**Infoblatt**

**Sachanalyse:**

**Satz:** Die Anzahl der Möglichkeiten aus n Objekten k Stück auszuwählen ist

 ().

Die Zahlen  (lies: „n über k“) heißen Binomialkoeffizienten.

**Beweis:**

Man denke sich die k Objekte zunächst der Reihe nach ausgewählt.

Für das 1. Objekt gibt es n Möglichkeiten, zu jeder dieser n Möglichkeiten gibt es

für das 2. Objekt dann noch n–1 Möglichkeiten; zu jeder dieser insgesamt n· (n–1) Möglichkeiten gibt es

für das 3. Objekt dann noch n–2 Möglichkeiten …;

für das (k-1). Objekt dann noch n-k+2 Möglichkeiten, zu jeder dieser n · (n–1) · … · (n-k+2) Möglichkeiten gibt es für das k. Objekt noch n–k+1 Möglichkeiten.

Es gibt insgesamt also n · (n-1) · … · (n–k+1) Reihen von k aus n Objekten.

Jeweils k! davon unterscheiden sich bezüglich der ausgewählten Objekte nicht, sondern nur durch deren Reihenfolge.   
Ist die Reihenfolge unerheblich, so ergibt sich die betreffende Anzahl, indem man durch k! dividiert. ▪

**Relevanz:**

Die Grundzüge der Kombinatorik gehören unseres Erachtens zur Allgemeinbildung.

**Didaktische Reduktion:**

Die allgemeine Formel wird nicht zwingend angestrebt – sie wird als Puffer-Kür-Aufgabe verwendet.

An zwei Musterbeispielen (s.u.) wird nur der grundsätzliche Gedankengang mit den zwei Schritten vorgestellt und dieser in den Aufgaben beispielgebunden variiert und vorsichtig „ausgeweitet“.

**Musterbeispiele:**

1.) Aus 5 Personen A, B, C, D und E soll eine 2er-Gruppe gebildet werden.

Wie viele unterschiedliche 2er-Gruppen sind möglich?

1. Schritt: **Anzahl der Reihen**

AB AC AD AE BA BC BD BE CA CB CD CE DA DB DC DE EA EB EC ED

1.Person: 5 Möglichkeiten, 2. Person: jeweils noch 4 Möglichkeiten 🡪 Anzahl der 2er-Reihen: 5 · 4 = **20**

2. Schritt: **Anzahl der Gruppen**

Je 2! = 2 2er-Reihen sind dieselbe Gruppe 🡪 Anzahl der 2er-Gruppen: (5 · 4) : 2! = **10**, Probe (zählen):

AB AC AD AE BC BD BE CD CE DE

2.) Aus 6 Personen A, B, C, D, E und F soll eine 3er-Gruppe gebildet werden.

Wie viele unterschiedliche 3er-Gruppen sind möglich?

1. Schritt: **Anzahl der Reihen**

ABC ABD ABE ABF ACB … BAC … BCA … CAB … CBA …

1.Person: 6 Möglichkeiten, 2. Person: jeweils noch 5 Möglichkeiten,

3. Person: noch jeweils 4 Möglichkeiten 🡪 Anzahl der 3er-Reihen: 6 · 5 · 4 = **120**

2. Schritt: **Anzahl der Gruppen**

Je 3! = 6 3er-Reihen sind dieselbe Gruppe 🡪 Anzahl der 3er-Gruppen: (6 · 5 · 4) : 3! = **20**, Probe (zählen):

ABC ABD ABE ABF ACD ACE ACF ADE ADF AEF BCD BCE BCF BDE BDF BEF CDE CDF CEF DEF

1.) Aus 4 Personen A, B, C, und D soll eine 2-er Gruppe gebildet werden.

Wie viele unterschiedliche 2er-Gruppen sind möglich?

1. Schritt: Berechne zuerst die Anzahl der 2er-Reihen und mache anschließend die Probe, indem du alle möglichen 2er-Reihen aufschreibst und dann zählst.

………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

2. Schritt: Berechne jetzt die Anzahl der 2er-Gruppen und mache anschließend die Probe, indem du alle möglichen 2er-Gruppen aufschreibst und dann zählst.

………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

2.) Aus 8 Personen soll eine 4er-Gruppe gebildet werden.

Wie viele unterschiedliche 4er-Gruppen sind möglich?

Berechne zuerst die Anzahl der 4er-Reihen und daraus dann die Anzahl der 4er-Gruppen.

………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

3.) Löse ohne Rechnung: Aus 5 Personen A, B, C, D und E soll eine 4er-Gruppe gebildet werden. Wie viele unterschiedliche 4er-Gruppen sind möglich?

Schreibe zur Probe alle möglichen 4er-Gruppen auf und zähle sie.

………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

4a) 6 Personen stoßen mit ihren Gläsern an, jeder mit jedem. Wie oft ertönt ein Klang?

Mache die Probe, indem du alle Möglichkeiten aufschreibst und zählst.

………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

b) Bei einer Hochzeit stoßen 100 Gäste mit ihren Gläsern an, jeder mit jedem. Wie oft ertönt ein Klang?

………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

5.) Bei einem Hallenfußball-Turnier mit Tabellenwertung sollen alle 8 Mannschaften gegeneinander spielen. Wie viele Spiele sind das?

………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

6.) Bei Zahlenlotto „6 aus 49“ werden einer gläsernen Trommel mit 49 Kugeln (Nr. 1 bis Nr. 49) sechs Kugeln entnommen.



Ein Lotto-Tipp besteht aus der Angabe von sechs Zahlen zwischen 1 und 49, z.B. 4; 18; 21; 22; 32; 43.

Wie viele verschiedene Lotto-Tipps gibt es?

Berechne zuerst die Anzahl der 6er-Reihen und daraus dann die Anzahl der 6er-Gruppen (Taschenrechner).

………………………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………………………………………………….

**Verlaufsplan**

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer

EA … Einzelarbeit PA … Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit wird man noch eine Knobelaufgabe aus der Knobelaufgaben-Sammlung einschieben.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Phase / Zeit** | **L / SuS** | **Medien** |
| **1. Erarbeitung**  FEU 25 Min. | L stellt eine Schätzfrage und damit das Thema vor:  *Aus 6 Personen soll eine 3er-Gruppe gebildet werden.*  *Wie viele unterschiedliche 3er-Gruppen sind möglich?*  SuS schätzen, die Schätzungen werden festgehalten, die Gewinnerin bzw. der Gewinner bekommt nach der Auflösung einen kleinen Preis.  L stellt in Aussicht, dass SuS am Ende ausrechnen können, wie viele Lotto-Tipps es beim Lotto „6 aus 49“ gibt.  L entwickelt mit den SuS die beiden Musterbeispiele  – vgl. Infoblatt, Notation in geeigneter Kürze.  SuS schreiben dabei selbstständig die dargestellten Reihen und Gruppen systematisch (!) auf.  (Gruppen werden hier zur Unterscheidung von Reihen mit einem Rahmen o.ä. versehen, man könnte auch eine „Wolke“ malen und die Elemente ungeordnet hineinschreiben, es handelt sich bei diesen Hilfsbegriffen ja um eine didaktische Reduktion der Begriffe k-Tupel für Reihen bzw. k-Mengen für Gruppen.)  L weist auf die Strategie hin:  *An überschaubaren Verhältnissen lernen*  L motiviert die SuS: „Das ist eigentlich Stoff der Oberstufe“.  L gibt einen Hinweis für die Berechnung der Gruppen-Anzahlen: „Zuerst kürzen, dann erst ausrechnen!“ | Tafel, Heft |
| **2. Übung**  EA / PA 25 Min. | L lobt und beobachtet, aber berät zurückhaltend.  Lösungen:  1.) 4 · 3 = 12 2er-Reihen und 12 : 2! = 6 2er-Gruppen  2.) (8 · 7 · 6 · 5 ) : 4! = 7 · 2 · 5 = 70 4er-Gruppen  (zuerst kürzen!)  3.) Es sind 5 4er-Gruppen möglich – immer eine der 5 Personen auslassen! ABCD, ABCE, ABDE, ACDE, BCDE  4a) (6 · 5 ) : 2! = 15 Klänge  4b) (100 · 99 ) : 2! = 4950 Klänge  5.) (8 · 7) : 2! = 28 Spiele  6.) (49 · 48 · 47 · 46 · 45 · 44) : 6! = 13.983.816 Lotto-Tipps | Arbeitsblatt |
| **3. Puffer – Kür**  EA / PA 10 Min. | L: *Aus n Personen soll eine Gruppe mit k Personen gebildet werden. Wie viele solche Gruppen sind möglich?*  *Gib eine Formel an.*  Lösung: ( n · (n-1) · … · (n-k+1) ) : k! |  |