**Infoblatt**

**Sachanalyse – Superzahl**

Als die Superzahl soll hier die (zur Information vorab: eindeutig bestimmte) zehnstellige Zahl bezeichnet werden, die so aufgebaut ist, dass

* jede der Ziffern 0 bis 9 je einmal vorkommt
* die aus den ersten beiden Stellen gebildete Zahl durch 2 teilbar ist
* die aus den ersten 3 Stellen gebildete Zahl durch 3 teilbar ist
* die aus den ersten 4 Stellen gebildete Zahl durch 4 teilbar ist
* die aus den ersten 5 Stellen gebildete Zahl durch 5 teilbar ist
* die aus den ersten 6 Stellen gebildete Zahl durch 6 teilbar ist
* …
* die aus den ersten 10 Stellen gebildete Zahl (also die komplette Superzahl) durch 10 teilbar ist.

**Bestimme die Superzahl.**

Die Zahl 1234567890 ist nicht die Superzahl, denn es ist zwar 12 durch 2 teilbar und auch 123 durch 3 teilbar, aber 1234 ist nicht durch 4 teilbar.

Zunächst muss man feststellen, dass es 10! = 3.628.800 Möglichkeiten gibt, die zehn Ziffern anzuordnen.

Ohne PC-Hilfe möchte man die nicht alle durchprobieren, um die Superzahl zu finden.

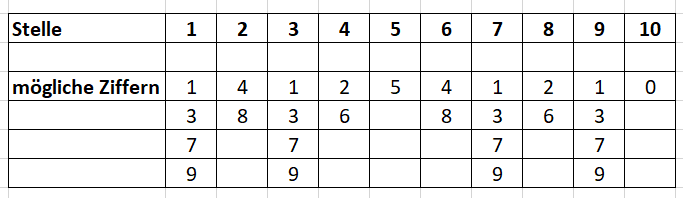
Kann man die Auswahl etwas eingrenzen?

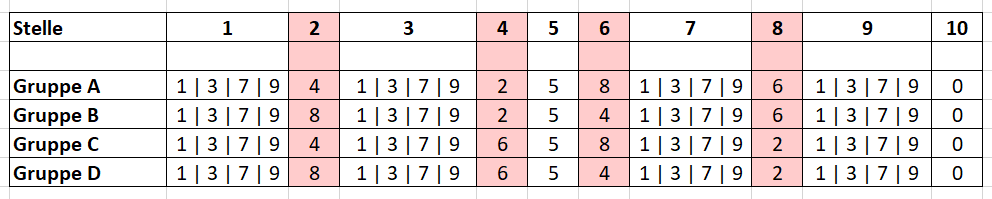
* Wegen der Teilbarkeit der gesamten Superzahl durch 10 muss an der 10. Stelle die Ziffer 0 stehen.

Die Teilbarkeit der Zahl aus den ersten neun Ziffern durch 9 liefert keine Einschränkung, da die Quersumme der zehn Ziffern 45 beträgt und 45 eine Neunerzahl ist.

Wegen der Teilbarkeit der aus den ersten 5 Stellen gebildeten Zahl durch 5 muss an der 5. Stelle die 5 stehen, denn die 0 ist ja schon vergeben.  
Das ist ja schon einmal etwas. Es gibt noch 8! = 40.320 Möglichkeiten die restlichen acht Ziffern anzuordnen. Das sind noch etwa 1,1% der vorigen Anzahl.

Wegen der Teilbarkeit durch 2; 4; 6 und 8 muss an der 2., 4., 6. und 8. Stelle eine gerade Ziffer (2; 4; 6 oder 8) stehen. Damit sind die geraden Ziffern „verbraucht“.   
Also muss an der 1., 3., 7. und 9. Stelle eine ungerade Ziffer stehen (es bleiben noch: 1; 3; 7 oder 9).  
Damit gibt es noch 4! ∙ 4! = 24 ∙ 24 = 576 Möglichkeiten. Das sind noch etwa 1,5% der vorigen Anzahl.

Jetzt wird es etwas schwieriger: Wir betrachten die 3. und die 4. Stelle. Wegen der Teilbarkeit durch 4 kann die aus den ersten 4 Stellen der Superzahl gebildete Zahl an ihren letzten beiden Stellen (nämlich die 3. und die 4. Stelle) nach dem Vorherigen nur noch so lauten:  
12; 16; 32; 36; 72; 76; 92; 96.   
Die 4. Stelle kann also nur mit der Ziffer 2 oder der Ziffer 6 belegt sein.  
Da aus der Teilbarkeit durch 8 die Teilbarkeit durch 4 folgt, gilt entsprechend:   
Die 8. Stelle kann also ebenfalls nur mit der Ziffer 2 oder der Ziffer 6 belegt sein.  
Da die Ziffern 2 und 6 an der 4. und 8. Stelle der Superzahl stehen müssen, bleiben für die 2. und die 6. Stelle nur die beiden andern geraden Ziffern 4 und 8 übrig.   
Damit gibt es jetzt noch   
2 ∙ 2 ∙ 4! = 2 ∙ 2 ∙ 24 = 96 Möglichkeiten, vgl. Tabelle rechts. Das sind noch etwa 16,7% der vorigen Anzahl.

Man kann nun arbeitsteilig in vier Gruppen die Möglichkeiten notieren und für die jeweils 4! = 24 Möglichkeiten die restlichen Teilbarkeitsforderungen überprüfen, um die Superzahl herauszufiltern:  
  
  
Unter uns: Man kann natürlich auch weitere Überlegungen anstellen.

* Wegen der Teilbarkeit durch 3 muss die aus der 1. bis 3. Stelle gebildete Zahl die Quersumme 3 haben. Mit Blick auf die Tabelle kommen nur zehn Möglichkeiten in Frage:  
  147; 183; 189; 381; 387; 741; 783; 789; 981 oder 987.  
  Wegen der Teilbarkeit durch 6 und daraus folgend die Teilbarkeit durch 3 muss die aus den ersten 6 Stellen der Superzahl gebildete Zahl die Quersumme 3 haben. Da schon die aus den ersten 3 Stellen gebildete Zahl die Quersumme 3 haben muss, gilt dies auch für die aus der 4. bis 6. Stelle gebildete Zahl, damit kommen mit Blick auf die Tabelle nur zwei Möglichkeiten in Frage:   
  258 oder 654.
* Wegen der Teilbarkeit durch 8 muss die aus der 6. bis 8. Stelle gebildete Zahl durch 8 teilbar sein (Die 8er-Regel: *Eine Zahl ist nur dann durch 8 teilbar, wenn die Zahl aus den letzten drei Ziffern durch 8 teilbar ist.*).  
  Mit Blick auf die Tabelle kommen nur vier Möglichkeiten in Frage:  
  416; 432; 472; 496; 816; 832; 872 oder 896.
* Die letzten beiden Betrachtungen betreffen beide die 6. Stelle. Da jede Ziffer nur einmal vorkommen darf, bleiben für die aus der 4. bis 8. Stelle gebildete Zahl nur die folgenden vier Möglichkeiten:  
  25816; 25896; 65432 oder 65472
* Berücksichtigt man bei der Zusammensetzung der Zahl aus der 1. bis 3. Stelle und der Zahl aus der 4. bis 8. Stelle und der 9. Stelle, dass jede Ziffer nur einmal vorkommt darf, so bleibt nur noch eine kleine Auswahl:  
  1472589630; 1836547290; 1896543270; 1896547230; 3816547290;   
  7412589630; 7896543210; 9816543270; 9816547230; 9876543210  
  Mit der Probe auf die Teilbarkeit durch 7 (hier wird man eben die Division ausführen) siebt man die **Superzahl 3816547290** aus.

Nebenbei unter uns: Es gibt ja mehrere 7er-Regeln, eine davon (die „1-3-2-Regel“) heißt so:

Nimm die 1er-Ziffer mal 1, die Zehnerziffer mal 3, die 100er-Ziffer mal 2, die 1000er-Ziffer mal -1, die 10000er-Ziffer mal – 3 und die 100000er-Ziffer mal -2, die 1000000er-Ziffer wieder mal 1 usw.

Die Zahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn diese gewichtete Quersumme durch 7 teilbar ist.

Muss man sich nicht merken 😊.

**Sachanalyse – Mini-Superzahl:**

Um sich in die Gedankenwelt einzufinden, kann man zunächst das Problem etwas verkleinern und nach der **Mini-Superzahl aus den sechs Ziffern 1; 2; 3; 4; 5 und 6** fragen.

Man kommt mit den nachfolgenden Überlegungen aus:

* geradzahlige Stellen müssen mit geraden Ziffern belegt werden (2er-Regel)
* für die ungeradzahligen Stellen bleiben dann nur noch die ungeraden Ziffern übrig
* an der 5. Stelle muss die Ziffer 5 stehen (5er-Regel)
* für die 1. und die 3. Stelle ist damit nur noch die Ziffer 1 und die Ziffer 3 übrig
* wir haben also die Form 1 \* 3 \* 5 \* bzw. 3 \* 1 \* 5 \*, an den Positionen \* steht eine der geraden Zahlen 2; 4 oder 6
* die Quersumme der Ziffern der ersten drei Stellen muss eine Dreierzahl sein (3er-Regel), damit bleibt 123654 oder 123456 bzw. 321456 oder 321654
* wegen der Teilbarkeit durch 4 (4er-Regel) bleiben als **Lösungen** nur die beiden Möglichkeiten **123654** und **321654,** denn die Teilbarkeit durch 6 ist bei gerader letzter Ziffer immer erfüllt wegen 1+2+3+4+5+6=21

Betrachtung der schrittweisen Reduktion der Anzahl der Möglichkeiten:

* Zunächst hat man für die Anordnung der sechs Ziffern 6! = 720 Möglichkeiten.
* Nach der Zuweisung der geradzahligen Ziffern zu den geradzahligen Stellen (und in Folge der ungeradzahligen Ziffern zu den ungeradzahligen Stellen) sind es nur noch 3! ∙ 3! = 6 ∙ 6 = 36 Möglichkeiten (!).
* Nach der Positionierung der Ziffer 5 sind es noch 2 ∙ 3! = 12 Möglichkeiten.
* Nach der Berücksichtigung der 3er-Regel sind es noch 4 Möglichkeiten.

**Didaktische Bemerkungen:**

Dieser Knobelaufgaben-Klassiker ist eine richtig schwierige Aufgabe und von Schülerinnen und Schülern der Klasse 7 allein nicht zu bewältigen. Selbst Studentinnen und Studenten der Mathematik „knabbern“ erfahrungsgemäß heftig daran.

Lehrreich ist die Aufgabe vor allem deshalb, weil man durch geeignete Überlegungen die unvorstellbare Anzahl von Möglichkeiten immer weiter einengen kann.

Trotzdem bleibt noch viel zu tun.

Fürs Leben kann man lernen: Zur Bewältigung von komplexen Problemen kommt man oft nur durch die Kombination von guten Ideen & harter Arbeit!

Zu Beginn wird man die Teilbarkeitsregeln wiederholen:

*Eine Zahl ist nur dann durch 2 teilbar, wenn ihre Endziffer 2; 4; 6; 8 oder 0 heißt.*

*Eine Zahl ist nur dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.*

*Eine Zahl ist nur dann durch 4 teilbar, wenn die Zahl aus den beiden letzten Ziffern durch 4 teilbar ist.*

*Eine Zahl ist nur dann durch 5 teilbar, wenn ihre Endziffer 0 oder 5 heißt.*

*Eine Zahl ist nur dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.*

(Diese Regel könnte zum Schluss der Bearbeitung nützlich sein, ist aber nicht zwingend:

*Eine Zahl ist nur dann durch 8 teilbar, wenn die Zahl aus den letzten drei Ziffern durch 8 teilbar ist.*)

*Eine Zahl ist nur dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.*

*Eine Zahl ist nur dann durch 10 teilbar, wenn ihre Endziffer 0 heißt.*

Zum Ablauf:

- gemeinsame Erarbeitung der Mini-Superzahl

- selbständige Arbeit: reduzieren der Möglichkeiten bei der Superzahl mithilfe des Arbeitsblattes

- durchprobieren der restlichen 4 mal 24 Möglichkeiten in vier Gruppen, die Lösung befindet sich auf dem Blatt der Gruppe D

Aus motivationspsychologischen Gründen erhalten alle Schülerinnen und Schüler dieses Blatt der Gruppe D.

Wenn man die 8er-Regel kennt, beschleunigt das die abschließende Suche.

1.) Ist die Zahl 1234567890 die Superzahl?

………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

2.) Welche Ziffer kommt für die 10. Stelle nur in Frage? Die Ziffer ……

3.) Welche Ziffer kommt dann für die 5. Stelle nur noch in Frage? Die Ziffer ……

4.) Welche Ziffern kommen für die 2., 4., 6. und 8. Stelle dann nur noch in Frage?

Die Ziffern ...…; ..…; ……; ……

5.) Welche Ziffern kommen für die 1., 3., 7. und 9. Stelle dann nur noch in Frage?

Die Ziffern ...…; ..…; ……; ……

6.) Ist die Zahl 9876543210 die Superzahl?

………………………………………………………………………………………………………………………………………………………

7.) Wie könnte die zweistellige Zahl aus der 3. und 4. Stelle lauten? Zähle die acht Möglichkeiten auf.

Beachte dabei: die 3. Stelle muss eine der noch verfügbaren ungeraden Zahlen sein.

………; ………; ………; ………; ………; ………; ………; ………

8.) Wenn eine Zahl durch 8 teilbar ist, dann ist sie auch durch 4 teilbar.  
Wie könnte damit die Zahl aus der 7. und 8. Stelle lauten? Zähle die acht Möglichkeiten auf.

Beachte dabei: die 7. Stelle muss eine der noch verfügbaren ungeraden Zahlen sein.

………; ………; ………; ………; ………; ………; ………; ………

9.) Welche beiden Ziffern können also nur an der 4. und 8. Stelle stehen? Die Ziffern …… und …… .

10.) Welche beiden Ziffern bleiben jetzt noch für die 2. und 6. Stelle übrig? Die Ziffern …… und …… .

11.) Trage in den grauen Feldern die jeweils noch möglichen Ziffern ein.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Stelle** | **1.** | **2.** | **3.** | **4.** | **5.** | **6.** | **7.** | **8.** | **9.** | **10.** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| **mögliche Ziffern** |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |

Eine der 24 Zahlen ist die Superzahl. Findest du sie?

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1.** | **2.** | **3.** | **4.** | **5.** | **6.** | **7.** | **8.** | **9.** | **10.** | **Zahl:** | **Superzahl?** | **Warum?** |
|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 8 | 3 | 6 | 5 | 4 | 7 | 2 | 9 | 0 | 1836547290 | Nein | 1836547 ist nicht durch 7 teilbar |
| 1 | 8 | 3 | 6 | 5 | 4 | 9 | 2 | 7 | 0 |  |  |  |
| 1 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 9 | 0 | 1876543290 | Nein | 187 ist nicht durch 3 teilbar |
| 1 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 9 | 2 | 3 | 0 |  |  |  |
| 1 | 8 | 9 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 7 | 0 |  |  |  |
| 1 | 8 | 9 | 6 | 5 | 4 | 7 | 2 | 3 | 0 |  |  |  |
| 3 | 8 | 1 | 6 | 5 | 4 | 7 | 2 | 9 | 0 |  |  |  |
| 3 | 8 | 1 | 6 | 5 | 4 | 9 | 2 | 7 | 0 |  |  |  |
| 3 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 1 | 2 | 9 | 0 |  |  |  |
| 3 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 9 | 2 | 1 | 0 |  |  |  |
| 3 | 8 | 9 | 6 | 5 | 4 | 1 | 2 | 7 | 0 | 389654127 | Nein | 389 ist nicht durch 3 teilbar |
| 3 | 8 | 9 | 6 | 5 | 4 | 7 | 2 | 1 | 0 |  |  |  |
| 7 | 8 | 1 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 9 | 0 |  |  |  |
| 7 | 8 | 1 | 6 | 5 | 4 | 9 | 2 | 3 | 0 |  |  |  |
| 7 | 8 | 3 | 6 | 5 | 4 | 1 | 2 | 9 | 0 |  |  |  |
| 7 | 8 | 3 | 6 | 5 | 4 | 9 | 2 | 1 | 0 | 7836549210 | Nein | 78365492 ist nicht durch 8 teilbar |
| 7 | 8 | 9 | 6 | 5 | 4 | 1 | 2 | 3 | 0 |  |  |  |
| 7 | 8 | 9 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |  |  |  |
| 9 | 8 | 1 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 7 | 0 |  |  |  |
| 9 | 8 | 1 | 6 | 5 | 4 | 7 | 2 | 3 | 0 |  |  |  |
| 9 | 8 | 3 | 6 | 5 | 4 | 1 | 2 | 7 | 0 |  |  |  |
| 9 | 8 | 3 | 6 | 5 | 4 | 7 | 2 | 1 | 0 | 9836547210 | Nein | 9836547 ist nicht durch 7 teilbar |
| 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 1 | 2 | 3 | 0 |  |  |  |
| 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |  |  |  |

**Verlaufsplan**

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer LV … L-Vortrag

EA … Einzelarbeit PA … Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Bei Bedarf kann man die Erarbeitung II oder III abkürzen.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Phase / Zeit** | **L / SuS** | **Medien** |
|  |  |  |
| **1. Erarbei­tung I**  LV bzw. FEU 20 Min. | L stellt das Thema Superzahl vor und betont mehrmals, dass dies ein außerordentlich schwieriges Problem ist, das sogar viele Mathematik-Lehrkräfte überfordern würde.  SuS wiederholen die Teilbarkeitsregeln.  Zur Einführung in die Vorgehensweise bei der Suche nach der Superzahl:  SuS und L ermitteln gemeinsam die Mini-Superzahl  (vgl. Infoblatt).  L thematisiert die anfängliche Anzahl der Möglichkeiten (720) und deren stufenweise Reduktion. | Tafel o.ä. |
| **2. Erarbeitung II**  EA / PA 30 Min.  abschließend FEU | SuS bearbeiten das Arbeitsblatt 1.  L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.  Vergleich der Lösungen:  1.) Nein. 1234 ist nicht durch 4 teilbar.  …  6.) Nein. 9876543 ist nicht durch 7 teilbar.  8.) und 9.): 12; 16; 32; 36; 52; 56; 72; 76; 92; 96  11.)  L erläutert die Aufteilung der jetzt noch 96 Möglichkeiten (zu Beginn waren es noch 3.628.800) in die vier Gruppen A, B, C und D (vgl. Infoblatt).  L verteilt nur das Arbeitsblatt für die Gruppe D. | Arbeits­blatt 1 |
| **3. Erarbeitung III**  EA / PA 20 Min. | SuS suchen in der Tabelle nach der Superzahl.  Man kann dabei arbeitsteilig vorgehen oder die SuS können sich frei in der Tabelle Zahlen wählen, die sie untersuchen möchten.  Alle Zahlen der Tabelle der Gruppe D außer der Superzahl sind nicht durch 3 oder nicht durch 7 oder nicht durch 8 teilbar.  Eine Vorsortierung mit der 8er-Regel würde die abschließende Suche beschleunigen.  Die Superzahl heißt **3816547290.** | Arbeitsblatt 2 für die Gruppe D |