

## Sachanalyse

Funktionen der Form  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  nennt man reelle Zahlenfolgen, kurz **Folgen**.

$\mathbb{N}$  sei hier die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null.

Beispiel:  $f$  mit  $f(n) = 2n + 1$ .

Durch die „eingeschränkte“ Definitionsmenge lassen sich die Funktionswerte (man sagt: die Folgenglieder) der Reihe nach aufschreiben, hier: 1; 3; 5; 7; ...

Außer der **expliziten Festlegung** mithilfe eines Funktionsterms eröffnet dies die Möglichkeit der so genannten **rekursiven Festlegung** unter Verwendung eines Anfangswertes und einer Rekursionsvorschrift (z.B.  $f(0) = 1$  und  $f(n) = f(n-1) + 2$  für  $n > 0$ ).

**Arithmetische Folgen** sind explizit festgelegt durch einen Term der Form  $b \cdot n + a$  bzw.

rekursiv durch  $f(0) = a$  und  $f(n) = f(n-1) + b$  für  $n > 0$ .

**Geometrische Folgen** sind explizit festgelegt durch einen Term der Form  $a \cdot b^n$  bzw.

rekursiv durch  $f(0) = a$  und  $f(n) = b \cdot f(n-1)$  für  $n > 0$ , jeweils für reelle  $a$  und  $b$ .

Zum Beispiel durch Ausmultiplizieren erkennt man, dass für die Folge  $f$  der **Quadratzahlen** ( $f(n) = n^2$  mit dem Folgenanfang 0; 1; 4; 9; 16; 25; ...) die rekursive Darstellung mit  $f(0) = 0$  und  $f(n) = f(n-1) + (2n - 1)$  für  $n > 0$  gilt.

Man addiert also der Reihe nach die ungeraden Zahlen.

Wegen  $f(n) = f(n-1) + (2n - 1) = f(n-1) + (n - 1) + n$  könnte man sich die Rekursion auch so merken:

Die nächste Quadratzahl erhältst du, indem du die alte und die neue Basis addierst.

$$7^2 = 6^2 + 6 + 7$$

Ein beliebtes Aufgabenformat – in jeder Art von „Intelligenz“-Tests – ist das Auffinden einer Rekursionsvorschrift bzw. einer Fortsetzung zu einem gegebenen Folgenanfang.

Eine aus mathematischer Sicht verwandte Aufgabenstellung ist das Auffinden eines Folgenterms zu einem Folgenanfang bzw. zu einer gegebenen Rekursion.

Es liegt auf der Hand, dass die **Fortsetzung eines Folgenanfangs nicht eindeutig** ist. Die Annahme des Gegenteils ist ein weit verbreitetes Missverständnis.

Zum Beispiel sind mögliche Folgenterme zum Folgenanfang  $f(0) = 1$ ;  $f(1) = 2$ ;  $f(2) = 4$ :

$2^n$ ;  $0,5 \cdot n^2 + 0,5 \cdot n + 1$ ;  $n^3 - 2,5 \cdot n^2 + 2,5 \cdot n + 1$ ;  $2n^3 - 5,5 \cdot n^2 + 4,5 \cdot n + 1$ ;  $3n^3 - 8,5 \cdot n^2 + 6,5 \cdot n + 1$  usw.

Allgemein findet man zu jedem Folgenanfang der Länge  $k+1$  eindeutig ein Polynom maximal  $k$ -ten Grades und damit natürlich unendlich viele weitere höheren Grades.

Interpolationsformel von LAGRANGE für das obige Beispiel:

$$P(x) = 1 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{(0-1) \cdot (0-2)} + 2 \cdot \frac{(x-0) \cdot (x-2)}{(1-0) \cdot (1-2)} + 4 \cdot \frac{(x-0) \cdot (x-1)}{(2-0) \cdot (2-1)}$$

Eine geniale Konstruktion: Setzt man für  $x$  die Zahlen 0; 1 oder 2 ein, so haben stets zwei der drei Brüche den Wert 0, der dritte den Wert 1. Durch die Gewichtung mit dem betreffenden Funktionswert erhält man das Gewünschte.

**Infoblatt**
**Didaktische Bemerkungen und Unterrichtsablauf:**

**Drei Aufgabenformate** werden mit jeweils einem Arbeitsblatt bearbeitet:

- zu einer gegebenen Rekursion einen Folgenanfang weiterführen
- zu einem Folgenanfang eine Rekursion finden (hier ist, ohne dies weiter zu thematisieren, an die „nächstliegende“ Rekursion gedacht) und den Anfang fortsetzen
- zu gegebenen Folgengliedern (hier:  $n \geq 1$ ) einen Folgenterm finden

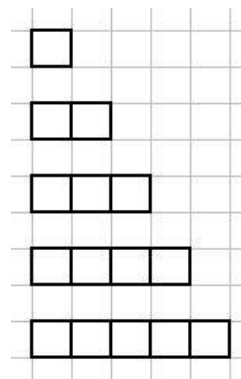
**Zum Einstieg:**

Zunächst: Wiederholung der Quadratzahlen (bis  $15^2$ ) und der Zweierpotenzen (bis  $2^6$ ) in spielerischer Form, z.B. Mathe-Fußball.

Dann: Erörterung der Fragen zur Quadrat-Figurenfolge (vgl. Abb. rechts):

- Aus wie vielen Strecken besteht jede Figur?
- Wie viele Strecken kommen von einer Figur zur nächsten dazu (rekursiv)?
- Wie kann man von der Anzahl der Quadrate in einer Figur direkt auf die Anzahl der Strecken schließen (explizit)?

[Folge: 4; 7; 10; 13; 16; ... | „immer „+3“ | Anzahl  $\cdot 3 + 1$ ]



Vor der Bearbeitung der Arbeitsblätter wird man jeweils zunächst **einige Beispiele gemeinsam** (s.u.) besprechen und die Schülerinnen und Schüler (SuS) dann selbständig rechnen lassen. Die Lehrkraft kontrolliert, ob die SuS die **angebotene Problemöglichkeit** wahrnehmen, sie sollen die erfolgreich durchgeführte Probe mit einem „✓“ bestätigen, auch bei Arbeitsblatt 3. Die vermutete Regel soll an den Zahlenpaaren der Tabelle verifiziert werden.

Das Suchfeld bei den Arbeitsblättern bewegt sich hauptsächlich im Bereich der arithmetischen und geometrischen Folgen sowie der Folge der Quadratzahlen (s.o.).

**Zum Arbeitsblatt 1: (rekursiv – Blickrichtung: von links nach rechts)**

- Addiere immer 2,7; Startzahl: 4,5
- Multipliziere immer mit 3; Startzahl: 1
- Addiere immer 2 und nimm dann den Kehrwert; Startzahl 1

**Zum Arbeitsblatt 2: (rekursiv – Blickrichtung: von links nach rechts)**

- 5; 4,85; 4,7; 4,55; ... → subtrahiere immer 0,15
- 1600; 800; 400; 200; ... → dividiere immer durch 2
- 225; 196; 169; 144; ... → Quadratzahlen rückwärts

**Zum Arbeitsblatt 3: (explizit – Blickrichtung: paarweise von oben nach unten)**

- |     |   |     |   |     |                  |
|-----|---|-----|---|-----|------------------|
| 1   | 2 | 3   | 4 | 5   | Nummer           |
| 1,5 | 3 | 4,5 | 6 | 7,5 | → Nummer mal 1,5 |
- |    |    |    |    |    |                        |
|----|----|----|----|----|------------------------|
| 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | Nummer                 |
| 12 | 22 | 32 | 42 | 52 | → Nummer mal 10 plus 2 |
- |   |   |    |    |     |                 |
|---|---|----|----|-----|-----------------|
| 1 | 2 | 3  | 4  | 5   | Nummer          |
| 1 | 8 | 27 | 64 | 125 | → Nummer hoch 3 |

**Ziele:**

- Kopfrechnen – auch: Brüche und Dezimalzahlen
- Kenntnis der Quadratzahlen und Zweierpotenzen

Führe die Folge weiter bis zur angegebenen **Zahl** (Probe!).

1.) Addiere immer 7: 3; 10; 17; .....; .....; .....; .....; .....; **59**

2.) Subtrahiere immer 9: 433; 424; 415; .....; .....; .....; .....; .....; **361**

3.) Addiere immer 1,3: 1; 2,3; 3,6; .....; .....; .....; .....; .....; **11,4**

4.) Addiere immer 0,6: 2,5; 3,1; 3,7; .....; .....; .....; .....; .....; **7,3**

5.) Subtrahiere immer 0,8: 20; 19,2; 18,4; .....; .....; .....; .....; .....; **13,6**

6.) Subtrahiere immer 1,4: 100; 98,6; 97,2; .....; .....; .....; .....; .....; **88,8**

7.) Multipliziere immer mit 2: 2; 4; 8; .....; .....; .....; .....; .....; **1024**

8.) Multipliziere immer mit 5: 0,008; 0,04; .....; .....; .....; .....; .....; **625**

9.) Dividiere immer durch 2: 1536; 768; 384; .....; .....; .....; .....; .....; **3**

10.) Dividiere immer durch 5: 125000; 25000; 5000; .....; .....; .....; .....; .....; **1,6**

11.) Multipliziere immer mit 0,2: 625; 125; 25; .....; .....; .....; .....; .....; **0,04**

12.) Multipliziere immer mit -2: 1; -2; 4; .....; .....; .....; .....; .....; **256**

13.) Addiere der Reihe nach die ungeraden Zahlen 9; 11; 13; 15 usw.:

16; 25; 36; 49; .....; .....; .....; .....; .....; **169**

14.) Addiere 1 und nimm anschließend den Kehrwert:  $1; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \dots; \dots; \dots; \dots; \dots; \frac{21}{34}$

15.) Addiere der Reihe nach  $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots; 0; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \dots; \dots; \dots; \frac{63}{64}$

\*\* Wie heißt der nächste Buchstabe in dieser Folge? A, C; F; J; O; ?

**Führe die Folge weiter bis zur angegebenen Zahl (Probe!). Lösungen**

 1.) Addiere immer 7: 3; 10; 17; 24; 31; 38; 45; 52; 59 ✓

 2.) Subtrahiere immer 9: 433; 424; 415; 406; 397; 388; 379; 370; 361 ✓

 3.) Addiere immer 1,3: 1; 2,3; 3,6; 4,9; 6,2; 7,5; 8,8; 10,1; 11,4 ✓

 4.) Addiere immer 0,6: 2,5; 3,1; 3,7; 4,3; 4,9; 5,5; 6,1; 6,7; 7,3 ✓

 5.) Subtrahiere immer 0,8: 20; 19,2; 18,4; 17,6; 16,8; 16,0; 15,2; 14,4; 13,6 ✓

 6.) Subtrahiere immer 1,4: 100; 98,6; 97,2; 95,8; 94,4; 93,0; 91,6; 90,2; 88,8 ✓

 7.) Multipliziere immer mit 2: 2; 4; 8; 16; 32; 64; 128; 256; 512; 1024 ✓

 8.) Multipliziere immer mit 5: 0,008; 0,04; 0,2; 1; 5; 25; 125; 625 ✓

 9.) Dividiere immer durch 2: 1536; 768; 384; 192; 96; 48; 24; 12; 6; 3 ✓

 10.) Dividiere immer durch 5: 125000; 25000; 5000; 1000; 200; 40; 8; 1,6 ✓

 11.) Multipliziere immer mit 0,2: 625; 125; 25; 5; 1; 0,2; 0,04 ✓

 12.) Multipliziere immer mit -2: 1; -2; 4; -8; 16; -32; 64; -128; 256 ✓

13.) Addiere der Reihe nach die ungeraden Zahlen 9; 11; 13; 15 usw.:

 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; 121; 144; 169 ✓

 14.) Addiere 1 und nimm anschließend den Kehrwert:  $1; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{5}{8}; \frac{8}{13}; \frac{13}{21}; \frac{21}{34}$  ✓

 15.) Addiere der Reihe nach  $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8};$  usw.:  $0; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{7}{8}; \frac{15}{16}; \frac{31}{32}; \frac{63}{64}$  ✓

\*\* Wie heißt der nächste Buchstabe in dieser Folge? A, C; F; J; O; ? Der nächste Buchstabe heißt: U.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2		3							4								5			Buchstaben dazwischen				

Führe die Folge weiter bis zur angegebenen **Zahl** (Probe!) und gib an, wie du von einer Zahl zur nächsten kommst.

1.) 3; 9; 15; 21; .....; .....; .....; .....; **51** .....

2.) 3; 4,5; 6; 7,5; .....; .....; .....; .....; **15** .....

3.) 14; 11,5; 9; 6,5; .....; .....; .....; **-3,5** .....

4.) 0,03; 0,06; 0,12; 0,24; .....; .....; .....; **3,84** .....

5.) 0,02; 0,1; 0,18; 0,26; .....; .....; .....; .....; **0,66** .....

6.) -26; -21; -16; -11; .....; .....; .....; .....; .....; **19** .....

7.) 20,48; 10,24; 5,12; 2,56; .....; .....; .....; .....; .....; **0,04** .....

8.) 31; 25,5; 20; 14,5; .....; .....; .....; .....; .....; **-18,5** .....

9.) 36; 49; 64; 81; .....; .....; .....; .....; .....; **225** .....

10.) 5; 6; 8; 11; 15; .....; .....; .....; .....; **50** .....

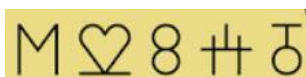
11.) 3; 4; 2; 5; 1; .....; .....; .....; .....; .....; **-2** .....

12.) -21; -19; -15; -9; .....; .....; .....; .....; .....; **69** .....

13.) 2181; 729; 243; 81; .....; .....; .....; .....; .....;  **$\frac{1}{9}$**  .....

14.) 81; 27; 54; 18; .....; .....; .....; .....; **16** .....

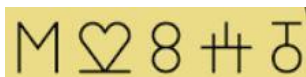
\*\* Wie geht es weiter?



Führe die Folge weiter bis zur angegebenen **Zahl** (Probe!) und gib an, wie du von einer Zahl zur nächsten kommst. **Lösungen**

- 1.) 3; 9; 15; 21; 27; 33; 39; 45; 51 ✓ → immer 6 addieren
- 2.) 3; 4,5; 6; 7,5; 9; 10,5; 12; 13,5; 15 ✓ → immer 1,5 addieren
- 3.) 14; 11,5; 9; 6,5; 4; 1,5; -1; -3,5 ✓ → immer 2,5 subtrahieren
- 4.) 0,03; 0,06; 0,12; 0,24; 0,48; 0,96; 1,92; 3,84 ✓ → immer mit 2 multiplizieren
- 5.) 0,02; 0,1; 0,18; 0,26; 0,34; 0,42; 0,50; 0,58; 0,66 ✓ → immer 0,8 addieren
- 6.) -26; -21; -16; -11; -6; -1; 4; 9; 14; 19 ✓ → immer 5 addieren
- 7.) 20,48; 10,24; 5,12; 2,56; 1,28; 0,64; 0,32; 0,16; 0,08; 0,04 ✓ → immer durch 2 dividieren
- 8.) 31; 25,5; 20; 14,5; 9; 3,5; -2; -7,5; -13; -18,5 ✓ → immer 5,5 subtrahieren
- 9.) 36; 49; 64; 81; 100; 121; 144; 169; 196; 225 ✓ → Quadratzahlen
- 10.) 5; 6; 8; 11; 15; 20; 26; 33; 41; 50 ✓ → +1 | +2 | +3 | +4 usw.
- 11.) 3; 4; 2; 5; 1; 6; 0; 7; -1; 8; -2 ✓ → +1 | -2 | +3 | -4 usw.
- 12.) -21; -19; -15; -9; -1; 9; 21; 35; 51; 69 ✓ → +2 | +4 | +6 | +8 usw.
- 13.) 2181; 729; 243; 81; 27; 9; 3; 1;  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{9}$  ✓ → immer durch 3 dividieren
- 14.) 81; 27; 54; 18; 36; 12; 24; 8; 16 ✓ → :3 | · 2 | :3 | · 2 usw.

\*\* Wie geht es weiter?



Etwa so:



Hier stehen die Ziffern 1; 2; 3; 4 und 5 jeweils mit Spiegelbild (Spiegelachse am linken Rand der Ziffer).

Finde eine Regel, wie man mit der Nummer des Folgenglieds seinen Wert ausrechnen kann.

1.) Regel: .....

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	4	5	6	7	8	9	10

2.) Regel: .....

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	4	8	12	16	20	24	28

3.) Regel: .....

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	1	0,5		0,25	0,2		

Tipp: Schreibe die Werte jeweils als Bruch.

4.) Regel: .....

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	1	4	9	16	25	36	49

5.) Regel: .....

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	-4	-3	-2	-1	0	1	2

6.) Regel: .....

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1

7.) Regel: .....

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	105	205	305	405	505	605	705

8.) Regel: .....

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	16	25	36	49	64	81	100

9.) Regel: .....

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	2	4	8	16	32	64	128

Finde eine Regel, wie man mit der Nummer des Folgenglieds seinen Wert ausrechnen kann **Lösungen**
1.) Regel: **Nummer plus 3**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	4 ✓	5 ✓	6 ✓	7 ✓	8 ✓	9 ✓	10 ✓

2.) Regel: **Nummer mal 4**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	4 ✓	8 ✓	12 ✓	16 ✓	20 ✓	24 ✓	28 ✓

3.) Regel: **Kehrwert der Nummer (oder: 1 geteilt durch die Nummer)**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	1 ✓	$0,5 = \frac{1}{2}$ ✓		$0,25 = \frac{1}{4}$ ✓	$0,2 = \frac{1}{5}$ ✓		

Tipp: Schreibe die Werte jeweils als Bruch.

4.) Regel: **Nummer mal Nummer (oder: Nummer zum Quadrat)**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	1 ✓	4 ✓	9 ✓	16 ✓	25 ✓	36 ✓	49 ✓

5.) Regel: **Nummer minus 5**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	-4 ✓	-3 ✓	-2 ✓	-1 ✓	0 ✓	1 ✓	2 ✓

6.) Regel: **Nummer mal 0,3**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	0,3 ✓	0,6 ✓	0,9 ✓	1,2 ✓	1,5 ✓	1,8 ✓	2,1 ✓

7.) Regel: **Nummer mal 100 plus 5**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	105 ✓	205 ✓	305 ✓	405 ✓	505 ✓	605 ✓	705 ✓

8.) Regel: **Nummer plus 3 zum Quadrat**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	16 ✓	25 ✓	36 ✓	49 ✓	64 ✓	81 ✓	100 ✓

9.) Regel: **2 hoch Nummer**

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	2 ✓	4 ✓	8 ✓	16 ✓	32 ✓	64 ✓	128 ✓