

## Infoblatt

### Das Gefängnis des Sultans

Jedes Jahr zu seinem Geburtstag begnadigt ein mathematikbegeisterter Sultan einige der Gefangenen in seinem Gefängnis mit 1001 Gefängniszellen.

Das Vorgehen ist stets das gleiche: Am Morgen des Geburtstags werden alle Gefangenen in ihren Zellen angekettet. Danach geht der erste Diener des Sultans durch das Gefängnis und öffnet jede Tür. Danach geht der zweite Diener los und schließt jede zweite Tür. Es folgt der dritte Diener, der bei jeder dritten Tür etwas verändert: Wenn die Tür offen ist, schließt er sie, wenn sie geschlossen ist, öffnet er sie. Der vierte Diener tut das Gleiche mit jeder vierten Tür. Der fünfte öffnet oder schließt jede fünfte Tür, ...

Wenn alle 1001 Diener ihre Aufgabe erledigt haben, werden diejenigen Gefangenen von ihren Ketten befreit und in die Freiheit entlassen, bei denen die Zellentür offen steht. Allen anderen müssen bleiben.



- Welche sind die „guten“ Zellennummern - also diejenigen, die ein Gefangener sich wünschen könnte, wenn er möglichst schnell begnadigt werden möchte?
- Warum sind genau diese Zellennummern „gut“?

### Sachanalyse:

Durch Ausprobieren bei den niedrigeren Zellennummern findet man schnell heraus, dass bei den Zellen 1, 4, 9, 16, 25 die Tür am Ende offen ist, bei den anderen Zellen zwischen 1 und 25 jedoch nicht. Dies legt die Vermutung nahe, dass alle Quadratzahlen gute Zellennummern ergeben, was man an weiteren Beispielen prüfen kann.

Ob eine Zelle am Ende offen steht oder nicht, hängt davon ab, ob ihre Zellennummer eine ungerade Anzahl an Teilern hat (= *gute Zelle*) oder eine gerade (= *schlechte Zelle*).

Wenn man die Teiler einer Zahl sucht, so findet man diese in der Regel paarweise. Weiß man zum Beispiel, dass 3 ein Teiler von 42 ist ( $3 \cdot 14 = 42$ ), so ist 14 auch ein Teiler von 42. Man findet also meistens Teilerpaare. Es gibt lediglich eine Ausnahme: Bei Quadratzahlen gibt es einen Teiler, der keinen Partner hat, nämlich die Quadratwurzel der Quadratzahl. Somit haben Quadratzahlen eine ungerade Teileranzahl.

### Ziele und Themen:

- Folgende Problemlösestrategien anwenden:
  - *zunächst einige einfache Beispiele untersuchen*
  - *aus Beispielen eine allgemeine Vermutung ableiten*
- Beschäftigung mit Teilern einer Zahl, Teilerpaaren und Quadratzahlen
- Rechenübungen zur Division und Multiplikation
- Freude an mathematischen Rätseln und Lösungsstrategien entwickeln

### Didaktischer Kommentar

Die Aufgabe, alle guten Zellennummern zu finden, erscheint angesichts der vielen Zellen zunächst schwierig. Da sich aber schnell erste Beispiele für gute Zellen finden lassen, erlaubt die Aufgabe frühe Erfolgserlebnisse. Mit Hilfe von Problemlösestrategien, die die Schülerinnen und Schüler (SuS) bereits in vorherigen Stunden kennengelernt haben (z.B.: *Endziffern bei Potenzen* oder *Eulersche Polyederformel*), können im Verlauf der Stunde wichtige Fortschritte erzielt werden. Dazu sollten die Strategien gemeinsam wieder in Erinnerung gerufen werden.

Zunächst hilft die Strategie *systematisches Ausprobieren*, mehrere Beispiele für schlechte und gute Zellen zu finden. Da die SuS unterschiedlich viele und auch verschiedene Zellennummern finden, ist die Suche selbstdifferenzierend und ergibt durch Zusammenfassen der gemeinsamen Ergebnisse der Lerngruppe schnell eine größere Zahl an Beispielen für gute Zellennummern.

Das Überprüfen, ob die vorgeschlagenen Zellen tatsächlich gute Zellen sind, trainiert den Umgang mit Teilbarkeitsregeln und die Rechenfähigkeiten, da zum Finden aller Teiler einer Zahl dividiert oder „probehalber“ multipliziert werden muss.

### Beispiele untersuchen – mögliches systematisches Vorgehen

Zelle	①	2	3	④	5	6	7	8	⑨	10	11	12	13	14	⑯	17	...		
Welche Diener kommen vorbei?	1	1 2	1 3	1 2 4	1 5	1 2 3 6	1 7	1 2 4 8	1 3 9	1 2 5 10	1 11	1 2 3 4 6 12	1 13	1 2 7 14	1 2 4 8 16	1 17	...		

Diese Darstellung ermöglicht systematisch das Identifizieren guter Zellen (O). Gleichzeitig erhält man einen Überblick über die Teiler der einzelnen Zahlen.

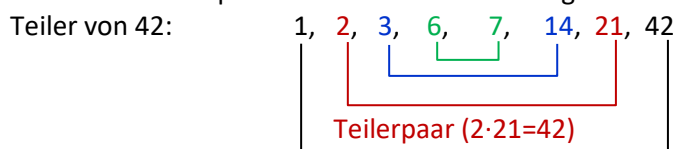
### Erkenntnisse aus den Beispielen

Um zu einer allgemeinen Regel zu gelangen, welche Zellen gut sind, müssen die SuS zunächst entdecken, dass bei einer geraden Anzahl von Dienern, die an der Zelle vorbeikommen, die Tür an Ende zu ist, bei einer ungeraden die Tür am Ende auf. Anschließend beantwortet die Tabelle übersichtlich die Frage nach guten Zellen, indem man die Anzahl der Diener an den einzelnen Zellen zählt. Es sollte auch geklärt werden, dass die Suche nach der Anzahl der Diener, die an der Zelle vorbeikommen, vergleichbar ist mit einer Suche nach den Teilern einer Zellennummer. Falls nötig, kann die Lehrkraft dazu nachfragen, wie man z.B. bei Zelle 63 feststellt, ob Diener 3 (Diener 4, ...) vorbeikommt.

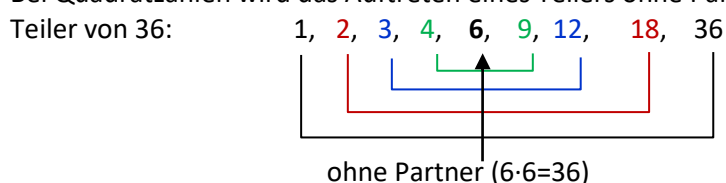
Alle Entdeckungen der SuS sollten angemessen gelobt werden.

### Entwickeln einer Begründung der Quadratzahlen-Vermutung

Auch hier ist eine systematische und übersichtliche Darstellung hilfreich. Im fragend-entwickelnden-Verfahren kann die Lehrkraft die Erkenntnis entwickeln, dass die Teiler meistens in Paaren vorliegen. Dies kann an Beispielen und unter Verwendung von Farben deutlich gemacht werden:



Bei Quadratzahlen wird das Auftreten eines Teilers ohne Partner deutlich hervorgehoben:



## Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler      L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit      PA ... Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit      UG ... Unterrichtsgespräch

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

[illegible]

<b>5. Begründen</b> ca. 15 min UG kurze EA   UG	SuS berichten von ihren Ergebnissen und Ideen. L führt den Begriff „Teilerpaare“ ein und veranschaulicht ihn an Beispielen.  SuS untersuchen Nichtquadratzahlen und Quadratzahlen auf Teilerpaare und ziehen Schlüsse für das Rätsel.  SuS formulieren Begründung, warum genau die Quadratzahlen gute Zellennummern ergeben.  L und SuS halten Begründung fest.	Tafel   Heft, Tafel   Tafel, Heft
<b>6. Ergänzung I</b> ca. 5 ... 10 min EA, PA	„Schätz“frage: Welches ist die größte gute Zellennummer unter den 1001 Zellen? (Sofort antworten, wer am nächsten daran liegt gewinnt.)  SuS suchen (ohne Taschenrechner) die größte gute Zellennummer. SuS suchen und notieren alle guten Zellennummern.	Heft