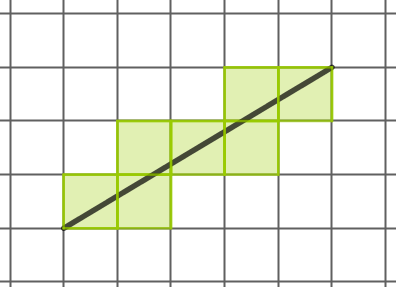
**Infoblatt**

**Sachanalyse**

****Unter einer *a-b-Strecke* soll hier das Folgende verstanden werden:

Zu einem beliebigen Punkt auf dem Gitter („Anfangspunkt“) bestimmt man denjenigen Punkt („Endpunkt“) , der a Einheiten („Karos“) weiter rechts und b Einheiten („Karos“) höher liegt.

a und b sind natürliche Zahlen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei a ≥ b.

Die a-b-Strecke ist dann die Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte.

Die im Bild gezeigte 5-3-Strecke durchquert 7 Karos des Gitters.

Wie kann man für eine beliebige a-b-Strecke die Anzahl d der Karos berechnen, die durchquert werden?

Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, dass a und b *teilerfremd* sind, der größte gemeinsame Teiler von a und b also 1 ist, kurz: ggT(a,b) = 1. Das bedeutet, dass die Strecke – außer Anfangs- und Endpunkt – keine Gitterpunkte enthält. Denn: Gäbe es einen Gitterpunkt im Innern der Strecke, der vom Anfangspunkt aus gesehen a' Einheiten weiter rechts und b' Einheiten höher liegt, wäre a'/b' = a/b wegen derselben Steigung der a-b-Strecke und der a'-b'-Strecke im Widerspruch zur Voraussetzung.

Man betrachte die Entwicklung der Anzahl der Karos beim Zeichnen der Strecke. Beim Erreichen der ersten Gitterlinie hat man 1 Karo durchquert. Das Überqueren einer Gitterlinie erhöht die Anzahl der durchquerten Karos d um 1. Wie viele Gitterlinien werden überquert? Es werden a – 1 senkrechte und b – 1 waagerechte Gitterlinien überquert.

Insgesamt sind es also d(a,b) = 1 + (a – 1) + (b – 1) = a + b – 1 durchquerte Karos.

Sie nun ggT(a,b) > 1. Die Anzahl der überquerten Gitterpunkte im Innern der Strecke ist ggT(a,b) – 1. Beim Überqueren eines Gitterpunktes wird gleichzeitig eine senkrechte und eine waagerechte Gitterlinie überquert. In der Zählung nach Gitterlinien ist also für jeden Gitterpunkt die Anzahl um 1 zu reduzieren.

Insgesamt sind es also **d(a,b)** = 1 + (a – 1) + (b – 1) – (ggT(a,b) – 1) = **a + b – ggT(a,b) durchquerte Karos**.

In diesem Ergebnis ist der oben abgehandelte einfache Fall mit enthalten.

**Didaktische Bemerkungen**

Dies ist ein echter Forschungsauftrag nach dem Muster *aus Beispielen eine Vermutung generieren*.

Ein Bild, das Schreibgerät, Briefpapier, Bleistift enthält.

Automatisch generierte BeschreibungBeim Zeichnen von a-b-Strecken auf kariertem Papier durch die Schülerinnen und Schüler ist der Hinweis auf die Arbeit mit einem gespitzten (!) Bleistift unerlässlich.

Man wird beim Ausfüllen der Tabelle sinnvollerweise arbeitsteilig vorgehen. Vor den Überlegungen zu dem Zusammenhang zwischen a, b und d muss die Tabelle vollständig und korrekt ausgefüllt sein.

(Bild zur Wiederverwendung mit Veränderung gekennzeichnet: https://www.flickr.com/photos/foto\_db/25501721655/)

|  |  |
| --- | --- |
| a | 1 |
| b | 1 |
| d | 1 |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a | 2 | 2 |
| b | 1 | 2 |
| d | 2 | 2 |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| a | 3 | 3 | 3 |
| b | 1 | 2 | 3 |
| d | 3 | 4 | 3 |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a | 4 | 4 | 4 | 4 |
| b | 1 | 2 | 3 | 4 |
| d | 4 | 4 | 6 | 4 |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| d | 5 | 6 | 7 | 8 | 5 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| d | 6 | 6 | 6 | 8 | 10 | 6 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| d | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 7 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| d | 8 | 8 | 10 | 8 | 12 | 12 | 14 | 8 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| d | 9 | 10 | 9 | 12 | 13 | 12 | 15 | 16 | 9 |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| d | 10 | 10 | 12 | 12 | 10 | 14 | 16 | 16 | 18 | 10 |

Zunächst werden die Schülerinnen und Schüler Teilergebnisse feststellen können, die offensichtlich allgemein zutreffen:

* Wenn a = b ist, dann ist d(a,b) = a.
* Wenn b = 1 ist, dann ist d(a,1) = a.

Stärkere Aussagen könnte man – ohne Begründung – vermuten (von den Schülerinnen und Schüler auch gerne in Prosa, z.B. „Wenn b um 1 kleiner ist als a, dann ist d um 1 kleiner als a + b):

* Wenn b = 2 ist und a gerade, dann ist d(a,2) = a.
* Wenn b = 2 ist und a ungerade, dann ist d(a,2) = a + 1.
* Wenn b = a – 1 ist, dann ist d(a,a-1) = a + b – 1 = 2∙a – 2.
* Wenn b die Hälfte von a (a gerade) ist, dann ist d(a,a/2) = a.
* Wenn b ein Teiler von a ist, dann ist d(a,b) = a.

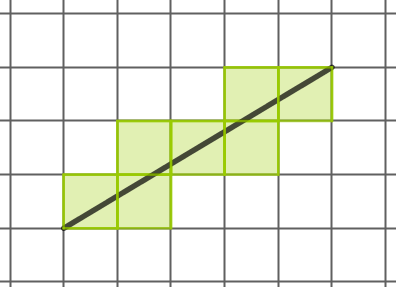
Abschließend wird die Lehrkraft etwas lenken müssen und den ggT ins Spiel bringen z.B. mit dem Impuls „Was lässt sich vermuten, wenn a und b keinen gemeinsamen Teiler haben, wenn also ggT(a,b) = 1 ist?“

Beispiele: d(4,3) = 6; d(5,2) = 6; d(5,3) = 7; d(6,5) = 10; d(7,5) = 11; d(10,3) = 12; d(10,7) = 16

* Wenn ggT(a,b) = 1 ist, dann ist d(a,b) = a + b – 1.

Betrachtet man zusätzlich zu a und b sowie d(a,b) den ggT(a,b) (Tipp: mit einer Farbe in der zugehörigen Spalte dazu schreiben), so liegt die Vermutung für den allgemeinen Fall nicht mehr fern.

Wichtig: Dass die Vermutung tatsächlich zutrifft, muss die Lehrkraft beisteuern. An eine Erarbeitung der Begründung für die nicht offensichtlichen Sachverhalte ist nicht gedacht.

****Die im Bild gezeigte 5-3-Strecke

(der Endpunkt liegt 5 Karos weiter rechts und 3 Karos höher) durchquert 7 Karos des Gitters.

Wie kann man für eine beliebige a-b-Strecke (a ≥ b) die Anzahl d der Karos berechnen, die durchquert werden?

Finde für möglichst viele Kombinationen von a und b einen Zusammenhang mit d.

………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………….



|  |  |
| --- | --- |
| a | 1 |
| b | 1 |
| d |  |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| a | 2 | 2 |
| b | 1 | 2 |
| d |  |  |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| a | 3 | 3 | 3 |
| b | 1 | 2 | 3 |
| d |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a | 4 | 4 | 4 | 4 |
| b | 1 | 2 | 3 | 4 |
| d |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 |
| b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| d |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 |
| b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| d |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 | 7 |
| b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| d |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 | 8 |
| b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| d |  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 | 9 |
| b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| d |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| a | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 | 10 |
| b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| d |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

**Verlaufsplan**

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer

EA … Einzelarbeit PA … Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung! Je nach der zur Verfügung stehenden Zeit kann die Lehrkraft mehr oder weniger lenken, bzw. auch Eintragungen der Tabelle vorgeben.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Phase / Zeit** | **L / SuS** | **Medien** |
|  |  |  |
| **1. Erarbei­tung I**  FEU 25 Min. | L stellt das Thema *durchquerte Karos* am Beispiel der  5-3-Strecke vor. Die Schreibweise wird geklärt, auch unter Verwendung der Variablen a und b: *a-b-Strecke*.  Die Tabelle wird bei arbeitsteiligem Vorgehen ausgefüllt.  L weist auf Notwendigkeit eines gespitzten Bleistiftes hin beim Eintrag der Strecke.  L klärt die Fragestellung  *Wie kann man für eine beliebige a-b-Strecke (a ≥ b) die Anzahl d der Karos berechnen, die durchquert werden?*  und leitet hin auf das Teilergebnis *Wenn a gleich b ist, dann ist d = a.* (Notation von d ohne Argumente, diese ergeben sich aus dem Zusammenhang). | Tafel o.ä.  Arbeits­blatt  ein Blatt kariertes Papier |
| **2. Erarbeitung II**  EA / PA 15 Min. | SuS produzieren aufgrund der korrekt ausgefüllten Tabelle Vermutungen über Zusammenhänge und notieren diese.  L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend und kontrolliert die Richtigkeit der Einträge.  Sus kommen bis zu der Vermutung  *Wenn b ein Teiler von a ist, dann ist d = a.*  L gibt ggf. dazu einen Tipp. | Arbeits­blatt  ein Blatt kariertes Papier |
| **3. Erarbeitung III**  FEU 15 Min. | L bringt den ggT ins Spiel (Notation von ggT ohne Argumente, diese ergeben sich aus dem Zusammenhang) mit den Impulsen:  1) „Was lässt sich vermuten, wenn a und b keinen gemeinsamen Teiler haben, wenn also ggT = 1 ist?“  SuS ziehen die zugehörigen Beispiele  (d(4,3); d(5,3); d(6,5); d(7,5); d(8,3); d(9,4); d(10,7))  heran und erkennen:  *Wenn der ggT = 1 ist, dann ist d = a + b – 1.*  2) „Was lässt sich vermuten, wenn a und b einen gemeinsamen Teiler haben, wenn also ggT > 1 ist?“  SuS ziehen die zugehörigen Beispiele heran  (d(6,4); d(8,6), d(9,6); d(10,4); d(10,6); d(10,8)).  🡪 SuS schreiben den ggT jeweils mit einer Farbe in der zugehörigen Spalte dazu und erkennen:  *Wenn ggT > 1 ist, dann ist d = a + b – ggT.*  L erläutert, dass damit auch der Fall ggT = 1 abgedeckt ist. | Tafel o.ä.  Arbeits­blatt  ein Blatt kariertes Papier |