

**Infoblatt****Ziel der Stunde**

Die Schülerinnen und Schüler (SuS) sollen anhand von Aufgabe 4 das systematische Probieren einüben. Die Aufgabe stammt aus der Begabtenförderung und ist ziemlich schwierig. Deshalb müsste das Kompetenzerleben besonders groß sein. Es birgt damit aber auch die Gefahr von Frustration, die unbedingt durch geschicktes Helfen zu vermeiden ist.

Die Aufgaben 1 bis 3 sind für eine Einführung in die Thematik gedacht. Dabei haben aber die Aufgaben 2 und 3 einen vom Problem unabhängigen kombinatorischen Aspekt. Sie sollten, wenn wenig Zeit zur Verfügung steht, weggelassen bzw. als Zusatzaufgabe für schnelle SuS verwendet werden.

**Vorgehen bei den einzelnen Aufgaben:****Aufgabe 1**

Hier kann man zwei Probleme erwarten.

1. Bei dreistelligen Zahlen kann vorne keine 0 stehen.
2. Die Anzahl der Zahlen von 100 bis 999 ist nicht die Differenz  $999 - 100 = 899$ , sondern 1 mehr. Das erläutert man am besten so, wie in der Musterlösung gezeigt wird.

Eine alternative Lösung geht in die Richtung von Aufgabe 2 und 3. Für die 1. Ziffer hat man 9 Möglichkeiten, für die 2. Ziffer 10 Möglichkeiten und für die 3. Ziffer ebenfalls 10 Möglichkeiten, ergibt insgesamt  $9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$  Möglichkeiten.

Um die Multiplikation zu verdeutlichen, kann man 2 Stühle aufstellen und 2 Jungen und 3 Mädchen nach vorne bitten. Dann fragt man, wie viele Möglichkeiten es gibt, dass Pärchen von Junge und Mädchen, der Junge links, das Mädchen rechts, sich auf die Stühle setzen. Dann argumentiert man so: Für jeden Jungen gibt 3 Mädchen, also  $3 + 3 = 2 \cdot 3$  Möglichkeiten. Nun macht man dasselbe mit etwas größeren Zahlen und leitet daraus die Regel ab.

**Aufgabe 2**

Hat man bei Aufgabe 1 die alternative Lösung nicht besprochen, dann benötigt man die Überlegungen jetzt.

**Aufgabe 3**

Als neue Schwierigkeit kommt hinzu, dass jetzt eine Fallunterscheidung (dies verweist bereits auf die Aufgabe 4) notwendig ist. Ansonsten verfährt man wie bei der Aufgabe 2.

**Aufgabe 4**

Zuerst sollte man herausarbeiten, dass eine Fallunterscheidung notwendig ist. Wenn die Zahl nämlich eine 0 enthält, dann müssen die anderen beiden Ziffern gleich groß sein. Das führt auf den weiteren Fall mit zwei gleichen Ziffern und keiner 0. Der dritte Fall heißt dann "alle drei Ziffern verschieden".

Man wird z.B. erst einmal „wild“ suchen lassen, die Idee beschreiben lassen und dann in drei Klassen einteilen.

Nun kann man je nach zur Verfügung stehender Zeit die drei Fälle (auch binnendifferenziert) arbeitsteilig oder alternativ komplett in Einzelarbeit oder in Partner- oder Partnerinnenarbeit bearbeiten lassen.

Dabei kommt es auf das systematische Aufschreiben an. Dies sollte an einem Beispiel gezeigt werden, z.B.: „Erfasse alle Buchstaben- Kombinationen (Permutationen) aus „das“.“

Lösung: ads, asd, das, das, sad, sda.

**Hinweis: Schreibe deinen Lösungsweg genau auf!**

**Aufgabe 1**

Wie viele dreistellige Zahlen gibt es?

**Aufgabe 2**

Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, die genau eine 9 enthalten?

**Aufgabe 3**

Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, die mindestens eine 9 enthalten?

**Aufgabe 4**

Wie viele dreistellige Zahlen gibt es, bei denen eine der Ziffern die Summe der beiden anderen Ziffern ist?

Beispiele:      101 oder 110, denn  $1 + 0 = 1$   
                    224 oder ???, denn  $2 + 2 = 4$   
                    275 oder 257 oder 527 oder ???, denn  $2 + 5 = 7$

## Lösungen

### Aufgabe 1

Das sind die Zahlen von 100 bis 999, also 900 Zahlen (nicht:  $999 - 100 = 899$  Zahlen!)

Denn: von 1 bis 999 sind es 999 Zahlen und von 1 bis 99 sind es 99 Zahlen,  
also sind es von 100 bis 999  $- 99 = 900$  Zahlen.

Allgemein gilt: von  $a$  bis  $b$  sind es  $b - (a - 1) = b - a + 1$  Zahlen.

### Aufgabe 2

Die 9 kann vorne stehen:

der Zahltyp 9ZE liefert  $9 \cdot 9 = 81$  Zahlen, die Zehnerziffer Z und die Einerziffer E sind dabei Ziffern zwischen 0 und 8 (auch im Folgenden – jeweils einschließlich).

Die 9 kann in der Mitte stehen:

der Zahltyp H9E liefert  $8 \cdot 9 = 72$  Zahlen, die Hunderterziffer H ist dabei eine Ziffer zwischen 1 und 8 (vorne darf keine 0 stehen), die Einerziffer E ist dabei eine Ziffer zwischen 0 und 8.

Die 9 kann hinten stehen:

der Zahltyp HZ9 liefert  $8 \cdot 9 = 72$  Zahlen, die Hunderterziffer H ist dabei eine Ziffer zwischen 1 und 8 (vorne darf keine 0 stehen), die Zehnerziffer Z ist dabei eine Ziffer zwischen 0 und 8.

Insgesamt hat man also  $81 + 72 + 72 = 225$  dreistellige Zahlen mit genau einer 9.

### Aufgabe 3

Genau einmal die 9:

es sind 225 Zahlen, vgl. Aufgabe 2

Genau zweimal die 9:

der Zahltyp H99 liefert 8 Zahlen, die Hunderterziffer H ist dabei eine Ziffer zwischen 1 und 8.

der Zahltyp 9Z9 liefert 9 Zahlen, die Zehnerziffer Z ist dabei eine Ziffer zwischen 0 und 8.

der Zahltyp 99E liefert 9 Zahlen, die Einerziffer E ist dabei eine Ziffer zwischen 0 und 8.

Genau dreimal die 9:

hier gibt es nur die eine Zahl 999.

Insgesamt hat man also  $225 + 8 + 9 + 9 + 1 = 252$  dreistellige Zahlen mit mindestens einer 9.

### Aufgabe 4

Fall 1: Die Zahl enthält eine Ziffer Null.

$(1|1|0)$ ,  $(2|2|0)$ ,  $(3|3|0)$ , ...,  $(9|9|0)$  sind 9 Zifferngrundkombinationen.

$(1|1|0)$  liefert folgende Zahlen: 110, 101

Jede Zifferngrundkombination liefert 2 gesuchte Zahlen, insgesamt entstehen aus den 9 Zifferngrundkombinationen also 18 Zahlen mit der gesuchten Eigenschaft.

Fall 2: Die Zahl enthält zwei gleiche Ziffern, die Ziffern sind von Null verschieden.

$(1|1|2)$ ,  $(2|2|4)$ ,  $(3|3|6)$ ,  $(4|4|8)$  sind 4 Zifferngrundkombinationen.

$(1|1|2)$  liefert folgende Zahlen: 112, 121, 211

Jede Zifferngrundkombination liefert 3 gesuchte Zahlen, insgesamt entstehen aus den 4 Zifferngrundkombinationen also 12 Zahlen mit der gesuchten Eigenschaft.

Fall 3: Die Zahl besteht aus drei verschiedenen Ziffern, alle Ziffern sind von Null verschieden.

$(1|2|3)$ ,  $(1|3|4)$ ,  $(1|4|5)$ , ...,  $(1|8|9)$  sind 7 Zifferngrundkombinationen.

$(1|2|3)$  liefert folgende Zahlen: 123, 132, 213, 231, 312, 321

$(2|3|5)$ ,  $(2|4|6)$ ,  $(2|5|7)$ , ...,  $(2|7|9)$  sind 5 Zifferngrundkombinationen.

$(3|4|7)$ ,  $(3|5|8)$ ,  $(3|6|9)$  sind 3 Zifferngrundkombinationen.

$(4|5|9)$  ist eine weitere Zifferngrundkombination.

Jede Zifferngrundkombination liefert 6 gesuchte Zahlen, insgesamt entstehen aus den 16 Zifferngrundkombinationen also 96 Zahlen mit der gesuchten Eigenschaft.

Insgesamt gibt es also 126 Zahlen mit der gesuchten Eigenschaft.

### Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler    L ... Lehrerin bzw. Lehrer    UG ... Unterrichtsgespräch

EA ... Einzelarbeit    PA ... Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit    FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung! 3. bis 5. können je nach Zeitbedarf weggelassen werden.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
<b>1. Einstieg /</b> PA 10 Min.	L teilt Arbeitsblatt aus und gibt den Auftrag, Aufgabe 1 zu bearbeiten.	Arbeitsblatt
<b>2. Ergebnissicherung</b> FEU 5 Min.	Besprechung der Ergebnisse	Tafel
<b>3. Lösen der Aufgabe 2 (optional)</b> FEU 10 Min.	L und SuS lösen im UG die Aufgabe 2. Dabei sollte herausgearbeitet werden, dass man multiplizieren (nicht: addieren!) muss. z.B.: „Wenn die 9 vorne steht, hat man bei jeder der neun möglichen Zehnerziffern neun Möglichkeiten für die Einerziffer.“ L soll Beispiele aufschreiben.	Tafel / Arbeitsblatt
<b>4. Lösen der Aufgabe 3 (optional)</b> PA 15 Min.	L beobachtet und hilft mit Tipps. Sammlung von typischen Fehlern.	Arbeitsblatt
<b>5. Sicherung und Reflexion (optional)</b> FEU 10 Min.	Formulierung der Ergebnisse an der Tafel.	Tafel / Arbeitsblatt
<b>6. Problemstellung Aufgabe 4</b> FEU 5 Min.	SuS sollen Beispiele für Aufgabe 4 finden. Vorschläge sammeln. Herausarbeitung der drei Fallunterscheidungen.	Tafel
<b>7. Erarbeitung Aufgabe 4</b> PA 20 Min.	SuS suchen für jeden der drei Fälle die möglichen Zahlenkombinationen, evtl. noch ohne Permutation, in einer zweiten Phase wird dann permutiert. L hilft vor allem bei der Systematik.	Arbeitsblatt
<b>8. Ergebnissicherung</b> FEU 15 Min.	Zusammentragen der Ergebnisse an der Tafel oder auf Folienschnipseln und OH-Projektor bzw. Dokumentenkamera.	Tafel, Folie, Arbeitsblatt