

Sachanalyse

Funktionen der Form $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ nennt man reelle Zahlenfolgen, kurz **Folgen**.

\mathbb{N} sei hier die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null.

Beispiel: f mit $f(n) = 2n + 1$.

Durch die „eingeschränkte“ Definitionsmenge lassen sich die Funktionswerte (man sagt: die Folgenglieder) der Reihe nach aufschreiben, hier: 1; 3; 5; 7; ...

Außer der **expliziten Festlegung** mithilfe eines Funktionsterms eröffnet dies die Möglichkeit der so genannten **rekursiven Festlegung** unter Verwendung eines Anfangswertes und einer Rekursionsvorschrift (z.B. $f(0) = 1$ und $f(n) = f(n-1) + 2$ für $n > 0$).

Arithmetische Folgen sind explizit festgelegt durch einen Term der Form $b \cdot n + a$ bzw.

rekursiv durch $f(0) = a$ und $f(n) = f(n-1) + b$ für $n > 0$.

Geometrische Folgen sind explizit festgelegt durch einen Term der Form $a \cdot b^n$ bzw.

rekursiv durch $f(0) = a$ und $f(n) = b \cdot f(n-1)$ für $n > 0$, jeweils für reelle a und b .

Zum Beispiel durch Ausmultiplizieren erkennt man, dass für die Folge f der **Quadratzahlen** ($f(n) = n^2$ mit dem Folgenanfang 0; 1; 4; 9; 16; 25; ...) die rekursive Darstellung mit **$f(0) = 0$ und $f(n) = f(n-1) + (2n - 1)$** für $n > 0$ gilt.

Man addiert also der Reihe nach die ungeraden Zahlen.

Wegen $f(n) = f(n-1) + (2n - 1) = f(n-1) + (n - 1) + n$ könnte man sich die Rekursion auch so merken:

Die nächste Quadratzahl erhältst du, indem du die alte und die neue Basis addierst.

$$7^2 = 6^2 + 6 + 7$$

Ein beliebtes Aufgabenformat – in jeder Art von „Intelligenz“-Tests – ist das Auffinden einer Rekursionsvorschrift bzw. einer Fortsetzung zu einem gegebenen Folgenanfang.

Eine aus mathematischer Sicht verwandte Aufgabenstellung ist das Auffinden eines Folgenterms zu einem Folgenanfang bzw. zu einer gegebenen Rekursion.

Es liegt auf der Hand, dass die **Fortsetzung eines Folgenanfangs nicht eindeutig** ist.

Zum Beispiel sind mögliche Folgenterme zum Folgenanfang $f(0) = 1; f(1) = 2; f(2) = 4$:

2^n ; $0,5 \cdot n^2 + 0,5 \cdot n + 1$; $n^3 - 2,5 \cdot n^2 + 2,5 \cdot n + 1$; $2n^3 - 5,5 \cdot n^2 + 4,5 \cdot n + 1$; $3n^3 - 8,5 \cdot n^2 + 6,5 \cdot n + 1$ usw.

Allgemein findet man zu jedem Folgenanfang der Länge $k+1$ eindeutig ein Polynom maximal k -ten Grades und damit natürlich unendlich viele weitere.

Interpolationsformel von LAGRANGE für das obige Beispiel:

$$P(x) = 1 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2)}{(0-1) \cdot (0-2)} + 2 \cdot \frac{(x-0) \cdot (x-2)}{(1-0) \cdot (1-2)} + 4 \cdot \frac{(x-0) \cdot (x-1)}{(2-0) \cdot (2-1)}$$

Eine geniale Konstruktion: Setzt man für x die Zahlen 0; 1 oder 2 ein, so haben stets zwei der drei Brüche den Wert 0, der dritte den Wert 1. Durch die Gewichtung mit dem betreffenden Funktionswert erhält man das Gewünschte.

Infoblatt

Didaktische Bemerkungen und Unterrichtsablauf:

Drei Aufgabenformate werden mit jeweils einem Arbeitsblatt bearbeitet:

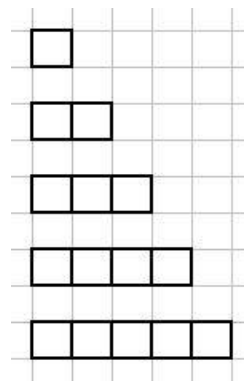
- zu einer gegebenen Rekursion einen Folgenanfang weiterführen
- zu einem Folgenanfang eine Rekursion finden (hier ist, ohne dies weiter zu thematisieren, an die „nächstliegende“ Rekursion gedacht) und den Anfang fortsetzen
- zu gegebenen Folgengliedern (hier: $n \geq 1$) einen Folgenterm finden

Zum Einstieg:

Zunächst: Wiederholung der Quadratzahlen (bis 20^2) und der Zweierpotenzen (bis 2^{10}) in spielerischer Form, z.B. Mathe-Fußball.

Dann: Erörterung der Fragen zur Quadrat-Figurenfolge (vgl. Abb. rechts):

- Aus wie vielen Strecken besteht jede Figur?
- Wie viele Strecken kommen von einer Figur zur nächsten dazu (Rekursion)?
- Wie kann man von der Anzahl der Quadrate in einer Figur direkt auf die Anzahl der Strecken schließen?



Bei den Arbeitsblättern wird man zunächst **einige Beispiele gemeinsam** (s.u.) besprechen und die Schülerinnen und Schüler (SuS) dann selbständig rechnen lassen. Das Suchfeld bei den Arbeitsblättern bewegt sich hauptsächlich im Bereich der arithmetischen und geometrischen Folgen sowie der Folge der Quadratzahlen (s.o.).

Zum Arbeitsblatt 1:

- Addiere immer 2,7; Startzahl: 4,5
- Multipliziere immer mit 3; Startzahl: 1
- Addiere immer 2 und nimm dann den Kehrwert; Startzahl 1

Zum Arbeitsblatt 2:

- 5; 4,85; 4,7; 4,55; ...
- 1600; 800; 400; 200; ...
- 289; 256; 225; 196; ...

Zum Arbeitsblatt 3:

- | | | | | |
|----|----|----|----|------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | Nummer |
| 12 | 22 | 32 | 42 | → Nummer mal 10 plus 2 |
- | | | | | |
|---|---|---|-----|--------------------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | Nummer |
| 6 | 3 | 2 | 1,5 | → 6 geteilt durch Nummer |
- | | | | | |
|---|---|----|----|-----------------|
| 1 | 2 | 3 | 4 | Nummer |
| 1 | 8 | 27 | 64 | → Nummer hoch 3 |

Ziele:

- Kopfrechnen (auch: Brüche und Dezimalzahlen)
- Kenntnis der Quadratzahlen und Zweierpotenzen

Führe die Folge weiter bis zur angegebenen Zahl (Probe!).

1.) Addiere immer 7: 3; 10; 17;;;;;; 59

2.) Subtrahiere immer 9: 433; 424; 415;;;;;; 361

3.) Addiere immer 1,3: 1; 2,3; 3,6;;;;;; 11,4

4.) Addiere immer 0,6: 2,5; 3,1; 3,7;;;;;; 7,3

5.) Subtrahiere immer 0,8: 20; 19,2; 18,4;;;;;; 13,6

6.) Subtrahiere immer 1,4: 100; 98,6; 97,2;;;;;; 88,8

7.) Multipliziere immer mit 2: 2; 4; 8;;;;;; 1024

8.) Multipliziere immer mit 5: 0,00032; 0,0016; 0,008;;;;;; 25

9.) Dividiere immer durch 2: 768; 384; 192;;;;;; 3

10.) Dividiere immer durch 5: 25000; 5000; 1000;;;;;; 0,32

11.) Multipliziere immer mit 0,4: 781,25; 312,5; 125;;;;;; 3,2

12.) Multipliziere immer mit -2: 1; -2; 4;;;;;; 256

13.) Addiere der Reihe nach die ungeraden Zahlen 9; 11; 13; 15 usw.:

16; 25; 36; 49;;;;;; 169

14.) Addiere der Reihe nach die Zahlen 1; -2; 3; -4; 5 usw.: 0; 1; -1; 2;;;;; 4

15.) Addiere 1 und nimm anschließend den Kehrwert: $1; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \dots; \dots; \dots; \dots; \dots$; $\frac{21}{34}$

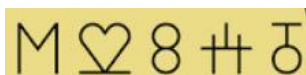
16.) Addiere der Reihe nach $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots; \dots; \dots; \dots; \dots$; $\frac{63}{64}$

** Wie heißt der nächste Buchstabe in dieser Folge? A; C; F; J; O; ?

Führe die Folge weiter bis zur angegebenen Zahl (Probe!) und gib an, wie du von einer Zahl zur nächsten kommst.

- 1.) 3; 9; 15;;;;;;; 51
- 2.) 3; 2,89; 2,78;;;;;;; 2,12
- 3.) 3; 2,2; 1,4;;;;;;; -4,2
- 4.) 0,02; 0,1; 0,5;;;; 312,5
- 5.) 0,02; 0,1; 0,18;;;;;;; 0,66
- 6.) -11; -6; -1;;;;;;; 29
- 7.) 10,24; 5,12; 2,56;;;;;;; 0,04
- 8.) 25,5; 20; 14,5;;;;;;; -18,5
- 9.) 36; 49; 64; 81;;;;;; 225
- 10.) 5; 6; 8; 11;;;;;; 50
- 11.) 3; 4; 2; 5; 1;;;;;; -2
- 12.) -11; -10; -8; -5;;;;;; 34
- 13.) 729; 243; 81;;;;;;; $\frac{1}{9}$
- 14.) $-\frac{2}{3}$; 2; -6;;;;;;; 1458
- 15.) $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; 1;;;;;;; 3

** Wie geht es weiter?



.....

Finde eine Regel, wie man mit der Nummer des Folgenglieds seinen Wert ausrechnen kann.

1.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	4	5	6	7	8	9	10

2.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	4	8	12	16	20	24	28

3.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	1	0,5		0,25	0,2		

4.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	1	4	9	16	25	36	49

5.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	-4	-3	-2	-1	0	1	2

6.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1

7.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	2	5	10	17	26	37	50

8.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	16	25	36	49	64	81	100

9.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	8	16	32	64	128	256	512

10.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	4	2		1	0,8		

11.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	6	11	16	21	26	31	36

12.) Regel:

Nummer:	1	2	3	4	5	6	7
Wert:	7	10	13	16	19	22	25