**Infoblatt**

**Sachanalyse:**

**Satz:** Die Anzahl der Möglichkeiten, n Objekte anzuordnen, ist n! := 1 · 2 · 3 · … · n (lies: „n Fakultät“).

**Beweis** durch vollständige Induktion:

Induktionsanfang: n = 1: die Anzahl der Möglichkeiten 1 Objekt anzuordnen ist 1.

Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für n = k. Zu zeigen ist jetzt, dass sie dann auch für n = k + 1 gilt.

Es kommt ein weiteres Objekt hinzu. Wo kann man es platzieren?

Bei jeder der k! Anordnungen ist das an den beiden Rändern und in den k – 1 Zwischenräumen möglich. Das sind für jede der k! Anordnungen k + 1 Möglichkeiten,   
insgesamt sind es also k! · (k + 1) = (k + 1)! Möglichkeiten.

**Relevanz:**

Die Grundzüge der Kombinatorik gehören unseres Erachtens zur Allgemeinbildung.

**Didaktische Bemerkungen:**

Kombinatorik gilt als allgemein schwierig. Immerhin kann man für kleine Zahlen (hier: n = 1; 2; 3; 4) *alle Möglichkeiten aufschreiben, daran lernen und Prinzipielles erkennen*. Das ist grundsätzlich eine wichtige Strategie, ebenso der rekursive Ansatz (s.u.). Wie folgt aus dem Fall n = 3 der Fall n = 4?

Ein Paradigma für die Anzahl der Reihungen ist die Anzahl möglicher Aufstellungen beim Familien-Foto. Man könnte den obigen Satz deshalb auch die „Foto-Regel“ nennen.

Interessant ist dabei, dass die Anzahl möglicher Reihungen beim Aufstellen sehr schnell wächst mit der Anzahl der zu fotografierenden Personen.

**Hinführung zur Foto-Regel:**

**1 Person**: A A

🡪 **1 mögliche Reihenfolge**

**2 Personen** A; B AB oder BA

🡪 **1 ∙** **2 mögliche Reihenfolgen**

**3 Personen** A; B und C: CAB CBA … C am linken Rand

ACB BCA … C in der Mitte

ABC BAC … C am rechten Rand

Zu AB und BA wird C an jede der 3 möglichen Positionen hinzugefügt.

🡪 **1 ∙ 2 · 3 = 6 mögliche Reihenfolgen**

**4 Personen** A; B; C und D: DCAB DACB DABC DCBA DBCA DBAC … D am linken Rand

CDAB ADCB ADBC CDBA BDCA BDAC … D links der Mitte

CADB ACDB ABDC CBDA BCDA BADC … D rechts der Mitte

CABD ACBD ABCD CBAD BCAD BACD … D am rechten Rand

Zu CAB; ACB; ABC; CBA; BCA und BAC wird D an jeder der 4 möglichen Positionen hinzugefügt.

🡪 **1 ∙ 2 · 3 · 4 = 24 mögliche Reihenfolgen**

n! (ein interessantes Zeichen 😊, lies: „n Fakultät“) ist eine abkürzende Schreibweise: 1 · 2 · 3 · 4 · … · n.

**Foto-Regel:** Für n Dinge oder Personen gibt es n! Möglichkeiten, sie in eine Reihenfolge zu bringen.

1.) Berechne: a) 5! b) 6! c) 10! : 8!

2.) Schreibe als eine Fakultät: a) 9 · 8! b) 11! : 11 c) 3! + 3! + 3! + 3!

Ein Bild, das Person, Foto, Tennis, darstellend enthält.

Automatisch generierte Beschreibung

3.) Familie Schmidt stellt sich zum Familienfoto in einer Reihe auf: Vater Emil, Mutter Anne, Kinder Thomas, Sophie und Christiane. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

4.) Familie Schmidt stellt sich wieder zum Familienfoto in einer Reihe auf:

Vater Emil, Mutter Anne, Kinder Thomas, Sophie und Christiane. Alle sagen, der Vater sollte auf jeden Fall in der Mitte stehen.

Fertige eine kleine Skizze an und berechne, wie viele Möglichkeiten es jetzt gibt.

(Bild rechts aus https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Aenne\_Burda\_Family\_Photo\_1.jpg ist zur Wiederverwendung gekennzeichnet)

5.) Familie Schmidt stellt sich wieder zum Familienfoto in einer Reihe auf:

Vater Emil, Mutter Anne, Kinder Thomas, Sophie und Christiane und Oma und Opa.

Opa und Oma sollen auf jeden Fall an beiden Rändern stehen.

Fertige eine kleine Skizze an und berechne, wie viele Möglichkeiten es gibt.

6.) Wie viele „Wörter“ kann MERT durch Umsortieren der vier Buchstaben seines Namens bilden, also z.B. TREM, REMT oder TERM?

**Verlaufsplan**

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer

EA … Einzelarbeit PA … Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung! Je nach zur Verfügung stehender Zeit wird man noch eine Knobelaufgabe aus der Knobelaufgaben-Sammlung einschieben.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Phase / Zeit** | **L / SuS** | **Medien** |
| **1. Erarbeitung**  FEU 20 Min. | L stellt eine Schätzfrage und damit das Thema vor:  *5 Personen sollen sich zu einem Gruppenfoto in einer Reihe aufstellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?*  SuS schätzen. Die Schätzungen werden festgehalten, wer gewinnt, bekommt nach der Auflösung einen kleinen Preis.  Erfahrungsgemäß wird die tatsächliche Anzahl unterschätzt. Bei n = 3 überblickt man die Anzahl (=6) evtl. noch, für n = 5 hat man schon das 20-fache an möglichen Reihenfolgen (=120).  Für n = 30 (eine Schulklasse) ist die Anzahl der möglichen Reihenfolgen schon extrem groß: 265 Quintillionen  30! 265.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000  L führt zur Foto-Regel hin (vgl. Infoblatt) und dokumentiert geeignet.  Für die Performance: 3 SuS stellen sich in den 6 Reihenfolgen auf, diese werden fotografiert ☺.  L lässt die SuS erklären, wie der Fall n = 5 aus dem Fall n = 4 hergeleitet werden kann. Daran wird ersichtlich, ob die SuS das Argumentations-Prinzip verstanden haben.  L weist auf die beiden Strategien hin:  - *An überschaubaren Verhältnissen lernen*  - *Wie folgt ein Fall aus dem vorherigen Fall?* (Rekursion) | Tafel, Heft  SuS fotografieren die sechs Möglichkeiten |
| **2. Übung**  EA / PA 20 Min. | L lobt, aber beobachtet und berät zurückhaltend.  Lösungen:  1a) 1 ∙ 2 ∙ 3 ∙ 4 ∙ 5 = 120  b) 6! = 5! ∙ 6 = 120 ∙ 6 = 720 (Rekursion!)  c) 9 ∙ 10 = 90 (zuerst kürzen!)  2a) 9 ∙ 8! = 9 ∙ 8 ∙ 7 ∙ 6 ∙ 5 ∙ 4 ∙ 3 ∙ 2 ∙ 1 = 9!  b) 11 ∙ 10 ∙ 9 ∙ 8 ∙ 7 ∙ 6 ∙ 5 ∙ 4 ∙ 3 ∙ 2 ∙ 1 : 11 = 10!  c) 4 ∙ 3! = 4 ∙ 3 ∙ 2 ∙ 1 = 4!  3.) 5! = 120 (Fünf Personen in eine Reihenfolge bringen.)  4.) 4! = 24 (Der Vater in der Mitte ist „fest“, also muss man nur noch vier Personen in eine Reihenfolge bringen.)  5.) 2 · 5! = 240 (Opa links und Oma rechts oder umgekehrt sind „fest“, also muss man für diese beiden Fälle noch fünf Personen in eine Reihenfolge bringen.)  6.) 4! – 1 = 24 – 1= 23 (Vier verschiedene Buchstaben in eine Reihenfolge bringen, ohne die Reihenfolge MERT, es wird ja „umsortiert“.) | Arbeitsblatt |
| **3. Besprechung**  FEU 5 Min. | Zu besprechen sind insbesondere die Aufgaben 4.), 5.) und 6.). | Arbeitsblatt |