**Infoblatt**

Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen; und jeder geht zufrieden aus dem Haus. (Goethe)

Die Knobelaufgaben-Sammlung umfasst etwa **100 Aufgaben** (Teilaufgaben sind einzeln gezählt) in drei Schwierigkeitsstufen, \*einfach, \*\*mittel und \*\*\*schwierig – samt Lösungen und ggf. Kommentaren.

Der Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe hängt dabei oft nur von einer Nuance in der Aufgabenstellung ab (*Grundstücke*).

Man darf den Begriff Knobelaufgabe hier gerne im weiteren Sinn verstehen. Trotzdem haben nicht wenige Aufgaben dieser Sammlung den typischen Knobelaufgaben-Clou.

Die Aufgaben können bei Mkid-Stunden als **Puffer** eingesetzt werden. Man kann auch eigene Knobelaufgaben-Stunden machen.

Der **Zeitbedarf** erstreckt sich mit allen Abstufungen von einer Minute (*extreme Körper*) bis zu einer ganzen Sitzung *(Noten)*, wenn man das ausdehnen möchte.

Manche Aufgabentypen (*Stimmt’s*) eignen sich für ein kleines **Gewinnspiel**.

Manche Aufgaben eignen sich gut zur **selbständigen Variation** durch die Schülerinnen und Schüler (*Würfel*).

Es ist nicht daran gedacht, dass die Lehrkraft die Aufgaben gedruckt austeilt, sondern dass die **Aufgaben vorgelesen** und ggf. im Unterrichtsgespräch **erläutert** werden. Ggf. werden wichtige Informationen auf eine geeignete Art dargeboten (Tafel, Visualizer, u.a.).

Bei **schwierigen Aufgaben** (*Waageproblem*) ist es schon gut, wenn die Schülerinnen und Schüler

- das Problem erfassen

- sich Gedanken machen

- von der Lehrkraft gesagt bekommen, dass dieses Problem ganz ganz schwierig ist

- selbständig erste Lösungsansätze fassen (loben, loben, loben!)

- mit einem Tipp auf die richtige Lösung kommen (*Mathebuch* 🡪 unbedingt nachspielen!)

- die Auflösung verstehen und deren intellektuellen Charme erkennen

- erkennen, dass es auch bei aussichtslosen Situationen eine Lösung geben kann

An geeigneten Stellen wird die Lehrkraft auf eine der **Problemlöse-Strategien**   
(„Leben ist Problemlösen“ – Carl Popper, Philosoph, 1902-1994) hinweisen:

* mache eine Skizze oder lege eine Tabelle an
* mache ein Beispiel
* probiere systematisch
* teile das Problem in Teilprobleme auf
* betrachte den ungünstigsten Fall
* arbeite alle Fälle der Reihe nach systematisch, sorgfältig und konzentriert ab
* Vorwärtsarbeiten bzw.: kann man etwas Einschränkendes über die Lösung sagen? (*viele Teiler*)

Die **Selbsterfahrung der Lehrkraft** ist wichtig beim Knobeln *(Zwei Teile)*.

Also: nicht immer gleich die Lösung anschauen ☺.

Im Idealfall überträgt sich die Begeisterung der Lehrkraft beim Knobeln auf die Schülerinnen und Schüler.

**Knobelaufgaben-Sammlung**

*Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen; und jeder geht zufrieden aus dem Haus.* *(Goethe)*

Schwierigkeitsgrad: \*einfach \*\*mittel \*\*\*schwierig

**\*Balken:**

Ein Balken wurde durch 11 Schnitte in Stücke zu je 15 cm Länge zerlegt. Wie lang war der Balken?

**Balken – Lösung:**

12 (!) mal 15 cm = 180 cm. Ggf. eine Skizze machen.

**\*Buchstaben-Rätsel** mit **Lösungen:**

Zu einer „Abkürzung“ ist eine Bedeutung zu finden.

Beispiel: 4 = RW hat ein RE … 4 rechte Winkel hat ein Rechteck

90 = G hat ein RW … 90° hat ein rechter Winkel

8 = E hat ein Q … 8 Ecken hat ein Quader

100 = P hat ein G … 100% hat ein Ganzes

6 = Q hat ein W als O … 6 Quadrate hat ein Würfel als Oberfläche

100 = Q hat ein A … 100 Quadratmeter hat ein Ar

180 = WS im D … 180° ist die Winkelsumme im Dreieck

**Buchstaben-Rätsel – Kommentar:**

Mit den Schülerinnen und Schülern zusammen selbst Beispiele (gerne auch außermathematische: 24 Stunden hat ein Tag, 7 Weltwunder auf der Erde, 3 Weisen aus dem Morgenland, usw.) finden macht Spaß!

**\*Bücherwurm:**

Im Regal stehen drei Bände des Mathematikbuches Lambacher Schweizer. Man sieht die Buchrücken, es sind Band 5 (links), Band 6 (Mitte) und Band 7 (rechts). Der vordere und der hintere Einband jedes Buches ist jeweils 2 mm dick, die Seiten sind zusammen 12 mm dick.

Ein Bücherwurm frisst sich – rechtwinklig zu den Seiten – von der ersten Seite von Band 5 zur letzten Seite von Band 7. Wie lang ist die Fressspur des Wurms?

**Bücherwurm – Lösungen:**

Es sind 2 mm + 16 mm + 2 mm = 20 mm (!). Die erste Seite von Band 5 liegt rechts vom Betrachter aus mit Blick auf den Buchrücken, die letzte Seite von Band 7 liegt links.

**\*Cola:**

Eine Dose Cola kostet 2 €. Das Cola selbst kostet 1,60 € mehr als die leere Dose. Was kostet die leere Dose?

**Cola - Lösung:**

Die spontane Idee, dass die leere Dose 2,00 € – 1,60 € = 0,40 € kostet, ist falsch. Das offenbart eine Probe (!). Die Dose kostet 0,20 € (Lösung durch Probieren oder mithilfe einer Gleichung). Das Cola kostet dann 1,80 €, das sind tatsächlich 1,60 € mehr als 0,20 €.

**\*Dörtes Mutter:**

Die Mutter von Dörte hat 4 Kinder. Das erste Kind heißt Mara. Das zweite Kind hat heißt Merle. Das dritte Kind heißt Mimi. Wie heißt das vierte Kind?

**Dörtes Mutter - Lösung:**

Das vierte Kind von Dörtes Mutter muss Dörte heißen, wenn die anderen drei Kinder offenbar nicht Dörte heißen.

**\*Drei und Neun:**   
Welche der beiden folgenden Behauptungen ist richtig, welche ist falsch?  
Behauptung 1: Wenn die Quersumme einer Zahl durch 9 teilbar ist, dann ist die Zahl durch 3 teilbar.

Behauptung 2: Wenn die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist die Zahl durch 9 teilbar.

**Drei und Neun – Lösung:**

Behauptung 1 ist richtig, Begründung: Wenn die Quersumme einer Zahl durch 9 teilbar ist, dann ist auch die Zahl durch 9 teilbar (Neunerregel). Wenn eine Zahl aber durch 9 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.

Behauptung 2 ist falsch: ein Gegenbeispiel ist die Zahl 12

**Drei und Neun – Kommentar:**

Das ist eine ganz einfache Übung zum korrekten Verständnis von Wenn-dann-Formulierungen.

**\*Dreiecke:**

Ordne sechs gleichlange Stäbe so an, dass vier gleichseitige Dreiecke entstehen – genau vier, nicht mehr und nicht weniger.

**Dreiecke – Lösung**:

Man bilde einen Tetraeder.

**\*Durchschnitte:**

a) Zu den Zahlen 3 und 8 ist eine dritte Zahl gesucht, so dass der Durchschnitt der drei Zahlen 10 ist.

b) Es sind vier unterschiedliche Zahlen gesucht, deren Durchschnitt größer als die zweitgrößte Zahl ist.

c) Es sind drei unterschiedliche Zahlen gesucht, deren Durchschnitt größer als die größte der drei Zahlen ist.

d) Bilde mit den Ziffern 1; 2; 3; 4; 5 und 6 (jede der sechs Ziffern soll genau einmal verwendet werden) drei Zahlen deren Durchschnitt 37 ist.

e) Felix hat von drei Zahlen den Durchschnitt berechnet. Er vergrößert eine Zahl um 6. Um wie viel vergrößert sich der Durchschnitt?

**Durchschnitte – Lösungen:**

a) Dritte Zahl: 19, die Summe der drei Zahlen muss 3 · 10 = 30 sein.

b) z.B.: 1; 2; 3 und 10 mit Durchschnitt 4

c) Das ist nicht möglich.

d) (14 + 62 + 35) : 3 = 111 : 3 = 37

e) Der Durchschnitt vergrößert sich um 2.

Formal: (a + b + c ) : 3 = m; (a + b + c + 6) : 3 = m + 2.

Man ist hier auch mit beispielgebundenen Argumentationen der Schülerinnen und Schüler zufrieden.

**Durchschnitte – Kommentar:**

Schülerinnen und Schüler können selbst solche Aufgaben erfinden.

**\*\*Eindeutig?**

Eva erzählt, dass sie im Sonderangebot Nudelpackungen auf Vorrat gekauft hat, und zwar für insgesamt 10,00 €. Eine Packung Fusilli kostet 0,70 €, eine Packung Spaghetti kostet 0,80 €.   
Kann man aus diesen Angaben eindeutig herausfinden, wie viele Packungen von welcher Sorte es waren?

**Eindeutig? – Lösungen:**

Nein, das kann man nicht. Es könnten 4 Packungen Fusilli und 9 Packungen Spaghetti gewesen sein oder auch 12 Packungen Fusilli und 2 Packungen Spaghetti.

**Eindeutig? Kommentar:**

Das ist eine wichtige Strategie – *alle Möglichkeiten systematisch durchprobieren*.

Hier also z.B. die „Fusilli-Reihe“ hochzählen: 0,70; 1,40; 2,10; 2,80 usw. und den Restbetrag auf die Teilbarkeit durch 0,80 prüfen.

**\*Elf:**

Welche Zahl ist gemeint mit „elf Tausend elf Hundert elf“?

**Elf – Lösungen:**

11 · 1000 + 11 · 100 + 11 = 12.111

**\*Extreme Körper:**

Was für ein Körper ist das?

a) ein einzelnes Spaghetti

b) ein Blatt Papier

c) ein Sandkorn

d) eine Büroklammer

e) die Spitze eines gespitzten Bleistifts

f) ein Haar

**Extreme Körper - Lösung:**

a) ein Zylinder

b) ein Quader

c) eine Kugel

d) ein gebogener Zylinder

e) ein Kegel

f) ein Zylinder

**\*Farbige Socken 1:**   
Norbert hat insgesamt zwei Paar dunkelblaue, drei Paar dunkelbraune und vier Paar dunkelgrüne Socken. Die liegen gewaschen und getrocknet in einer Schublade, aber einzeln und durcheinander.   
Er bittet Linda ihm ein Paar gleichfarbige zu holen. Linda ist leicht farbenblind und kann diese dunklen Socken nicht unterscheiden. Wie viele Socken muss sie mindestens mitnehmen, damit sicher zwei gleichfarbige darunter sind?

Wir gehen davon aus, dass es hierbei keine linken oder rechten Socken gibt.

**Farbige Socken 1 – Lösung:**

Sie muss mindestens vier Socken mitnehmen. Bei dreien sind es im ungünstigsten Fall drei verschiedene, bei vieren sind dann sicher zwei gleiche Farben dabei.

**Farbige Socken 1 – Kommentar:**

Strategien hierbei:

- Den Worstcase betrachten.

- Das so genannte Schubfachprinzip anwenden. Wenn n+1 Kugeln in n Schubfächern verteilt werden sollen, dann liegt in mindestens einem Schubfach mehr als eine Kugel.

**\*\*Farbige Socken 2:**

Lisa hat insgesamt zwei Paar dunkelblaue, drei Paar dunkelbraune und vier Paar dunkelgrüne Socken. Die liegen gewaschen und getrocknet in einer Schublade, aber einzeln und durcheinander.

Sie bittet Lars ihr ein Paar gleichfarbige zu holen. Lars ist leicht farbenblind und kann diese dunklen Socken nicht unterscheiden. Wie viele Socken muss er mindestens mitnehmen, damit sicher zwei gleichfarbige darunter sind, die nicht dunkelblau sind?

Wir gehen davon aus, dass es hierbei keine linken oder rechten Socken gibt.

**Farbige Socken 2 – Lösung:**

Er muss mindestens sieben Socken mitnehmen. Im ungünstigsten Fall sind die vier dunkelblauen dabei, dann braucht man darüber hinaus noch drei.

**Farbige Socken 2 – Kommentar:**

Strategien hierbei:

- Den Worstcase betrachten.

- Das so genannte Schubfachprinzip anwenden, dies lautet z.B. so: Wenn n+1 Kugeln in n Schubfächern verteilt werden sollen, dann liegt in mindestens einem Schubfach mehr als eine Kugel.

|  |  |
| --- | --- |
| **\*\*Flächenstücke 1:**  Finde mithilfe der Abbildung rechts eine Regel heraus, wie man von einer Quadratzahl zur nächsten kommt  **Flächenstücke 1 – Lösung:**  In verschiedenen Abstraktionsebenen  - man addiert immer die nächste ungerade Zahl  - 22 = 12 + 3; 32 = 22 + 5; 42 = 32 + 7, usw.  - zu 32 addiert man 2 · 3 + 1, zu 42 addiert man 2 · 4 + 1, usw.  - (n + 1 )2 = n2 + (2·n + 1) |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **\*\* Flächenstücke 2:**  a) Lege die beiden gleichen Flächenstücke (Abbildungen rechts) zu einem Rechteck zusammen und berechne damit auf einfache Weise den Wert von  1 + 2 + 3 + 4 + 5.  b) Wie kommt man dann zu  1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10?  c) Wie kommt man zu  1 + 2 + 3 + 4 + 5 + … + n? |  |  |

**Flächenstücke 2 – Lösung:**

a) Drehe eines der beiden Flächenstücke um 180° und setze es auf das andere obendrauf.

Das entstandene Rechteck ist 5 breit und 6 hoch, also ist 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = (6 · 5) : 2 = 15

b) Das Rechteck ist 10 breit und 11 hoch, also ist 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + … + 10 = (11 · 10) : 2 = 55

c) Das Rechteck ist n breit und n+1 hoch, also ist 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + … + n= (n + 1) · n : 2

**\*\*Fußball:**   
Drei Brüder kaufen in einem Laden einen Fußball für 30 €. Die Ladeninhaberin denkt „25 € hätten auch gereicht“ und schickt den Lehrling mit 5 € den Brüdern nach. Dieser behält 2 € und gibt jedem der Brüder 1 €. Diese haben also 27 € bezahlt, 2 € hat der Lehrling. Zu 30 € fehlt also noch 1 €. Wo ist der?

**Fußball – Lösung:**   
Wo ist das Geld? Der Reihe nach: die Brüder bezahlen zunächst 30 €, erhalten dann aber 3 € zurück. Sie haben also 27 € bezahlt. 2 € davon hat der Lehrling behalten. Diese 2 € sind also ein Teil der bezahlten 27 €. Für die Ladeninhaberin bleiben 27 € – 2 € = 25 €.

**Fußball – Kommentar:**

Die Summe 27 € + 2 € hat keine Bedeutung, ebenso sinnlos ist deren Vergleich mit dem ursprünglichen Preis von 30 €.

**\*Gefährlich:**

Zur Abhängigkeit des Bremswegs von der Geschwindigkeit hat der TÜV Daten gesammelt:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Geschwindigkeit | 10 km/h | 20 km/h | 30 km/h | 40 km/h | 50 km/h | 60 km/h |
| Bremsweg | 1 m | 4 m | 9 m | 16 m | 25 m | 36 m |

a) Ist der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg proportional?

b) Wie verändert sich der Bremsweg, wenn man die Geschwindigkeit verdoppelt?

c) In einem Wohngebiet ist die Geschwindigkeit 40 km/h erlaubt. Kai fährt aber 50 km/h. Um wie viel Meter verlängert sich sein Bremsweg damit? Veranschauliche diese Strecke im Klassenzimmer.

**Gefährlich – Lösungen:**

a) Nein, zum Doppelten der Geschwindigkeit gehört nicht das Doppelte des Bremsweges.

b) Der Bremsweg vervierfacht sich (!).

c) Sein Bremsweg verlängert sich um 9 m (!); das könnte die Länge eines Standard-Klassenzimmers sein.

**\*Gewicht 1:**

Toni sagt: „Ich wiege 27 kg und die Hälfte meines Gewichts.“ Wie viel wiegt Toni?

**Gewicht 1 – Lösung:**

Der fehlende Teil ist wieder eine Hälfte, also sind 27 kg die Hälfte des Gewichts von Toni. Toni wiegt also 2 · 27 kg = 54 kg.

**Gewicht 1 – Kommentar:**

Eine kleine Skizze kann helfen.

**\*Gewicht 2:**

Daniela sagt: „Ich wiege 27 kg und ein Drittel meines Gewichts.“ Wie viel wiegt Daniela?

**Gewicht 2 – Lösung:**   
Der fehlende Teil zu einem Drittel sind zwei Drittel, also sind 27 kg zwei Drittel des Gewichts von Daniel. Ein Drittel wären dann 13,5 kg. Daniel wiegt also 3 · 13,5 kg = 40,5 kg.

**Gewicht 2 – Kommentar:**

Eine kleine Skizze kann helfen.

**\*Gewicht 3:**

Felix sagt: „Ich wiege 70% meines Gewichts und 15 kg.“ Wie viel wiegt Felix?

**Gewicht 3 – Lösung:**   
Der fehlende Teil zu 70% sind 30%. 30% sind also 15 kg, 10% sind dann 5 kg. Felix wiegt 50 kg.

**\*Grabung:**

Wenn Maya 1 Tag braucht, um ein Loch auszugraben, das 1 Meter lang, 1 Meter breit und 1 Meter tief ist, wie viele Tage braucht sie dann für ein Loch, das 3 Meter lang, 3 Meter breit und 3 Meter tief ist?

**Grabung – Lösung:**

Nicht 3 Tage, sondern 27 Tage.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **\*\*Grundstücke 1:**  Ein hakenförmiges Grundstück – vgl. Abbildung Mitte – soll in vier deckungsgleiche Teile aufgeteilt werden.  **Grundstücke 1 – Lösung:**  Abbildung rechts – ohne unterlegtes Karogitter |  |  |

**Grundstücke 1 – Kommentar:**

Stellt man die Aufgabe ohne unterlegtes Karogitter (dafür mit den Angaben „nur rechte Winkel, die kürzeren Strecken sind alle gleich lang.“), fällt das Auffinden der Lösung erfahrungsgemäß deutlich schwerer.

Die Aufgabenstellung mit unterlegtem Karogitter wird einfacher mit dem Zusatz „keine Karos zerteilen“

Insbesondere hier gilt: Wenn man sich einmal von der Hoffnung verabschiedet hat, dass man mit der Rechtecksform hinkommt, liegt die Lösung „nahe“.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **\*\*Grundstücke 2:**  Ein trapezförmiges Grundstück – vgl. Abbildung Mitte – soll in vier deckungsgleiche Trapeze aufgeteilt werden.  **Grundstücke 2 – Lösung:**  Abbildung rechts |  |  |

**Grundstücke 2 – Kommentar:**

Stellt man die Aufgabe ohne die Angabe der Art der vier deckungsgleichen Stücke („Trapeze“) wird es wesentlich schwieriger, dann ist es eine \*\*\*-Aufgabe. Man wird wohl zunächst mit Dreiecken experimentieren, was aber nicht zum Ziel führt.

**\*\*Haare:**

Gibt es in Stuttgart zwei Personen, die gleich viele Haare auf dem Kopf haben?

**Haare – Lösung:**   
Stuttgart hat etwa 600.000 Einwohner. Menschen haben bis zu 150.000 Haare auf dem Kopf.

Angenommen es gäbe nur 150.001 Stuttgarter, dann könne es theoretisch passieren, dass der 1. Stuttgarter 0 Haare, der 2. Stuttgarter 1 Haar, der 3. Stuttgarter 2 Haare usw. und der 150001. Stuttgarter 150.000 Haare auf dem Kopf hätte. Also hätten alle eine unterschiedliche Anzahl.

Jetzt gibt es aber noch viel mehr Stuttgarter, also sicher auch zwei mit einer gleichen Kopfhaar-Anzahl – selbst wenn man ggf. noch einen Bart mit einrechnet ☺.

**Haare – Kommentar:**

Strategien hierbei sind: - Den Worstcase betrachten.

- Das so genannte Schubfachprinzip anwenden, dies lautet z.B. so: Wenn n+1 Kugeln in n Schubfächern verteilt werden sollen, dann liegt in mindestens einem Schubfach mehr als eine Kugel.

**\*Hühner:**

Wenn drei Hühner in drei Tagen drei Eier legen, wie viele Eier legt dann ein Huhn in einem Tag?

**Hühner – Lösungen:**

Ein Huhn legt in drei Tagen ein Ei. Also legt ein Huhn in einem Tag nicht ein Ei, sondern nur ein Drittel Ei.

**\*\*Kamele:**Ein alter Araber bestimmt vor seinem Tode, dass der erste Sohn die Hälfte, der zweite Sohn den dritten und der dritte Sohn den neunten Teil seiner Kamele erhalten soll. Da er 17 Kamele hinterließ, konnten sich die Söhne nicht einigen. Ein Derwisch, der mit einem alten Kamel vorbeikam, half ihnen und sagte: „Ich will euch mein Kamel leihen.“ Nun nahm jeder der Söhne von den 18 Kamelen seinen Teil, der erste Sohn 9 Kamele, der zweite Sohn 6 Kamele und der dritte Sohn 2 Kamele.

Damit waren 17 der 18 Kamele verteilt und der Derwisch zog mit seinem übrig gebliebenen Kamel weiter. Hier stimmt doch etwas nicht! Aber was?

**Kamele – Lösung:**

Die drei Teile, die der alte Araber seinen Söhnen bestimmt hat, geben zusammen kein Ganzes. Es ist nämlich 1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18. Damit bleibt beim Verteilen natürlich etwas übrig.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **\*Kehrschaufel:**  Vier Hölzer stellen eine Kehrschaufel dar, in der Schaufel liegt etwas Dreck – vgl. Abbildung Mitte. Lege zwei Hölzer so um, dass der Dreck außerhalb der Schaufel liegt.  **\*Kehrschaufel – Lösung:**  Abbildung rechts |  |  |

**\*Knöpfe:**

Nils hat sechs Brüder. Alle Jungen der Familie von Nils haben jeweils sechs Hemden. Jedes Hemd hat sechs Knöpfe. Wie viele Knöpfe sind es insgesamt?

**Knöpfe – Lösung:**   
Es sind 7 (!) Jungen, also 7 · 6 · 6 = 252 Knöpfe.

**Knöpfe – Kommentar:**   
Beachte die so genannte Produktregel der Kombinatorik (nicht addieren!)

**\*Körper:** (Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)  
a) Ein geometrischer Körper hat fünf Ecken und acht Kanten. Welcher könnte es sein?

b) Ein Rechteck rotiert schnell um eine seiner Seiten. Welcher Körper „entsteht“?

**Körper – Lösung:**

a) Es könnte z.B. eine quadratische Pyramide sein.

b) Es „entsteht“ ein Zylinder.

**Körper – Kommentar:**

Zu a) Das kann man mit Prismen variieren.

Zu b) Das kann man mit rechtwinkligen Dreiecken variieren.

**\*Kreis:**

Laura hat mithilfe eines Topfdeckels auf einem Papier einen Kreis gezeichnet und diesen dann ausgeschnitten. Jetzt hätte sie gerne den Mittelpunkt dieses Kreises.

Suche möglichst viele Möglichkeiten, wie Laura diesen Mittelpunkt finden kann.

**Kreis – Lösungen:**

- Laura kann den Kreis zweimal falten, jeweils Kreisbogen auf Kreisbogen. Die Spitze des Kreissektors ist der gesuchte Mittelpunkt.

- Laura kann zwei Mittelsenkrechten zu jeweils zwei Kreispunkten zeichnen, deren Schnittpunkt ist der Kreismittelpunkt.

- Laura kann ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, dessen Ecken auf dem Kreis liegen – die Seite gegen­über dem rechten Winkel ist ein Durchmesser des Kreises (Kehrsatz des Thales). Sie kann nun die Mitte des Durchmessers ausmessen oder diese Prozedur mit einem anderen rechtwinkligen Dreieck wiederholen.

- Laura kann die Kreisscheibe so in ein Koordinatensystem legen, dass der Kreis die Koordinatenachsen berührt. Dann kann sie um den Kreis ein Quadrat zeichnen, der Schnittpunkt der Diagonalen ist der Kreismittelpunkt.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **\*\*\*Kryptogramm:** Jeder Buch­stabe steht für eine Ziffer von 0 bis 9, unter-schiedliche Buchstaben bedeuten unterschiedliche Ziffern. Keine Zahl beginnt mit einer 0. | a) ABCDE  + BCDE  + CDE  + DE  + E  -------  = AAAAA | b) ZWEI  + ZWEI  ------  = VIER | c) EINS  + EINS  ------  = ZWEI | d) SEND  + MORE  -------  = MONEY | e) EINS  + EINS  + EINS  + EINS  ------  = VIER |
| **Kryptogramm - Lösungen:** | a) 52487  + 2487  + 487  + 87  + 7  -------  = 55555 | b) 1397  + 1397  ------  = 2794 | c) 1407  + 1407  ------  = 2814 | d) 9567  + 1085  ------  = 10652 | e) 1329  + 1329  + 1329  + 1329  ------  = 5316 |

**Kryptogramm – Kommentar:**Kryptogramme sind ganz ganz schwierig, man wird auch mit Lösungsansätzen zufrieden sein und viel loben und Hilfen geben.   
Hinweise:  
Zu a) Diese erste Aufgabe sollte man mit den Schülerinnen und Schüler gemeinsam machen, damit klar wird, wie man sich hier vorwärts arbeitet. Hier eine Reihe von Überlegungen:

A kann nur 0 oder 5 sein – wegen der letzten Spalte, 0 kommt für A nicht in Frage wegen der Regel „keine Zahl beginnt mit 0“. A ist also 5.

Für E kommt jetzt nur noch in Frage 1; 3; 7 oder 9 und man muss das der Reihe nach ausprobieren, ob man „durchkommt“.

Das kann man mit der Lerngruppe arbeitsteilig erledigen. Es bleibt nur die 7 für E übrig.

Für D bleibt dann nur noch 3 oder 8, auch das muss man ausprobieren, es bleibt nur die 8 für D.

Für C bleibt nur die 4.

Für B bleibt nur die 2.

Zu b) Evtl. ein Tipp: Kümmere dich zuerst um E.

E kann nur 0 oder 9 sein. Hier gibt es insgesamt 12 Lösungen, eine davon könnten die Schülerinnen und Schüler gut selbst finden.

Zu c) Evtl. ein Tipp: E muss klein sein (1 bis 4), denn es gibt keinen Übertrag. Diese Möglichkeiten einfach ausprobieren und schauen, ob man „durchkommt“.

Hier gibt es insgesamt 11 Lösungen, eine davon könnten die Schülerinnen und Schüler gut selbst finden.

zu d) eine Hilfe geben: E = 5 und Y = 2

zu e) eine Hilfe geben: S = 9

**\*\*Lichtschalter:**

Im Keller befinden sich drei Lichtschalter L1, L2 und L3, die mit drei verschiedenfarbigen Glühbirnen auf dem Dachboden verbunden sind. Diese Glühbirnen werden beim Leuchten warm. Johanna ist im Keller und will nur einmal auf den Dachboden gehen. Wie kann Johanna herausfinden, welcher Schalter zu welcher Glühbirne gehört?

**Lichtschalter – Lösung:**   
1.) Den Schalter L1 anschalten und eine Zeit lang warten.

2.) Den Schalter L1 ausschalten.   
3.) Den Schalter L2 anschalten.

4.) Jetzt auf den Dachboden gehen.

5.) Die Glühbirne, die brennt, gehört zum Schalter L2.   
6.) Die Glühbirne, die warm ist und nicht brennt, gehört zum Schalter L1.   
7.) Die Glühbirne, die kalt ist und nicht brennt, gehört zum Schalter L3.

**\*\*Magische Quadrate 1:**

Bei einem magischen 3-3-Quadrat sind die Ziffern 1; 2; 3; …; 9 so in die neun Felder einzutragen, dass die Summe der drei Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch entlang der beiden Diagonalen immer dieselbe ist, wir nennen dies die *magische Summe*.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a) Wie muss diese magische Summe lauten?  b) Fülle die restlichen sieben Felder aus – vgl. Abbildung Mitte.  **Magische Quadrate 1 – Lösung:**  a) 1 + 2 + 3 … + 9 = 45, die magische Summe muss also 15 sein.  b) z.B. vgl. Abbildung rechts |  |  |

**Magische Quadrate 1 – Kommentar:** Das so genannte Lo-Shu-Quadrat ist das älteste bekannte magische Quadrat (2800 v. Chr., China)

**\*\*Magische Quadrate 2:**

Bei einem magischen 4-4-Quadrat sind die Ziffern 1; 2; 3; …; 16 so in die 16 Felder einzutragen, dass die Summe der vier Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch entlang der beiden Diagonalen immer dieselbe ist, wir nennen dies die *magische Summe*.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a) Wie muss die magische Summe lauten?  b) Fülle die restlichen zehn Felder aus – vgl. Abbildung Mitte.  **Magische Quadrate 2 – Lösung:**  a) 1 + 2 + 3 … + 16 = 136, die magische Summe muss also 34 lauten.  b) z.B. vgl. Abbildung rechts |  |  |

**Magische Quadrate 2 – Kommentar:**Dieses magische Quadrat findet sich in Melencolia 1, einem berühmten Kupferstich von Albrecht Dürer (1514).

**\*\*Mehr Prozente:**

Die Vollmilch-Schokolade einer bestimmten Marke hat einen Kakaoanteil von 40%. Die Bitter-Schokolade dieser Marke hat einen Kakaoanteil von 60%.

Hat die Bitter-Schokolade jetzt 20% mehr Kakaoanteil oder 50% mehr Kakaoanteil als die Vollmilch-Schokolade?

**Mehr Prozente – Lösung:**

Es gibt hier zunächst kein „richtig“ oder „falsch“.

Damit aber deutlich wird, was man meint, spricht man im ersten Fall von Prozentpunkten.

40% + 20% = 60% … der Kakaoanteil hat sich um 20 Prozentpunkte erhöht

40% + 50% von 40% = 40% + 20% = 60% … der Kakaoanteil hat sich um 50 Prozent erhöht

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **\*\*Neun Punkte:**  Neun Punkte – vgl. Skizze Mitte – sollen mit einem zusammenhängenden, aus 4 Teilen bestehenden Streckenzug verbunden werden.  Kein Punkt darf zweimal von dem Streckenzug erfasst werden.  **Neun Punkte – Lösung:** Skizze rechts |  |  |

**Neun Punkte – Kommentar:**   
Man muss (!) über die Zeichnung (metaphorisch: über den Tellerrand!) hinausgehen.

**\*\*Noten:**

Studienrat Mildemann macht seine Noten so: Er wirft einen roten und einen blauen Würfel und nimmt die kleinere der beiden Augenzahlen als Note. Beispiele: (2;4): Note 2; (5;1): Note 1.

a) Wie sind die Chancen ungefähr, bei Herrn Mildemann eine 1 oder wenigstens eine 2 zu bekommen?

b) Mit welchem Notendurchschnitt kann die Klasse von Herrn Mildemann etwa rechnen?  
[ggf. Hinweis der Lehrkraft, nachdem die Tabelle vorhanden ist:   
Wir denken uns die Klasse zu 36 Schülerinnen und Schüler und dass jedes der 36 Würfelergebnisse einmal vorkommt – das ist eine plausible Annahme!]

|  |  |
| --- | --- |
| **Noten – Lösung:**  a) In 20 von 36 Fällen gibt es eine 1 oder eine 2.  Die Chancen stehen also gut, sie sind größer als 50%!  b) Wertet man die Tabelle aus, kommt man auf einen Notendurchschnitt von ca. 2,5 (91/36). | (1;1): 1 (1;2): 1 (1;3): 1 (1;4): 1 (1;5): 1 (1;6): 1  (2;1): 1 (2;2): 2 (2;3): 2 (2;4): 2 (2;5): 2 (2;6): 2  (3;1): 1 (3;2): 2 (3;3): 3 (3;4): 3 (3;5): 3 (3;6): 3  (4;1): 1 (4;2): 2 (4;3): 3 (4;4): 4 (4;5): 4 (4;6): 4  (5;1): 1 (5;2): 2 (5;3): 3 (5;4): 4 (5;5): 5 (5;6): 5  (6;1): 1 (6;2): 2 (6;3): 3 (6;4): 4 (6;5): 5 (6;6): 6 |

**Noten – Kommentar:**Strategie: alle Fälle systematisch „abklappern“. Diese Aufgabe können Schülerinnen und Schüler gut ohne das Instrumentarium der Stochastik lösen. Ein bisschen „Starthilfe“ in Form des Tabellenanfangs wird die Lehrkraft allerdings geben müssen. Man sollte keine unbekannten Begrifflichkeiten (Wahr­scheinlichkeit, Anzahl der günstigen Fälle geteilt durch Anzahl der möglichen Fälle usw.) verwenden.

**\*\*\*Paradies-Hölle:**   
An einer Weggabelung führt ein Weg nach links und einer nach rechts. Einer der beiden Wege führt ins Paradies, der andere in die Hölle. An der Weggabelung stehen zwei Brüder. Man weiß, dass der eine stets die Wahrheit sagt, der andere aber immer lügt. Man weiß nicht, welcher der beiden die Wahrheit sagt, und welcher lügt. Man darf einem von ihnen eine einzige Frage stellen, um den Weg ins Paradies zu finden. Wie muss man fragen, damit man sicher ins Paradies kommt?

**Paradies-Hölle – Lösung:**

Man fragt einen der beiden: “Was würde dein Bruder auf die Frage antworten, in welche Richtung es ins Paradies geht?“ Es gibt zwei Möglichkeiten:

1.) Der Weg nach **links** führt **ins Paradies**.

Haben wir den Ehrlichen gefragt, bekommen wir die Antwort „**Nach rechts**“.

Haben wir den Lügner gefragt, bekommen wir auch die Antwort „**Nach rechts**“.

2.) Der Weg nach **rechts** führt **ins Paradies**.

Haben wir den Ehrlichen gefragt, bekommen wir die Antwort „**Nach links**“.

Haben wir den Lügner gefragt, bekommen wir auch die Antwort „**Nach links**“.

Also: Man höre sich die Antwort an und nehme dann die andere Richtung.

**Paradies-Hölle – Kommentar:**

Warum „funktioniert“ das? Bei der Antwort auf diese Frage ist auf jeden Fall „genau eine Lüge enthalten“.

Man kann mit den Schülerinnen und Schülern die Situation mit verteilten Rollen durchspielen.

Zunächst würde man größerer Beträge darauf verwetten, dass es keine solche Frage gibt.

**\*Prozente:**   
Was ist mehr: 30% von 40% oder 40% von 30%?

**Prozente - Lösung:**   
Es ergibt sich beides Mal 12%.   
3/10 von 4/10 = 3/10 · 4/10 = 12/100 und 4/10 von 3/10 = 4/10 · 3/10 = 12/100.

**\*Quadratzahlen:**

Der Vier-Quadratzahlensatz von Lagrange lautet:

Jede [natürliche Zahl](https://de.wikipedia.org/wiki/Nat%C3%BCrliche_Zahl) kann als Summe von vier [Quadratzahlen](https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratzahl) geschrieben werden.

Dieser Satz ist eine Steilvorlage für Übungsaufgaben zu den Quadratzahlen und zum Kopfrechnen.

Schreibe 123 (die Auswahl an Ausgangszahlen ist grenzenlos ☺) als Summe von vier Quadratzahlen.

**Quadratzahlen – Lösung:**

82 + 72 + 32 + 12 = 64 + 49 + 9 +1 = 123

**\*\*Richtig oder falsch?** (Begründung oder Gegenbeispiel)

a) Beim Multiplizieren von zwei Kommazahlen bleibt das Ergebnis gleich, wenn man beim 1. Faktor das Komma um eine Stelle nach rechts und beim 2. Faktor das Komma um eine Stelle nach links verschiebt.

b) Beim Dividieren von zwei Kommazahlen bleibt das Ergebnis gleich, wenn man beim Dividenden (= 1. Zahl) das Komma um eine Stelle nach rechts und beim Divisor (= 2. Zahl) das Komma um eine Stelle nach links verschiebt.

c) Man addiert zwei Brüche, indem man die beiden Zähler und die beiden Nenner addiert.

d) Immer wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich lang sind, dann hat es einen rechten Winkel.

e) Immer wenn ein Viereck vier rechte Winkel hat, dann ist es ein Quadrat.

f) Bei jedem Rechteck halbieren die Diagonalen die Eckwinkel.

g) Es gibt kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln.

h) Für zwei beliebige Zahlen a und b ist a + b = b + a.

i) Für zwei beliebige Zahlen ist a · (b + c) immer dasselbe wie a · b + a · c.

j) Für zwei beliebige Zahlen a und b ist ab immer dasselbe wie ba.

**Richtig oder falsch? – Lösungen:**   
a) richtig; Begründung: Das bedeutet also 1. Faktor mal 10 und 2. Faktor :10. Das gleicht sich aus wegen der Kommutativität der Multiplikation. Schülerinnen und Schüler würden den Sachverhalt ggf. anhand eines konkreten Zahlenbeispiels begründen.

b) falsch; Gegenbeispiel: 40,00 : 20,00 = 2 ist nicht dasselbe wie 400,0 : 2,000 = 200

c) falsch; Gegenbeispiel: 1/2 + 1/2 = 1 ist nicht dasselbe wie (1+1) / (2 +2) = 2/4 = 1/2.

d) offensichtlich falsch – geeignete Zeichnung

e) falsch; es könnte auch ein Rechteck mit unterschiedlichen Seitenlängen sein

f) falsch; man denke sich ein sehr langes und wenig breites Rechteck

g) richtig; die beiden freien Schenkel wäre dann ja parallel, sie würden sich nicht in einem Dreieckspunkt schneiden, ggf. kann man auch mit dem Winkelsummensatz argumentieren

h) richtig; Grundvorstellung der Addition

i) richtig; die Regel ist bekannt als „Ausmultiplizieren“, ggf. veranschaulichen mit einem unterteilten Rechteck und dessen Inhalt o.ä.

j) falsch; Gegenbeispiel 32 = 9 ist nicht 23 = 8.

**Richtig oder falsch? – Kommentar:**

Das ist ein beliebtes Format zur Durchdringung von Sachverhalten.

**\*Rollende Körper:**Ein Körper liegt auf einer Ebene und wird angestoßen.

a) Er rollt gerade aus.

b) Er rollt im Kreis.

Um welchen Körper könnte es sich handeln?

**Rollende Körper – Lösungen:**a) Ein Zylinder, eine Kugel

b) Ein Kegel

**\*\*\*Schachbrett:**

Aus einem Schachbrett sind ein Eck-Feld und das diagonal gegenüberliegende herausgesägt, so dass also noch 62 Felder übrig sind. Kann man diese mit rechteckigen Dominosteinen (diese decken immer zwei Felder ab) lückenlos und ohne Überhang abdecken?

**Schachbrett – Lösung:**   
Nein, das geht nicht. Diagonal gegenüber liegende Felder haben dieselbe Farbe, es gibt also entweder 30 weiße und 32 schwarze oder umgekehrt. Ein Dominostein deckt aber immer gleichzeitig ein weißes und ein schwarzes Feld ab.

**Schachbrett – Kommentar:**

Strategie: ein Problem „verkleinern“. Man kommt durch Probieren zur Auflösung, wenn man z.B. ein 4 x 4-Schachbrett untersucht.

**\*Schätzfragen:**   
Wie viel wiegt das?

a) Ein DIN A4 Blatt normales Papier (= 80 g/m2)

b) Das Schulbuch Lambacher Schweizer 7 (Klett 2016)

c) Ein Päckchen Papiertaschentücher (10 Stück, normale Größe)

d) Eine 2 € Münze

**Schätzfragen – Lösungen:**

a) 5 g

b) 696 g

c) 26 g

d) 8,5 g

**Schätzfragen – Kommentar:**Eignet sich als Wettspiel zum Stundenabschluss: wer am besten geschätzt hat, bekommt einen (kleinen) Preis. Weitere Anregungen: Welchen Flächeninhalt hat die Tafel? Wie hoch ist das Klassenzimmer? usw. (Ein Zollstock gehört sowieso zur Grundausrüstung jeder Mathematiklehrkraft ☺.)

**\*Sechs-sechs-sechs:**   
Wie kann man die Zahl 666 um die Hälfte größer machen, ohne sie durch eine Rechnung zu verändern?

**Sechs-sechs-sechs – Lösung:**

Indem man die Zahl (bzw. seinen Kopf) umdreht.

**\*Spaghetti:**   
Mariam kocht Spaghetti, Kochzeit fünf Minuten. Mariam stehen zwei Sanduhren zur Verfügung. Die erste braucht genau vier Minuten, um ganz durchzulaufen, die zweite genau drei Minuten. Wie kann Mariam mit Hilfe dieser beiden Sanduhren die Kochzeit abmessen?

**Spaghetti – Lösungen:**

Mariam setzt die Spaghetti auf und lässt beide Sanduhren gleichzeitig laufen. Wenn die 3-Minuten-Sanduhr durchgelaufen ist, dreht sie sie um. Nach vier Minuten, wenn die 4-Minuten-Sanduhr fertig ist, dreht sie die 3-Minuten-Sanduhr noch mal um und hat so noch die letzte Minute. Insgesamt hat sie die Spaghetti dann 5 Minuten gekocht.

**\*Spiegelung:** (Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)

a) Spiegle ein Dreieck an seiner längsten Seite. Welche Gesamtfigur ergibt sich?  
b) Spiegle ein rechtwinkliges Dreieck an seiner kürzesten Seite. Welche Gesamtfigur ergibt sich?

**Spiegelung – Lösungen:**

a) Ein Drachenviereck

b) Ein gleichschenkliges Dreieck

**\*Stimmt’s?**

a) 50% von 40% sind 30%.

b) Eine Million hat neun Nullen.

c) 1 Meter sind 100 Zentimeter.

d) 1 Ar sind 100 Quadratmeter.

e) 1 Liter sind 100 Kubikzentimeter.

f) Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist a · b.

g) Der Umfang eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist a + b.

h) Man berechnet 20% von 200 €, indem man 200 € durch 20 teilt.

i) Ein Fünftel ist dasselbe wie 25%.

j) Null Komma neun plus null Komma zehn ist null Komma neunzehn.

k) Eine Tonne hat 1000 Gramm.

l) Die Hälfte von einer Hälfe ist ein Viertel.

m) Ein Viertel von einem Viertel ist ein Achtel.

n) 1 plus 2 mal 3 plus 4 ist 5.

**Stimmt’s? – Lösungen:**a) falsch, es sind 20%

b) falsch, 6 Nullen

c) richtig

d) richtig

e) falsch, es sind 1000 Kubikzentimeter

f) richtig

g) falsch, er ist 2 · (a + b)

h) falsch, indem man durch 5 teilt

i) falsch, es ist dasselbe wie 20%

j) eher falsch, wenn man null Komma zehn versteht als 0,10, das ist eben eine ungute Sprechweise

k) falsch, es sind 1000 Kilogramm

l) richtig

m) falsch, es ist ein Sechzehntel

n) falsch, es ergibt sich 11 (Punkt vor Strich beachten!)

**Stimmt’s? – Kommentar:**

Das ist ein beliebtes Format zur Reaktivierung von Wissen.

**\*\*Summe:**

Jolanta berechnet der Reihe nach die folgenden Summen:

 =

 =

 =

 =

 =

a) Rechne die Summen aus.

b) Wann hat Jolanta die Zahl 1 erreicht?

|  |  |
| --- | --- |
| **Summe – Lösung:**  a)  =  =  =  =  = |  |

b) Er erreicht die Zahl 1 nie. Es fehlt zur 1 jeweils immer noch einmal der letzte Summand der jeweiligen Summe. Man kann diese Situation – wie in der Abbildung gezeigt – veranschaulichen.

**Summe – Kommentar:**

Das ist schon bemerkenswert –

es kommt immer noch etwas dazu und doch wird die Zahl 1 nicht erreicht oder gar überschritten.

**\*Teilbar:**

Setze für ! und ? Ziffern ein, sodass die Zahl 123!5678?

a) durch 5 und 9 teilbar ist

b) durch 4 und 9 teilbar ist

c) durch 2; 3; 4; 5 und 6 teilbar ist

**Teilbar – Lösungen:**a) 123856785

b) 123956784

c) 123456780

**\*\*\*Telefonbuch:**

Simon sucht sich im Stuttgarter Telefonbuch zufällig irgendeinen Telefon-Anschluss heraus, den Nora herausfinden soll, z.B. *Alois Müller in 70199 Stuttgart, Spechtweg 43*. Nora darf nur solche Fragen stellen, die Simon mit *ja* oder *nein* beantworten kann. Mit wie vielen Fragen kann Nora auskommen?

**Telefonbuch – Lösung:**Wir schätzen die Anzahl der im Telefonbuch abgedruckten Telefonanschlüsse auf etwa 250.000.   
Nora kommt mit etwa 18 Fragen aus, denn 218 ist ca. 250.000. Sie „geht“ zunächst in die Mitte des Telefonbuchs und fragt, ob der ausgewählte Anschluss vor oder nach der Mitte liegt. Damit kommen nur noch ca. 125.000 Anschlüsse in Frage! Dann halbiert sie die angezeigte Hälfte wieder usw.

**Telefonbuch – Kommentar:**

Hier lohnt sich eine Durchführung mit der Lerngruppe auf jeden Fall!

Man kann z.B. ein Mathematikbuch nehmen und eine Aufgabe auf irgendeiner Seite auswählen. Wenn das Buch 200 Seiten hat und auf jeder Seite fünf Aufgaben stehen, kommt man mit 10 Fragen aus.

**\*\*Viele Teiler:**Wie lautet die kleinste Zahl, die durch 2; 3; 4; 5; 6; und 7 teilbar ist?

**Viele Teiler – Lösung:**   
2 · 3 · 4 · 5 · 6 · 7 = 5040 ist zu groß. 3 · 4 · 5 · 7 = 420 ist „automatisch“ auch 2 und 6 teilbar.

**\*Viereck 1:**

Alle vier Seiten eines Vierecks sind gleich lang, es ist aber kein Quadrat. Kann das sein?

**Viereck 1 - Lösung:**   
Ja, es ist eine Raute.

**\*Viereck 2:**

Die gegenüber liegenden Seiten eines Vierecks sind parallel, es ist aber kein Rechteck. Kann das sein?

**Viereck 2 - Lösung:**   
Ja, es ist ein Parallelogramm.

|  |  |
| --- | --- |
| **\*Viereck 3:**  Zeichne ein Viereck, das sich mit einem geraden Schnitt in drei Dreiecke zerteilen lässt.  **Viereck 3 – Lösung:**  Vgl. Abbildung rechts: ein Viereck mit einspringender Ecke, ohne die geht’s nicht |  |

**\*Vier Töchter:**

Eine Mutter hat 4 Töchter. Jede Tochter hat einen Bruder. Wie viele Kinder hat die Mutter insgesamt?

**Vier Töchter - Lösung:**

Die Mutter hat fünf Kinder, nämlich vier Töchter und einen Sohn (!).

**\*\*Waageproblem 1**:   
Auf einem Tisch liegen 10 Stapel zu jeweils 10 Schokoladentafeln. Alle Tafeln wiegen 100 g mit Ausnahme der Tafeln eines einzigen Stapels, die jeweils 110 g wiegen.

Wie kann man durch eine einzige Wägung mit einer Anzeigen-Waage den Stapel mit den besonderen Tafeln sicher herausfinden?

**Waageproblem 1 – Lösung:**

Man nimmt vom 1. Stapel 1 Tafel, vom 2. Stapel 2 Tafeln usw. und legt alle 55 Tafeln zusammen auf die Waage. Würden alle Tafeln 100 g wiegen, wäre die Anzeige 5500 g.

Wenn die Anzeige 5510 g lautet, dann sind die 110 g- Tafeln im 1. Stapel, denn auf der Waage liegt eine davon.

Wenn die Anzeige 5520 g lautet, dann sind die 110 g-Tafeln im 2. Stapel, denn auf der Waage liegen zwei davon usw.

**\*\*\*Waageproblem 2**:   
Auf einem Tisch liegen 5 Stapel zu jeweils 20 Schokoladentafeln. Alle Tafeln in einem Stapel sind gleich schwer, sie wiegen 100 g oder 110 g.

Wie kann man durch eine einzige Wägung mit einer Anzeigen-Waage herausfinden, welche Stapel Tafeln mit 100 g und welche Stapel Tafeln mit 110 g enthalten?

**Waageproblem 2 – Lösung:**

Man nimmt vom 1. Stapel 1 Tafel, vom 2. Stapel 2 Tafeln, vom 3. Stapel 4 Tafeln, vom 4. Stapel 8 Tafeln und vom 5. Stapel 16 Tafeln und legt alle 31 Tafeln zusammen auf die Waage.

Würden alle Tafeln 100 g wiegen, wäre die Anzeige 3100 g.

Wenn die Anzeige 3110 g lautet, dann sind nur im 1. Stapel 110 g-Tafeln.

Wenn die Anzeige 3120 g lautet, dann sind nur im 2. Stapel 110 g-Tafeln.

Wenn die Anzeige 3130 g lautet, dann sind nur im 1. Stapel und 2. Stapel 110 g-Tafeln.

Wenn die Anzeige 3140 g lautet, dann sind nur im 3. Stapel 110 g-Tafeln.

…

Wenn die Anzeige 3200 g lautet, dann sind nur im 2. Stapel und 4. Stapel 110 g-Tafeln.

…

Wenn die Anzeige 3310 g lautet, dann sind nur im 1. Stapel, 3. Stapel und 5. Stapel 110 g-Tafeln.

…

Wenn die Anzeige 3410 g lautet, dann sind in allen fünf Stapeln 110 g-Tafeln.

**Waageproblem 2 – Kommentar:**   
Die Lösung vom Waageproblem 1 funktioniert nicht, man kann aber durch sukzessives Probieren auf die richtige Lösung kommen. Die ist ja ganz schön „tricky“ ☺.

**\*\*Waageproblem 3**:   
Von neun äußerlich gleichen Kugeln K1, K2 … K9 ist genau eine schwerer als die acht andern. Diese soll sicher durch zwei Wägungen mit einer Balkenwaage gefunden werden.

**Waageproblem 3 – Lösung:**

Lege K1, K2 und K3 auf die linke Seite der Balkenwaage, lege K4, K5 und K6 auf die rechte Seite. Jetzt gibt es drei Möglichkeiten:

- Links schwerer: die gesuchte Kugel ist K1, K2 oder K3 🡪 zweite Wägung: links K1, rechts K2 🡪 bei Gleichgewicht ist K3 die gesuchte Kugel

- Rechts schwerer: die gesuchte Kugel ist K4, K5 oder K6 🡪 zweite Wägung: links K4, rechts K5 🡪 bei Gleichgewicht ist K6 die gesuchte Kugel

- Gleichgewicht: die gesuchte Kugel ist K7, K8 oder K9 🡪 zweite Wägung: links K7, rechts K8 🡪 bei Gleichgewicht ist K9 die gesuchte Kugel

**Waageproblem 3 – Kommentar:**

Man muss sich von der Idee verabschieden, die gesuchte Kugel eventuell schon nach dem ersten Wägen benennen zu können. Hier geht es strategisch gesehen um ein schrittweises Eingrenzen der Lösung.

**\*\*Wassergraben:**

Ein Schloss steht auf einer Wiese mit quadratischem Grundriss und ist von einem Wassergraben umgeben, dessen Außenbegrenzung ebenfalls quadratisch ist. Der Graben ist gleichermaßen 3 m breit.  
Ein Ritter möchte zu seiner Liebsten, aber die Brücke ist hochgezogen. Er findet zwei tragfähige Balken, die 3 m lang sind. Kann er sich helfen?

**Wassergraben – Lösung:**   
Er legt einen Balken über eine Ecke und auf diesen im rechten Winkel dann den zweiten hin zur Ecke der Wiese. Dass es reicht zeigt z.B. eine maßstäbliche Zeichnung.

**\*\*Wolf-Ziege-Kohlkopf:**   
Ein Fährmann hat eine Ziege, einen Wolf und einen Kohlkopf. Er möchte alle drei und sich selbst über den Fluss bringen, kann aber nur immer eins von den dreien auf der Fähre mitnehmen. Das Problem ist: Wenn er nicht dabei ist, wird die Ziege den Kohlkopf oder der Wolf die Ziege fressen!

Wie stellt er es an, dass das nicht passiert?

**Wolf-Ziege-Kohlkopf - Lösung:**

Zuerst nimmt der Fährmann die Ziege mit ans andere Ufer und fährt allein wieder zurück. Dann fährt er mit dem Wolf ans andere Ufer und nimmt die Ziege wieder mit zurück. Danach fährt er den Kohlkopf ans andere Ufer und fährt allein zurück. Zum Schluss fährt er mit der Ziege ans andere Ufer.

**Wolf-Ziege-Kohlkopf - Kommentar:**Strategie: Vorwärtsarbeiten – weiterführende Feststellungen treffen, z.B. diese: nur den Wolf und den Kohlkopf kann er zusammen allein lassen!

Dass der Fährmann die Ziege einmal mit zurück nimmt, ist der kontraintuitive Clou an diesem Rätselklassiker und eine psychologische Gedankenhürde.

**\*Würfel:** (Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)  
27 gleiche Würfel werden zu einem großen Würfel zusammengesetzt. Der große Würfel wird außen rot angemalt.

a) Wie viele der 27 kleinen Würfel sind zu 50% rot angemalt?

b) Welcher Anteil der Würfel hat zwei rote Quadrate?

c) Gibt einen gänzlich unbemalten Würfel?

**Würfel – Lösungen:**   
a) 8 Würfel

b) 12/27 = 4/9

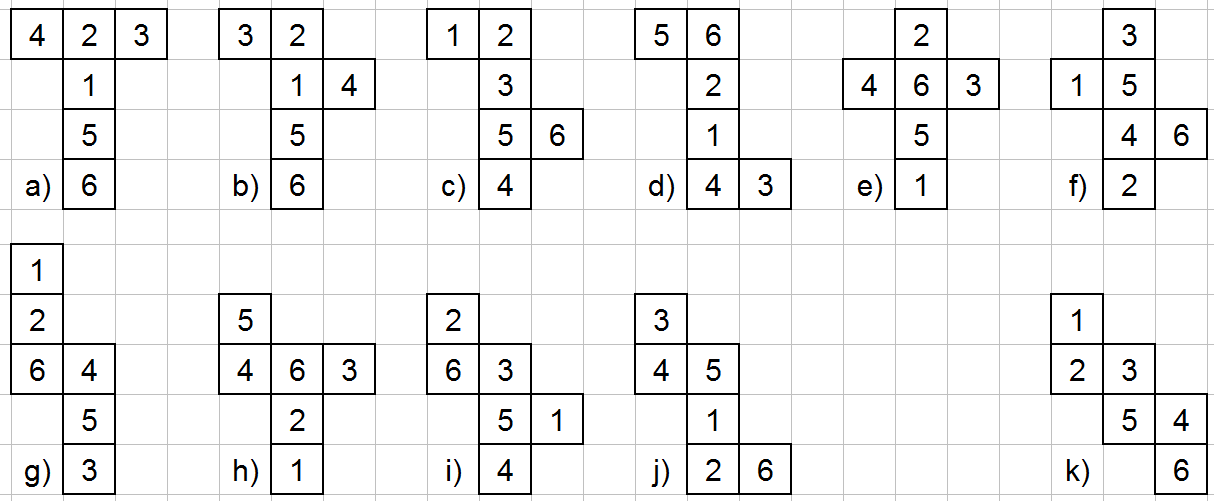
c) Ja, einen, der in der Mitte.

**Würfel – Kommentar:**

Schülerinnen und Schüler können weitere solche Aufgaben erfinden, ggf. auch an einem 4 x 4 x 4-Würfel.

**\*Würfelnetze:**

Bei Spielwürfeln müssen gegenüberliegenden Ziffern zusammen immer 7 ergeben. Prüfe, ob die Würfelnetze korrekt beschriftet sind.



**\*Würfelnetze – Lösungen:**

a); b); c); e); f); g); h) und i) sind korrekt beschriftet, d); j) und k) nicht.

|  |  |
| --- | --- |
| **\*\*Zeichnerisches Multiplizieren:**  Wie löst man die Multiplikationsaufgabe 32 · 14 durch eine Zeichnung, ohne das „kleine Einmal-Eins“?  Wir betrachten die Abbildung rechts.  Man zeichnet die Zahl 32 so:  3 dicke Parallelen und 2 dünne Parallelen in einigem Abstand davon von links oben nach rechts unten.  Man zeichnet die Zahl 14 so:  1 dicke Gerade und 4 dünne Parallelen in einigem Abstand davon von rechts oben nach links unten. |  |

Jetzt zählt man die Schnittpunkte:

8 Schnittpunkte bei „dünn-dünn“ 🡪 **8 Einer**

12 + 2 = 14 = 10 + 4 Schnittpunkte bei „dünn-dick“ bzw. „dick-dünn“ 🡪 **4 Zehner** und 1 Übertrag

3 Schnittpunkte bei „dick-dick“ + 1 Übertrag 🡪 **4 Hunderter**

Ergebnis: 32 · 14 = **448**

a) Führe dieses Verfahren durch für 45 · 23.

b) Gelingt dies auch für 123 · 45?

c) Oder sogar für 234 · 345?

d) Vergleiche mit dem Verfahren der schriftlichen Multiplikation.

**Zeichnerisches Multiplizieren – Lösung:**a) 1035

b) 5535

c) 80730

|  |  |
| --- | --- |
| d) Es ist genau dasselbe wie bei der schriftlichen Staffelrechnung  3 Zehner mal 4 Einer ergibt 12 Zehner, das sind 2 Zehner und 1 Hunderter, 3 Zehner mal 1 Zehner ergibt 3 Hunderter, zusammen sind es also **4 H**underter, 2 Einer mal 4 Einer ergibt **8 E**iner und 2 Einer mal 1 Zehner ergibt 2 Zehner, zusammen also **4 Z**ehner.  Anstelle des Abzählens, wie viele Punkte die „Rechtecke“ enthalten, kann man natürlich das „kleine Einmal-Eins“ verwenden. | HZE  14·32  -----  42  28  -----  448 |

**Zeichnerisches Multiplizieren – Kommentar:**Man kann (mit weiteren Beispielen, bitte nicht mehr als dreistellige Faktoren) eine Doppelstunde mit diesem Thema füllen, wenn man möchte ☺. Anstelle von dünnen und dicken Strichen wird man – insbesondere bei dreistelligen Faktoren – mit Farben arbeiten. Hier muss man schauen, dass man den Überblick über die Bedeutung der einzelnen „Rechtecke“ (Einer? Zehner? Hunderter? usw.) nicht verliert. Wenn der Überblick gesichert ist, dann ist es unerheblich, ob man auf kariertem Papier und mit dem Geodreieck arbeitet oder auf Konzeptpapier frei Hand.

**\*\*Zerlegung 1:**

Die Summe der vier Zahlen a, b, c und d ergibt 33.

Die Summe 33 ergibt sich auch, wenn man a um 3 vermindert, b um 3 vermehrt, c mit 3 multipliziert und d durch 3 teilt. Welche Zahlen könnten a, b, c und d sein?

**Zerlegung 1 – Lösung:**   
Wegen a + b + c + d = (a + 3) + (b – 3) + 3·c + d:3 gibt es gibt viele Lösungen, es muss nur a + b + c + d = 33 und d = 3 · c sein. Also z.B.: 8 + 9 + 4 + 12.

**\*\*Zerlegung 2:**   
Die Summe der vier natürlichen Zahlen a, b, c und d ergibt 55. Alle vier Zahlen sind kleiner als 20. Die Summe 55 ergibt sich auch, wenn man a um 5 vermindert, b um 5 vermehrt, c mit 5 multipliziert und d durch 5 teilt. Bestimme a, b, c und d.

**Zerlegung 2 – Lösung:**

Wegen a + b + c + d = (a + 5) + (b – 5) + 5·c + d:5

muss a + b + c + d = 55 und d = 5 · c sein. Für Zahlen zwischen 1 und 19 bleibt nur 18 + 19 + 3 + 15.

**\*\*Zwei Liter:**

Ein Würfel mit der Kantenlänge 10 cm hat das Volumen von genau 1 Liter (= 1000 cm3).

a) Welches Volumen bekommt man bei einer Kantenlänge von 20 cm?

b) Wie viele ganze cm müsste die Kantenlänge für das Volumen von etwa 2 Litern etwa sein?

**Zwei Liter – Lösung:**

a) Damit bekommt man 8 Liter (= 8000 cm3).

b) Nur 12 cm oder 13 cm (1,7 Liter oder 2,2 Liter)

**Zwei Liter – Kommentar:**

Zu a) Oder in der Veranschaulichung („Kopfgeometrie“): Wie viele 10 cm-Würfel passen in einen 20 cm-Würfel? Einer links vorne unten, einer rechts vorne unten, …

Zu b) Das ist schon bemerkenswert. Die Verlängerung der Kantenlänge um (nur) 26% bewirkt eine Verdopplung des Volumens.

|  |  |
| --- | --- |
| **\*\*\*\*Zwei Teile:**  In der Abbildung rechts ist ABCD ein Quadrat, E liegt auf der Geraden DC und der Kreisbogen DE gehört zum Kreis mit dem Mittelpunkt B und dem Radius BD.  Teile das Flächenstück ABCED durch zwei gerade Schnitte in zwei zusammenhängende deckungsgleiche Teile auf – auch wenn das auf den ersten Blick unmöglich erscheint.  **Zwei Teile – Lösung:**  Die Lösung ist unten in sehr kleiner Schrift abgedruckt, damit man wirklich in Ruhe knobeln kann.  Der Punkt F sei die Mitte des Bogens DE. Fälle das Lot von F auf die Strecke BD, der Lotfußpunkt sei G. BG und FG sind die beiden gesuchten geraden Schnitte.  Oder so: Dreht man den Streckenzug BAD um B um 90°, so erhält man den Streckenzug BCE, bei dieser Drehung wird die Figur insgesamt überstrichen.  Dreht man nur um 45°, so teilt der Streckenzug die Figur in zwei kongruente Teile. |  |

**\*\*Zwei-Würfel-Wurf:**   
Bei den Spielen Monopoly oder Siedler von Catan werfen die Spielerinnen bzw. Spieler zwei Würfel, zum Beispiel einen roten und einen blauen, und bilden die Summe der beiden Augenzahlen.

a) Welche Augensumme kommt am seltensten vor?

b) Welche Augensumme kommt am häufigsten vor?

c) Wie viel mal so häufig kommt die häufigste Augensumme vor wie die Seltenste?

**Zwei-Würfel-Wurf – Lösung:**a) Die Augensumme 2 (nur eine Möglichkeit: 1+1) und die Augensumme 12 (nur eine Möglichkeit: 6+6) kommen am seltensten vor.

b) Die Augensumme 7 kommt am häufigsten vor (sechs Möglichkeiten: 1+6;2+5;3+4;4+3;5+2;6+1)

c) Die Augensumme 7 kommt sechsmal (!) so häufig vor wie die Augensumme 2 oder 12.

**Zwei-Würfel-Wurf – Kommentar:  
I**n der Aufgabenstellung wurde absichtlich ein roter und ein blauer Würfel eingeführt, um die beiden Fälle 1+6 und 6+1 usw. gut unterscheiden zu können.

**\*Zylinder:**Was erhält man, wenn man den Mantel eines Zylinders (Mantel = Oberfläche ohne Boden und Deckel) aufschneidet?

**Zylinder – Lösung:**   
Man erhält ein Rechteck. Wenn man „schräg“ schneidet erhält man ein Parallelogramm.

Vorausgesetzt natürlich, dass man mit der Schere nicht „wackelt“.