**Sachanalyse**

Definition: **Regelmäßige Polyeder** sind konvexe Körper, bei denen an jeder Ecke gleich viele Flächen zusammentreffen und deren Oberfläche aus kongruenten regelmäßigen Vielecken besteht.

Regelmäßige n-Ecke haben gleiche Seitenlängen und Innenwinkel α. Es gilt:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| n = | 3 | 4 | 5 | 6 | > 6 |
| α = | 60° | 90° | 108° | 120° | >120° |

**Zwei Fragen:**

Welche regelmäßigen Polyeder gibt es? Wie kann man sicher sein, dass es keine weiteren gibt?

Durch Probieren findet man die **fünf regelmäßigen Polyeder**. Auf einen formalen Beweis der Existenz wird hier verzichtet.

Die griechischen Vorsilben benennen die Anzahl der Flächen:

tetra = vier; hexa = sechs; okta = acht; dodeka = zwölf; ikosa = zwanzig



Dass dies alle sind, wird im Folgenden anschaulich begründet. Dabei sei a die Anzahl der regelmäßigen n-Ecke, die eine räumliche Ecke bilden, offensichtlich ist a  3.

n = 3: Man kann entweder je a = 3 gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen (🡪 Tetraeder) oder je a = 4 (🡪 Oktaeder) oder je a = 5 (🡪 Ikosaeder) gleichseitige Dreiecke.   
a = 6 gleichseitige Dreiecke aneinander bilden zusammen einem Innenwinkel von 6 · 60° = 360° („liegen eben“) und damit keine räumliche Ecke mehr.

n = 4: Man kann nur je a = 3 Quadrate zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen (🡪 Hexaeder = Würfel); a = 4 Quadrate aneinander bilden zusammen einem Innenwinkel von 4 · 90° = 360° („liegen eben“) und damit keine räumliche Ecke mehr.

n = 5: Man kann nur je a = 3 regelmäßige Fünfecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen (🡪 Dodekaeder), es ist 3 · 108° < 360°.

n = 6: a = 3 regelmäßige Sechsecke aneinander bilden zusammen einem Innenwinkel von 3 · 120° = 360° („liegen eben“) und damit keine räumliche Ecke mehr.

Alle anderen Kombinationen von a und n führen zu Überlappungen und scheiden damit ebenfalls als Möglichkeiten aus.

**Eine dritte Frage**:

Sind in der Definition die Forderungen „konvex“ und „an jeder Ecke gleich viele Flächen zusammentreffen“ notwendig?

Antwort: Ja. Ansonsten würde man weitere regelmäßige Körper bekommen:

- Man denke sich, ausgehend vom Ikosaeder, eine der Ecken einspringend nach innen; dieser „Dellen-Ikosaeder“ besteht nach wie vor aus zwanzig gleichseitigen Dreiecken und an jeder Ecke treffen gleich viele Dreiecke aufeinander.

- Man denke sich zwei Tetraeder an je einer der Flächen aufeinander geklebt, der „Doppel-Tetraeder“ besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken, ist konvex, aber an den Ecken treffen entweder drei oder vier Dreiecke zusammen.

**Infoblatt**

**Didaktischer Kommentar**

Der Charme dieses Vorhabens liegt darin, dass beim Tun

- die fünf regelmäßigen Polyeder gefunden werden können und

- die Grenzen der Möglichkeiten, solche Körper zu bilden, erfahrbar werden.

In der Unterstufe gibt man sich mit dem Nachweis der Existenz dieser Polyeder durch die Konstruktion zufrieden. Auf dem Arbeitsblatt wird nur der Hauptstrang des Gedankengangs dokumentiert.

Die Suche nach den regelmäßigen Polyedern ist in natürlicher Weise **selbstdifferenzierend:**

**-** beim Ausloten und Verbalisieren der Möglichkeiten, solche Körper zu bilden

- beim Finden des Doppel-Tetraeders (den Dellen-Ikosaeder darf die Lehrkraft mit in die Diskussion einbringen).

|  |  |
| --- | --- |
| Reguläre Polyeder sind zueinander dual. Verbindet man nämlich die Mittelpunkte der Seitenflächen, so erhält man wieder einen regelmäßigen Polyeder:  Tetraeder 🡪 Tetraeder; Hexaeder 🡪 Oktaeder;  Oktaeder 🡪 Hexaeder; Ikosaeder 🡪 Dodekaeder;  Dodekaeder 🡪 Ikosaeder  Die Schrägbild-Zeichnung des Oktaeders im Würfel lässt  sich gut bewerkstelligen. Alle anderen Übergänge könnte man bei der Betrachtung der regulären Körper gedanklich nachvollziehen. |  |

**Ziele:**

- die Problemlösestrategien

* ein Problem *in Teilprobleme aufspalten*
* alle *Fälle der Reihe nach abhandeln*
* *systematisches Probieren*

kennenlernen bzw. erproben

- das räumliche Vorstellungsvermögen weiterentwickeln

- Freude an der Ästhetik von Figuren und an der Aufdeckung von Zusammenhängen empfinden

**Material:**



- Steckerle von regelmäßigen n-Ecken (n = 3; 4; 5; 6) in ausreichender Anzahl

- Arbeitsblatt

# Regelmäßige Polyeder

Polyeder sind Körper, die nur von ebenen Flächen begrenzt sind, zum Beispiel Quader oder Pyramiden.

**Regelmäßige Polyeder**

* haben eine Oberfläche, die nur aus gleichen regelmäßigen Vielecken besteht (nur gleichseitige Dreiecke, nur Quadrate usw.)
* haben Ecken, an denen immer gleich viele Flächen zusammentreffen
* haben keine einspringenden Ecken.

**Es gibt nur fünf regelmäßige Polyeder.**



Die griechischen Vorsilben geben die Anzahl der Flächen an. ***Trage die Zahlen ein***.

tetra = ..….. hexa = ……. okta = ….... dodeka = ……. ikosa = …….

**Warum gibt es nur diese fünf regelmäßigen Polyeder?** ***Fülle die Text-Lücken aus***.

Man kann je drei gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen

und erhält das …………………...... .

Man kann auch je ……. gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen

und erhält dann das …………….……….. .

Man kann auch je ……. gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen

und erhält dann das ………………….….. .

Fügt man jedoch …. gleichseitige Dreiecke aneinander, liegen diese flach in der Ebene,

und man erhält keinen ……………………… mehr.

Das Gleiche gilt für ….. Quadrate oder …. regelmäßige Sechsecke.

Man kann je drei ……….…..….. zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das Hexaeder.

Man kann je drei regelmäßige Fünfecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen

und erhält das ……………………… .

Weitere Möglichkeiten gibt es damit nicht.

|  |  |
| --- | --- |
| **Zeichnung** eines **Oktaeder**s in einem Hexaeder:  - ***Zeichne*** das Schrägbild eines Würfels (Hexaeder) mit der Kantenlänge 10cm, die Kanten schräg nach hinten nur 6 Kästchendiagonalen lang.  - ***Markiere*** die Mittelpunkte der sechs Quadrate rot. Dazu jeweils beide Diagonalen mit ganz feinen Linien eintragen.  - ***Verbinde*** (rote Farbe) die benachbarten Mittelpunkte und du erhältst das Oktaeder. |  |

# Regelmäßige Polyeder

Polyeder sind Körper, die nur von ebenen Flächen begrenzt sind, zum Beispiel Quader oder Pyramiden.

**Regelmäßige Polyeder**

* haben eine Oberfläche, die nur aus gleichen regelmäßigen Vielecken besteht (nur gleichseitige Dreiecke, nur Quadrate usw.)
* haben Ecken, an denen immer gleich viele Flächen zusammentreffen
* haben keine einspringenden Ecken.

**Es gibt nur fünf regelmäßige Polyeder.**



Die griechischen Vorsilben geben die Anzahl der Flächen an. ***Trage die Zahlen ein***.

tetra = 4 hexa = 6 okta = 8 dodeka = 12 ikosa = 20

**Warum gibt es nur diese fünf regelmäßigen Polyeder?** ***Fülle die Text-Lücken aus***.

Man kann je drei gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen

und erhält das Tetraeder.

Man kann auch je vier gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen

und erhält dann das Oktaeder.

Man kann auch je fünf gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen

und erhält dann das Ikosaeder.

Fügt man jedoch sechs gleichseitige Dreiecke aneinander, liegen diese flach in der Ebene,

und man erhält keinen Körper mehr.

Das Gleiche gilt für vier Quadrate oder drei regelmäßige Sechsecke.

Man kann je drei Quadrate zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das Hexaeder.

Man kann je drei regelmäßige Fünfecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen

und erhält das Dodekaeder .

Weitere Möglichkeiten gibt es damit nicht.

|  |  |
| --- | --- |
| **Zeichnung** eines **Oktaeder**s in einem Hexaeder:  - ***Zeichne*** das Schrägbild eines Würfels (Hexaeder) mit der Kantenlänge 10cm, die Kanten schräg nach hinten nur 6 Kästchendiagonalen lang.  - ***Markiere*** die Mittelpunkte der sechs Quadrate rot. Dazu jeweils beide Diagonalen mit ganz feinen Linien eintragen.  - ***Verbinde*** (rote Farbe) die benachbarten Mittelpunkte und du erhältst das Oktaeder. |  |

**Verlaufsplan**

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer

EA … Einzelarbeit PA … Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird die Lehrkraft stärker oder weniger stark lenken bzw. den Punkt 5. weglassen.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Phase / Zeit** | **L / SuS** | **Medien** |
| **1. Einstieg**  FEU  5 Min. | L stellt regelmäßige Polyeder (man nennt diese auch *platonische Körper*) zunächst als Körper vor, die aus „lauter gleichen regelmäßigen Vielecken zusammengesetzt sind“ und teilt Steckerle in ausreichender Anzahl aus mit dem Auftrag:  „Baue alle regelmäßigen Polyeder.“ | Steckerle in Form regelmäßiger  n-Ecke  (n = 3; 4; 5; 6) |
| **2. Erarbeitung I**  EA/PA  25 Min. | SuS  - bauen die fünf regelmäßigen Polyeder, dazu auch den Doppel-Tetraeder  - erfahren beim Tun die Grenzen der Möglichkeiten hierbei.  L fordert im Einzelgespräch SuS zur Verbalisierung dieser Grenzen auf.  L lobt und beobachtet, aber berät zurückhaltend. | Steckerle |
| **3. Plenum I**  FEU  15 Min. | L  - problematisiert die beiden Beispiele des Doppel-Tetraeders und des Dellen-Ikosaeders  („Verdienen diese den Namen *regelmäßig*?“)  - präzisiert die Definition (Ecken, an denen gleich viele Flächen zusammentreffen + Konvexität)  - verteilt das Arbeitsblatt  - führt die fünf Namen der fünf Körper ein. | Arbeitsblatt |
| **4. Erarbeitung II**  EA/PA + FEU  10 Min. | SuS bearbeiten die Anweisungen des Arbeitsblattes.  L lobt und beobachtet, aber berät zurückhaltend.  SuS und L besprechen die Eintragungen | - Körper aus  Steckerle  - Arbeitsblatt |
| **5. Erarbeitung III**  EA/PA  15 Min. | Duale Beziehungen zwischen den regelmäßigen Polyedern:  Zeichnung für den Fall Hexaeder 🡪 Oktaeder:  - Zeichne das Schrägbild eines Würfels (Hexaeder) mit der Kantenlänge 10 cm  - Kanten schräg nach hinten nur 6 Kästchendiagonalen lang  - markiere die Mittelpunkte der sechs Quadrate rot (jeweils beide Diagonalen mit ganz feinen Linien eintragen)  - verbinde (rote Farbe) die benachbarten Mittelpunkte und du erhältst das Oktaeder. | kariertes Papier, Geodreieck, Stifte |