**Sachanalyse**

Satz: Es gelten die folgenden Teilbarkeitsregeln:

Eine natürliche Zahl **z** ist genau dann **durch n teilbar** (d.h. die Division z : n ergibt keinen Rest), wenn

* n = 2 : die letzte Ziffer von z auf 0; 2; 4; 6 oder 8 lautet
* n = 3 : die Quersumme von z durch 3 teilbar ist
* n = 4 : die aus den letzten beiden Ziffern von z gebildete Zahl durch 4 teilbar ist
* n = 5 : die letzte Ziffer von z auf 0 oder 5 lautet
* n = 6 : z durch 2 und durch 3 teilbar ist
* n = 8 : die aus den letzten drei Ziffern von z gebildete Zahl durch 8 teilbar ist
* n = 9 : die Quersumme von z durch 9 teilbar ist
* n = 10 : die letzte Ziffer von z auf 0 lautet
* n = 11 : die alternierende Quersumme von z durch 11 teilbar ist.

Beweis:

*Für n = 8 (entsprechend für n = 4):*

Die gegebene Zahl z sei

z = an∙10n + an-1∙10n-1 + … + a2∙102 + a1∙101 + a0∙100 (an ; an-1 ; … ; a2 ; a1 ; a0 sind die Ziffern von z).

Da 103 = 1000 durch 8 teilbar ist (1000 : 8 = 125), ist 10n durch 8 teilbar für n3.

z ist also genau dann durch 8 teilbar, wenn a2∙102 + a1∙101 + a0∙100 – das ist die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl – durch 8 teilbar ist. ■

*Für n = 9 (entsprechend für n = 3):*

Die gegebene Zahl z sei

z = an∙10n + an-1∙10n-1 + … + a1∙101 + a0∙100 (an ; an-1 ; … ; a1 ; a0 sind die Ziffern von z).

Es gilt: z = an∙(10n –1) + an-1∙(10n-1 –1) + … + a1∙(101 –1) + an + an-1 + ...+ a1 + a0 (♦).

Die ersten n Summanden in der Darstellung (♦) sind Vielfache von 9 und somit durch 9 teilbar.

z ist also genau dann durch 9 teilbar, wenn die Quersumme von z, das ist die Summe der letzten n+1 Summanden von (♦), durch 9 teilbar ist. ■

*Für n = 11:*

Die gegebene Zahl z sei

z = a2n∙102n + a2n-1∙102n-1 + … + a1∙101 + a0∙100 (a2n ; a2n-1 ; … ; a1 ; a0 sind die Ziffern von z).

Es gilt: z = a2n∙(102n – 1) + a2n-1∙(102n-1 + 1) + … + a1∙(101 + 1) + a2n – a2n-1 + ... – a1 + a0 (♦).

Es gilt für n1: 102n – 1 =

(10 + 1) ∙ (102n-1 – 102n-2 + 102n-3 – … +101 – 100) = **11** ∙ (102n-1 – 102n-2 + 102n-3 – … +101 – 100) und 102n-1 + 1 =

(10 + 1) ∙ (102n-2 – 102n-3 + 102n-4 – … – 101 + 100) = **11** ∙ (102n-2 – 102n-3 + 102n-4 – … – 101 + 100).

Damit sind die ersten 2n Summanden in der Darstellung (♦) Vielfache von 11 und somit durch 11 teilbar. z ist also genau dann durch 11 teilbar, wenn die alternierende Quersumme von z, das ist die Summe der letzten 2n+1 Summanden von (♦) durch 11 teilbar ist. ■

*Die anderen Fälle sind offensichtlich.*

Das Prinzip lautet:

Betrachte die Reste bei der Division der Stufenzahlen durch n. ■

**Infoblatt**

**Didaktische Reduktion:**

Bei der Frage nach der Teilbarkeit einer natürlichen Zahl z durch eine natürliche Zahl n kann man z.B. das **Gruppen-Aufteilungs-Modell** heranziehen. Eine Anzahl von z Personen soll in Gruppen zu jeweils n  Personen aufgeteilt werden. Die Frage, ob z durch n teilbar ist, geht damit über in die Frage, ob alle z Personen in einer solchen Gruppe der Größe n unterkommen oder ob Personen übrig bleiben.

Die Frage, wie viele Gruppen gebildet werden können, ist dabei nicht von Belang.

*Exemplarisch für n = 4 und z = 1234:*

Von 1000 (= 4 ∙ 250) Personen kommen alle in 4er-Gruppen unter.

Von 100 (= 4 · 25) Personen kommen alle in 4er-Gruppen unter.

Es bleibt also nur die Frage, ob von 34 Personen alle in 4er-Gruppen unterkommen.

34 ist nicht durch 4 teilbar, also 1234 auch nicht.

**Hilfsregel** (diese wird auf dem Arbeitsblatt verwendet):

Eine zweistellige Zahl ist nur dann durch 4 teilbar, wenn

- die Zehnerziffer gerade ist und die Einerziffer 0; 4 oder 8 heißt

- die Zehnerziffer ungerade ist und die Einerziffer 2 oder 6 heißt.

*Exemplarisch für n = 11 und z = 1234:*

Von 1000 (= 11∙91 – 1) Personen kommen alle in 11-er Gruppen (Fußball-Mannschaften!) unter. Eine dieser 91 Gruppen hat zunächst aber nur 10 Personen. Es fehlt also noch 1 Person.

Von 100 (= 11·9 + 1) Personen kommen 99 in 11-er Gruppen unter. Es bleibt 1 Person übrig.

Von 10 Personen kommen alle in einer 11-er Gruppe unter. Dabei fehlt aber noch 1 Person.

1 Person kommt nicht in einer 11-er Gruppe unter. Es bleibt 1 Person übrig.

Bei 1234 = 4 + 3∙10 + 2∙100 + 1∙1000 Personen bleiben also 4 – 3 + 2 – 1 = 2 Personen übrig.

Diese so genannte **alternierende Quersumme** entscheidet allein über die Teilbarkeit durch 11.

Ist diese alternierende Quersumme gleich 0, so heben sich die Anzahlen derer, die übrig sind, und derer, die noch fehlen, gerade auf.

Das Zahlenbeispiel 3619 mit der alternierenden Quersumme 11 zeigt, dass man mit denen, die übrig sind, die noch nicht vollständigen Gruppen auffüllen und sogar noch eine neue Gruppe bilden kann.

Das Zahlenbeispiel 7491 mit der alternierenden Quersumme –11 zeigt, dass man ggf. eine bestehende Gruppe auflösen muss.

Also: Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, sonst nicht.

Bemerkung 1: Über den Wert der Achter-Regel kann man geteilter Meinung sein.

Bemerkung 2: Schülerinnen und Schüler (SuS) fragen Sie eventuell: „Gibt es eine 7er-Regel?“

Entsprechend der Reste bei den Divisionen 1:7 (Rest 1), 10:7 (Rest 3), 100:7 (Rest 2), 1000:7 (Rest 6), 10000:7 (Rest 4), 100000:7 (Rest 5), 1000000:7 (Rest 1), usw. heißt die 7er-Regel so:

Eine Zahl z ist genau dann durch 7 teilbar, wenn die gewichtete Quersumme, nämlich

***1****-mal 1-er-Ziffer +* ***3****-mal 10-er-Ziffer +* ***2****-mal 100-er-Ziffer +* ***6****-mal 1000-er-Ziffer +*

***4****-mal 10000-er-Ziffer +* ***5****-mal 100000-er-Ziffer +* ***1****-mal 1000000-er-Ziffer usw.,* durch 7 teilbar ist.

Alternative: ***1****-mal 1-er-Ziffer +* ***3****-mal 10-er-Ziffer +* ***2****-mal 100-er-Ziffer –* ***1-****mal 1000-er-Ziffer –*

***3****-mal 10000-er-Ziffer –* ***2****-mal 100000-er-Ziffer +* ***1****-mal 1000000-er-Ziffer usw.*

Beispiel: 312.368 ist durch 7 teilbar, denn **1**·8 **+3**·6 **+2**·3 **–1**·2 **–3**·1 **–2**·3=21, 21 ist durch 7 teilbar.

Über den Wert der 7er-Regel kann man auch geteilter Meinung sein.

**Ziele:**

* Teilbarkeitsregeln wiederholen und vertiefen; Kopfrechnen
* Sachverhalte auf den Kern reduzieren:   
  Untersuchung der Stufenzahlen auf den Rest bei der Division durch n

**1. Teilbarkeitsregeln:**

Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn …........................................................................................., sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ……………………………………………………………………………………….., sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn ……………………………………………………………………………………………………………

oder …………………………………………………………………………………………………………………………………….., sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn ……………………………………………………………………………………….., sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ……………………………………………………………………………………….., sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn ………………………………………………………………………………………, sonst nicht.

**2. Herleitung der 9er-Regel am Beispiel 234:** 234 = 2 Hunderter + 3 Zehner + 4 Einer

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Stufenzahl: | aufspalten: | Anzahl der 9er-Gruppen (unwichtig): | für jeden Hunderter/ Zehner usw. bleiben übrig: | insgesamt übrig: |
| … |  |  |  |  |
| Hunderter |  |  |  |  |
| Zehner |  |  |  |  |
| Einer |  |  |  |  |
|  |  |  | Summe: |  |

Für die Teilbarkeit durch 9 entscheidet die Quersumme:

.........................................................................................................................................................................

**3. Herleitung der 11er-Regel für dreistellige Zahlen.** Beispiel: 234 = 2 Hunderter + 3 Zehner + 4 Einer

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Stufenzahl: | aufspalten: | Anzahl der 11er-Gruppen (unwichtig): | für jeden Hunderter/ Zehner usw. bleiben übrig oder fehlen: | insgesamt übrig (+) / fehlen (–): |
|  |  |  |  |  |
| Hunderter |  | 9 | ….. übrig |  |
| Zehner |  | 1 | ….. fehlt |  |
| Einer |  | 0 | ….. übrig |  |
|  |  |  | Summe: |  |

Für die Teilbarkeit durch 11 entscheidet:

………………………………………………………………………………………………………………………………………………………….………

**1. Teilbarkeitsregeln:**

Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn die Einerziffer 0; 2; 4; 6 oder 8 heißt, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die Zehnerziffer gerade ist und die Einerziffer 0; 4 oder 8 heißt.

oder die Zehnerziffer ungerade ist und die Einerziffer 2 oder 6 heißt, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn die Einerziffer 0; oder 5 heißt, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn die Einerziffer 0 heißt, sonst nicht.

**2. Herleitung der 9er-Regel am Beispiel 234:** 234 = 2 Hunderter + 3 Zehner + 4 Einer

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Stufenzahl: | aufspalten: | Anzahl der 9er-Gruppen (unwichtig): | für jeden Hunderter/ Zehner usw. bleiben übrig: | insgesamt übrig: |
| … |  |  |  |  |
| Hunderter | 100 = 11 · 9 + 1 | 11 | 1 | 2 |
| Zehner | 10 = 1 · 9 + 1 | 1 | 1 | 3 |
| Einer | 1 | 0 | 1 | 4 |
|  |  |  | Summe: | 2 + 3 + 4 = 9 🡪 noch eine 9er-Gruppe🡪 keiner übrig |

Für die Teilbarkeit durch 9 entscheidet die Quersumme:

*Einerziffer* ***plus*** *Zehnerziffer* ***plus*** *Hunderterziffer* ***plus*** *Tausenderziffer usw.*

**3. Herleitung der 11er-Regel für dreistellige Zahlen.** Beispiel: 234 = 2 Hunderter + 3 Zehner + 4 Einer

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Stufenzahl: | aufspalten: | Anzahl der 11er-Gruppen (unwichtig): | für jeden Hunderter / Zehner usw. bleiben übrig oder fehlen: | insgesamt übrig (+)/ fehlen (–): |
|  |  |  |  |  |
| Hunderter | 100 = 9 · 11 + 1 | 9 | 1 übrig | 2 |
| Zehner | 10 = 1 · 11 – 1 | 1 | 1 fehlt | -3 |
| Einer | 1 | 0 | 1 übrig | 4 |
|  |  |  | Summe: | 2 – 3 + 4 = 3 sind übrig |

Für die Teilbarkeit durch 11 entscheidet:

*Hunderterziffer* ***plus*** *Einerziffer* ***minus*** *Zehnerziffer*

**Verlaufsplan**

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer

EA … Einzelarbeit PA … Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht

Phase 4. wird man je nach Zeit und Interesse der SuS stattfinden oder wegfallen lassen.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Phase / Zeit** | **L / SuS** | **Medien** |
| **1. Einstieg**  FEU z.T. EA / PA  20 Min. | SuS wiederholen die bis dahin bekannten Teilbarkeitsregeln (n = 2; 3; 4; 5; 9; 10), zunächst EA/PA.  Teil 1. des Arbeitsblattes wird gemeinsam ausgefüllt, die angestrebte Hilfsregel zur Teilbarkeit durch 4 wird von den SuS an der 4er-Reihe  4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44; 48; 52; 56; 60; 64; 68; 72; 76; 80; 84; 88; 92; 96  … in EA/PA erkannt.  L gibt ggf. den Tipp: „Unterscheide die beiden Fälle Zehnerziffer gerade bzw. Zehnerziffer ungerade.“  SuS üben die Teilbarkeitsregeln.  L stellt dazu Aufgaben vom Typ  - Durch welche n (s.o.) ist 3345 teilbar?  - Wie muss die letzte Ziffer (x) von 1234x lauten, damit eine Teilbarkeit durch n vorliegt?  SuS erfinden selbst solche Aufgaben. | Arbeitsblatt  Teil 1.  ggf. Tafel o.ä. |
| **2. Erarbeitung I**  FEU 10 Min. | L leitet mit den SuS die 9er-Regel anhand des Gruppenaufteilungs-Modells her. | Arbeitsblatt  Teil 2.  ggf. Tafel o.ä. |
| **3. Erarbeitung II**  EA / PA dann FEU  10 Min. | SuS leiten die 11er-Regel für dreistellige Zahlen anhand des Gruppen-Aufteilungs-Modells her. L unterstützt, insbesondere bei der Installation und numerischen Interpretation von „1 fehlt“.  Die 11er-Regel wird „gefeiert“:  - an Beispielen angewandt und bestätigt (Überprüfung durch Division)  - SuS „basteln“ mithilfe der 11er-Regel dreistellige 11er-Zahlen  - SuS erkennen die beiden Fälle  - *Hunderterziffer* ***plus*** *Einerziffer* ***minus*** *Zehnerziffer = 0:*  🡪 es gleicht sich gerade aus  - *Hunderterziffer* ***plus*** *Einerziffer* ***minus*** *Zehnerziffer = 11:*  🡪 noch eine weitere 11er-Gruppe kann gebildet werden. | Arbeitsblatt  Teil 3.  ggf. Tafel o.ä. |
| **4. Erarbeitung III**  FEU 15 Min. | L informiert ggf. SuS darüber, wie die allgemeine 11er-Regel lautet (alternierende Quersumme) und thematisiert am Zahlenbeispiel 7491, dass ggf. eine 11er-Gruppe aufgelöst werden muss.  L informiert ggf. SuS über die 6er-, die 7er- (ggf. nur für dreistellige Zahlen) und die 8er-Regel. |  |