamt einen Stern, der aus zwei Sternen mit jeweils 5 Spitzen besteht (Abb. 4).

Für k = 5 muss man insgesamt fünfmal ansetzen (Abb. 5).

Für den Fall k = 6 beobachtet man, dass das Weitergehen um 6 Punkte gegen den Uhrzeigersinn einem Weitergehen um 4 Punkte mit dem Uhrzeigersinn entspricht und umgekehrt. Es ergibt sich dieselbe Figur wie für k = 4 (Abb. 4).

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
| Abb. 2: 10-1-Stern | Abb. 3: 10-2-Stern | Abb. 4: 10-4-Stern | Abb. 5: 10-5-Stern |

Allgemein nennen wir Figuren, die auf diese beschriebene Weise entstehen, **n-k-Sterne**. Die regelmäßige Lage der Punkte auf dem Kreis ist dabei nicht Voraussetzung, als Vorgabe würde sogar ein beliebiges konvexes n-Eck ohne Umkreis genügen.

n-k-Sterne kann man zur Erreichung aller Punkte entweder zeichnen, **ohne den Stift absetzen zu müssen**, wir nennen solche Sterne **charmant**  (Beispiele: 10-3-Stern und 10-1-Stern, vgl. Abb. 1 und 2) **oder man muss mehrfach ansetzen** und sie bestehen aus mehreren Teilen (Beispiele: 10-2-Stern, 10‑4‑Stern und 10-5-Stern, vgl. Abb. 3 bis 5). In beiden Fällen erreicht man alle Punkte genau einmal.

Es gilt – hier ohne eine weitere allgemein ausgeführte Begründung – der folgende

|  |
| --- |
| **Satz:** Es seig der größte gemeinsame Teiler von n (n > 1) und k (0 < k < n).   * n-k-Sterne sind genau dann charmant, wenn g = 1 ist. * n-k-Sterne bestehen für g > 1 aus g charmanten (n:g)-(k:g)-Sternen. * n-k-Sterne und n-(n–k)-Sterne stimmen überein. |

Literatur: Haag, W.: Wege zu geometrischen Sätzen. Klett Stuttgart 2003, S. 8ff

**Infoblatt**

Neben ästhetischen Reizen und den Vorteilen der Handlungsorientierung ist bei den Winkeln in Sternen wieder die – auch außerhalb der Mathematik wichtige – Strategie *mithilfe von Beispielen allgemeine Strukturen erkennen* von Bedeutung, „data mining“ im Kleinen also ☺.

Man geht dabei so vor wie bei der Erarbeitung der eulerschen Polyederformel (Mkid Klasse 6).

**Charakterisierung von n-k-Sternen:**

In den Arbeitsblättern 1, 2 und 3 werden Kreise und Punkte in regelmäßiger Lage vorgegeben. Das ist von der Sache her nicht zwingend, wegen des ästhetischen Erlebnisses aber von Vorteil.

Auf jeden Fall wird man die Fälle 10-3-Stern und 10-4-Stern (hierbei erläuterungsbedürftig: „k Punkte weiter gehen“) und die anschließende Begriffsbildung auf dem Arbeitsblatt 1 gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern (SuS) bearbeiten.

Eine erste Erkenntnis der SuS nach dem Ausfüllen der Tabelle für die Frage 1 wäre:   
Wenn k ein Teiler von n ist, dann ist der n-k-Stern nicht charmant.

Das ist zunächst ja richtig und sehr lobenswert (!). Für eine Charakterisierung taugt dies allerdings noch nicht, der 10-4-Stern ist auch nicht charmant und 4 ist kein Teiler von 10.

Die abschließende Erkenntnis, dass ein n-k-Stern charmant ist, wenn n und k teilerfremd (andere Formulierung: größer gemeinsamer Teiler = 1) sind und sonst nicht, liegt etwas tiefer, ggf. muss die Lehrkraft dazu einen Hinweis geben.

Bei den Antworten der SuS auf die gestellten Fragen darf man mit einem unterschiedlichen Abstraktionsgrad rechnen, eher beispiel- oder variablenorientiert. Die Lehrkraft wird ggf. zu einer variablenorientierten Formulierung ermutigen. Diese kann dabei von den SuS als knapp und präzise erlebt werden.

Eine mögliche Binnendifferenzierung liegt in der Anzahl und Abstraktionstiefe der Antworten der SuS.

Die ausgefüllte Tabelle des Arbeitsblattes 1:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **n** | **k** | **Charmant?** | **Anzahl der Teile?** | **Welche?** | **Gleich wie?** |
| 10 | 3 | ja | 1 |  |  |
| 10 | 4 | nein | 2 | 5-2-Sterne |  |
| 5 | 2 | ja | 1 |  |  |
| 5 | 3 | ja | 1 |  | 5-2-Stern |
| 6 | 2 | nein | 2 | 3-1-Sterne |  |
| 6 | 3 | nein | 3 | 2-1-Sterne |  |
| 7 | 2 | ja | 1 |  |  |
| 7 | 5 | ja | 1 |  | 7-2-Stern |
| 8 | 2 | nein | 2 | 4-1-Sterne |  |
| 8 | 3 | ja | 1 |  |  |
| 9 | 3 | nein | 3 | 3-1-Sterne |  |
| 9 | 4 | ja | 1 |  |  |
| 10 | 1 | ja | 1 |  |  |
| 15 | 6 | nein | 3 | 5-2-Sterne |  |

Möchte man einen Stern zeichnen, so kann man zum Beispiel n Punkte auf einem Kreis markieren und diese so verbinden, dass man von einem Punkt immer k Punkte „weiter geht“.

|  |  |
| --- | --- |
| n = 10; k = 3 | n = 10; k = 4 |
|  |  |
| Beobachtung:  …………………………………………………………………… | Beobachtung:  ……….……………………………………………………… |

Solche Figuren nennen wir **n-k-Sterne,** dabei ist **n** die **Anzahl der Punkte auf dem Kreis** und **k** die **Anzahl der Punkte um die man „weitergeht“**.

Wenn man beim Zeichnen nicht neu ansetzen muss, nennen wir den n-k-Stern **charmant**.

Mithilfe von Beispielen (Tabelle unten) sollst du **Antworten** auf die folgenden Fragen **herausfinden**:

1.) Für welche Kombination von n und k ist der n-k-Stern charmant, für welche nicht?

2.) Wenn der n-k-Stern nicht charmant ist, wie viele Teile hat er dann? Welche?

3.) Gibt es gleiche n-k-Sterne?

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **n** | **k** | **Charmant?** | **Anzahl der Teile?** | **Welche?** | **Gleich wie?** |
| 10 | 3 |  |  |  |  |
| 10 | 4 |  |  |  |  |
| 5 | 2 |  |  |  |  |
| 5 | 3 |  |  |  |  |
| 6 | 2 |  |  |  |  |
| 6 | 3 |  |  |  |  |
| 7 | 2 |  |  |  |  |
| 7 | 5 |  |  |  |  |
| 8 | 2 |  |  |  |  |
| 8 | 3 |  |  |  |  |
| 9 | 3 |  |  |  |  |
| 9 | 4 |  |  |  |  |
| 10 | 1 |  |  |  |  |
| 15 | 6 |  |  |  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| n = 5; k = 2 | n = 5; k = 3 |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| n = 6; k = 2 | n = 6; k = 3 |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| n = 7; k = 2 | n = 7; k = 5 |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| n = 8; k = 2 | n = 8; k = 3 |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| n = 9; k = 3 | n = 9; k = 4 |
|  |  |

|  |  |
| --- | --- |
| n = 10; k = 1 | n = 15; k = 6 |
|  |  |

**Verlaufsplan**

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer

EA … Einzelarbeit PA … Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Phase / Zeit** | **L / SuS** | **Medien** |
|  |  |  |
| **1. Erarbei­tung I**  FEU 15 Min. | L und SuS bearbeiten den 10-3-Stern und 10-4-Stern (hierbei erläuterungsbedürftig durch den L: „k Punkte weiter gehen“) und die anschließende Begriffsbildung auf dem Arbeitsblatt 1 gemeinsam.    L wirkt darauf hin, dass SuS die beiden 5-2-Sterne beim 10‑4‑Stern zur Unterscheidung verschiedenfarbig zeichnen.  SuS tragen ihre Beobachtungen selbständig ein, z.B. „die Zeichnung geht auf“ und „Startpunkt zu früh erreicht“.  L überzeugt sich davon, dass alle SuS die drei Fragen verstanden haben. | Arbeitsblatt 1 |
| **2. Erarbei­tung II**  EA / PA 30 Min. | SuS füllen die Tabelle aus und forschen nach Antworten auf die drei gestellten Fragen.  Hinweis des L: Bei nicht-charmanten Sternen die Teilsterne verschiedenfarbig zeichnen!  L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend (vgl. auch Bemerkungen auf dem Infoblatt).  L korrigiert ggf. falsche Eintragungen in den Tabellen der SuS (mit falschen Daten kann man keine Regel finden!).  L gibt den langsameren Zeichnern einige Tabellenwerte vor, damit sich diese auch Gedanken über die drei gestellten Fragen machen können. | Arbeits­blätter 1, 2 und 3 |
| **3. Abschluss**  FEU 5 Min. | Die Formulierungen der Antworten werden verglichen.  L und SuS einigen sich auf eine variablenorientierte Formulierung. |  |