

**Infoblatt**
**Sachanalyse:**

Stammbrüche sind Brüche mit dem Zähler 1. Sie sind die ältesten Brüche, die man kennt. Gegenüber anderen Brüchen zeichnen sie sich aus, weil man nur eine Zahl (den Nenner) zu ihrer Beschreibung benötigt. Deshalb kann man auch einfachere Rechenregeln für Stammbrüche formulieren:

Man erhält das Produkt zweier Stammbrüche, indem man die Nenner multipliziert. Das ist dann der Nenner des Produkt-Stammbruchs.

Die Summe zweier Stammbrüche ist in der Regel kein Stammbruch. Der Summenbruch hat als Zähler die Summe der Nenner und als Nenner das Produkt der Nenner der jeweiligen Summanden.

Problemstellung: Lässt sich 1 als Summe dreier Stammbrüche darstellen?

Lösung: es gibt genau 3 Darstellungen

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

Viel schwieriger ist es zu zeigen, dass es keine weiteren Darstellungen gibt. Dazu muss man diese Summen systematisch aufschreiben.

Die Stammbrüche kann man leicht in eine Reihenfolge bringen:  $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$  Diese Folge ist streng

monoton abnehmend. Da man die Summanden vertauschen kann, schreiben wir die Summen so auf, dass die Summanden abnehmen oder gleichbleiben. Der dritte Summand ergibt sich automatisch als Ergänzung zu 1. Ist er größer als der Vorgänger, dann gibt es keine weiteren.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1 \quad 0 \text{ ist kein Stammbruch.}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = 1 \quad \frac{3}{10} \text{ ist größer als } \frac{1}{5}, \text{ fertig mit } \frac{1}{2} \text{ als erster Summand.}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = 1 \quad \frac{5}{12} \text{ ist größer als } \frac{1}{4}, \text{ fertig mit } \frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \quad \frac{1}{2} \text{ ist größer als } \frac{1}{4}; \text{ fertig mit } \frac{1}{4}.$$

Jetzt geht es nicht mehr weiter, weil man als dritten Summanden einen größer als  $\frac{1}{2}$  benötigen würde.

**Ziele:**

- erkennen, dass man schwierige Aufgaben durch Anwendung universeller Problemlösestrategien lösen kann
- die Problemlösestrategie *systematisch vorgehen* erproben
- ganz nebenbei: Addition von Brüchen üben

**Didaktischer Kommentar**

Die Aufgabe hat von der mathematischen Erkenntnis keinen besonders hohen Anreiz. Der historische Gedanke, dass im alten Ägypten nur mit Stammbrüchen gerechnet wurde, kann dem ein wenig entgegenwirken. Es bietet auch einen Exkurs bei zu viel verfügbarer Restzeit (z.B. 90 Min.-Unterricht) an. Motto: Braucht man überhaupt andere als Stammbrüche?

Auch hier sollte der Fokus auf die Frage "Haben wir alle?" gelegt werden. Dabei kommt die Problemlösestrategie *systematisch aufschreiben* zum Tragen. Das sollte dann auch betont werden. Man macht sich die Aufgabe einfacher, wenn man die Kommutativität der Addition berücksichtigt und die ersten beiden Summanden so aufschreibt, dass der erste nie kleiner als der zweite ist. Der dritte Summand ergibt sich als Ergänzung zur 1. Wenn dann dieser größer als der zweite Summand ist, dann ist man mit dieser Reihe fertig.

Dies ist schwierig und kann motiviert werden, indem man zuerst einmal auf dieses Absteigen der Summanden verzichtet und die entstehenden Doppelungen thematisiert. Können wir diese vermeiden?

Man kann das Aufschreiben auch an der Aufgabe 10 als Summe dreier natürlicher Zahlen üben:

$10 = 10 + 0 + 0$ ;  $10 = 9 + 1 + 0$ ;  $10 = 8 + 2 + 0$ ;  $10 = 8 + 1 + 1$ ;  $10 = 7 + 3 + 0$ ;  $10 = 7 + 2 + 1...$

Warum schreibt man nicht  $10 = 9 + 0 + 1$ ?

Die Rechenregeln für Stammbrüche sind optional zu behandeln. Sie helfen, sich noch einmal mit den Rechenregeln für Brüche auseinanderzusetzen. Man kann diesen Abschnitt auch als Puffer ans Ende setzen, oder eben an den Anfang, wenn man schon weiß, dass viel Zeit ist.

Insgesamt ist nicht der Inhalt, sondern der Weg dazu das Ziel. Insbesondere geht es um das Üben beim Bruchrechnen und um systematisches Aufschreiben, nicht aber um die Stammbrüche als solche.

## Tafelanschrieb

Rechenregeln für Stammbrüche:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$$

Stammbrüche werden multipliziert, indem man die Nenner multipliziert.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{3 \cdot 4} = \frac{7}{12}$$

Stammbrüche werden addiert, indem man die Summe der Nenner in den Zähler und das Produkt der Nenner in den Nenner schreibt.

Stammbrüche

Ein Stammbruch ist ein Bruch mit Zähler 1, z.B.  $\frac{1}{3}$ .

Der Stammbruch  $\frac{1}{3}$  teilt ein Ganzes in 3 Teile.

Wie kann man ein Ganzes aus Stammbrüchen zusammenfügen?

Beispiel:  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

Suche alle Möglichkeiten 1 als Summe dreier Stammbrüche darzustellen.

Lösung:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

Systematisch aufschreiben:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1 \dots 0 \text{ ist kein Stammbruch.}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = 1$$

$\frac{3}{10}$  ist größer als  $\frac{1}{5}$ , fertig mit  $\frac{1}{2}$  als erster Summand.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = 1 \quad \frac{5}{12} \text{ ist größer als } \frac{1}{4}, \text{ fertig mit } \frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \quad \frac{1}{2} \text{ ist größer als } \frac{1}{4}; \text{ fertig mit } \frac{1}{4}$$

jetzt immer größer als der Vorgänger, also haben wir alle.

**Verlaufsplan**

SuS ... Schülerinnen und Schüler    L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit    PA ... Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit    FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf 5. und 6. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
<b>1. Problemstellung und Motivation</b> FEU 5 Min.	L erklärt, was ein Stammbruch ist, evtl. Geschichte der Stammbrüche, z.B: <a href="http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/aegyptischedarstellung.htm">http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/aegyptischedarstellung.htm</a>	Tafel
<b>2. Erarbeitung I</b> optional FEU 10 Min.	Rechenregeln für Stammbrüche: Kann man die Regeln zum Addieren und Subtrahieren von Brüchen für Stammbrüche vereinfachen?	Tafel
<b>3. Problemstellung</b> FEU 5 Min.	Interpretation eines Stammbruchs $\frac{1}{3}$ als Zerlegung von einem Ganzen in 3 Teile. Kann man ein Ganzes als Summe von Stammbrüchen darstellen?  Z.B. ist $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ die einzige Möglichkeit mit 2 Summanden.  Warum gibt es keine weiteren? Problem: Auf wie viele Weisen kann man 1 als Summe von 3 Stammbrüchen darstellen?	Tafel
<b>4. Erarbeitung II</b> EA 10 Min.	Suche möglichst viele Summen. L läuft umher und gibt den SuS Tipps.	Heft
<b>5. Sicherung</b> FEU 5 Min.	L trägt die gefundenen Summen an der Tafel zusammen.	Tafel
<b>6. Problemstellung und Erarbeitung III</b> PA 15 Min.	Sind das alle? Hinweis auf Strategie <i>systematisch aufschreiben</i>	Heft
<b>7. Reflexion</b> FEU 10 Min.	Diskussion: Warum können wir sicher sein, dass es nicht mehr Summen gibt?	