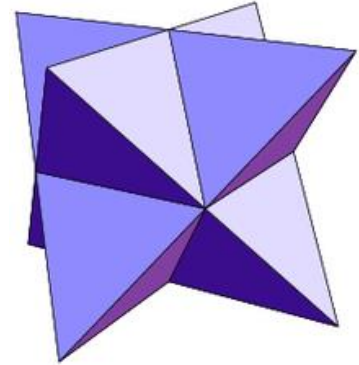


Sachanalyse

Der Keplerstern

Der nach JOHANNES KEPLER (1571 – 1630) benannte „Keplerstern“ wird auch als Sterntetraeder bezeichnet. Er ist ein achtstrahliger Stern und gehört zu den nicht-konvexen Deltaedern (Deltaeder haben als Seitenflächen nur gleichseitige Dreiecke, bei nichtkonvexen liegen die Verbindungsstrecken zwischen zwei Punkten des Polyeders nicht unbedingt auch im Polyeder). Der Keplerstern entsteht durch Verschmelzung zweier punktsymmetrischer Tetraeder.



Die äußeren Eckpunkte des Körpers beschreiben einen Würfel. Dies kann gut veranschaulicht werden, indem Schnüre von einer Ecke zur nächsten angeklebt werden.

Die Schnittmenge der beiden Tetraeder stellt ein Oktaeder dar, dessen Kanten wiederum die Innenkanten des Sterntetraeders darstellen.

Erstmals dargestellt wurde das Sterntetraeder durch LEONARDO DA VINCI in LUCA PACIOLIS *De Divina Proportione* 1509. Auch der Grafiker M. C. ESCHER hat das Sterntetraeder als Motiv für das Bild *Doppelplanetoid* verwendet: Das eine Tetraeder hat die Form einer von Menschen bewohnten Burg, während das andere eine mit dem ersten durchdrungene, von Dinosauriern bewohnte Welt darstellt.

Ecken, Kanten und Seitenflächen:

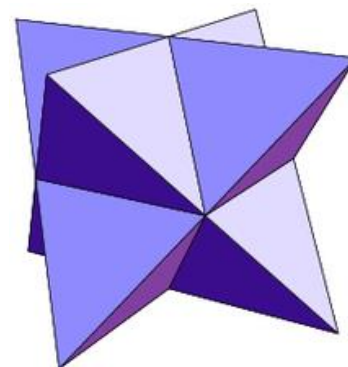
Das Sterntetraeder hat $e = 5 + 4 + 5 = 14$ Ecken, $k = 8 \cdot 3 + 12 = 36$ Kanten und $f = 3 \cdot 8 = 24$ Seitenflächen.

Es erfüllt also auch die eulersche Polyederformel ($k = e + f - 2$), obwohl es kein konvexes Polyeder ist. Schüler und Schülerinnen verwundert dies oft. Sie folgern oft aus der Gültigkeit der Eulerschen Polyederformel, dass für nichtkonvexe Polyeder $k \neq e + f - 2$ ist (\rightarrow Nichtumkehrbarkeit, vgl. didaktischen Kommentar zur Eulerschen Polyederformel). Betrachtet man die beiden Tetraeder, die sich durchdringen, sind die Daten $e = 8$, $k = 12$ und $f = 8$.

Infoblatt

Didaktischer Kommentar:

Schön aufgebaute regelmäßige Figuren üben auf die meisten Menschen eine Faszination aus und stellen so eine Motivation für Mathematik dar. Im Zentrum der Stunde steht der nach JOHANNES KEPLER benannte „Keplerstern“. Dieser wird zunächst gebastelt. Dabei wird die Feinmotorik der Schülerinnen und Schüler (SuS) geschult und zugleich üben sie, Informationen (aus der Anleitung) zu verstehen und umzusetzen.



Die Untersuchung des gebastelten Sterns schult den Umgang mit Fachbegriffen (Polyeder, Ecke, Kante...) sowie das räumliche Vorstellungsvermögen. Letzteres ist in der Regel unterschiedlich stark ausgeprägt. Bei Schwierigkeiten können die SuS folgendermaßen unterstützt werden:

- Indem Schnüre von einer Ecke zur nächsten angeklebt werden, kann veranschaulicht werden, dass die Tetraederecken einen Würfel bilden.
- Dass die 8 Tetraeder ein Oktaeder einschließen, wird deutlich, wenn man mit den „Steckerle“ 8 Tetraeder (incl. Bodenfläche) baut und zum Keplerstern zusammensetzt. Baut man nun die äußeren Dreiecksflächen ab, so bleibt ein Oktaeder übrig.

Folgende Erweiterungsmöglichkeit ist denkbar:

Falls die SuS bereits wissen, wie der Flächeninhalt von Dreiecken berechnet wird, kann noch die Oberfläche des Sterntetraeders berechnet werden: Sie setzt sich aus $3 \cdot 8 = 24$ gleichseitigen Dreiecken zusammen. Die Formel für den Inhalt gleichseitiger Dreiecke kennen die Schülerinnen und Schüler noch nicht. Sie müssen die Höhe der Dreiecke ausmessen. Es gilt dann: $O_{\text{Keplerstern}} = 24 \cdot \text{Grundseite}_{\text{Dreieck}} \cdot \text{Höhe}_{\text{Dreieck}}$

Ziele:

- Anleitungen verstehen und umsetzen
- Schulung des räumlichen Vorstellungsvermögens
- Anwendung von Fachbegriffen
- Begeisterung für die Schönheit der Mathematik wecken

Material:

- Arbeitsblatt
- Ausschneidebögen aus Tonpapier – möglichst in zwei verschiedenen Farben
- Schere und Klebstoff (von den Schülerinnen und Schülern mitgebracht)
- bereits gebastelter Keplerstern
- evtl. verschiedene Polyeder und evtl. Steckerle, um Tetraeder... zu bauen
- evtl. Schnur (um den Würfel zu veranschaulichen)

Der Keplerstern - ein dreidimensionaler Stern

Der Keplerstern ist ein dreidimensionaler Stern, der nach dem Mathematiker und Astronomen JOHANNES KEPLER aus Weil der Stadt benannt wurde.

Bastle den Stern nach der folgenden Anleitung. Bearbeite dann die Aufgaben:

- Schneide die Figuren auf den beiden Bögen an den äußeren Linien aus. Du solltest jetzt jede Figur jeweils 4-mal haben. Tipp: Wenn deine beiden Bögen unterschiedliche Farben haben, wird dein Stern nachher besonders schön.
- Knicke die inneren Linien vor – alle in die gleiche Richtung.
- Forme nun aus jedem Teil eine dreieckige Pyramide, die nach einer Seite offen ist und verbinde sie mithilfe der dunkel markierten Klebelasche. Du erhältst dadurch 8 Pyramiden: 4 mit drei Klebelaschen und vier ohne Klebelasche.
- Verbinde nun die Teile: Klebe dazu an eine Pyramide mit drei Laschen drei Pyramiden ohne Lasche (an jede Klebefläche eine). Klebe die Laschen immer auf die Innenseite der Pyramiden, damit man sie am Ende nicht mehr sieht.

Aufgaben:

Diese Sterne sind sehr regelmäßig aufgebaut und können daher auch gut mathematisch untersucht werden:

1. Aus welchen räumlichen Grundkörpern besteht der Keplerstern?
2. Man kann sich auch vorstellen, dass der Keplerstern aus zwei Körpern besteht, die ineinandergesteckt werden. In der Mathematik nennt man solche Körper "Durchdringungskörper".

Aus welchen großen Körpern besteht der Kepler-Stern?

3. Ist dir schon aufgefallen, dass der Raum, um den sich die acht kleinen Tetraeder anordnen, genau dem Raum entspricht, wo die beiden großen Körper einander durchdringen? Beschreibe diesen Raum des Keplersterns.

Du kennst schon die regelmäßigen Polyeder:

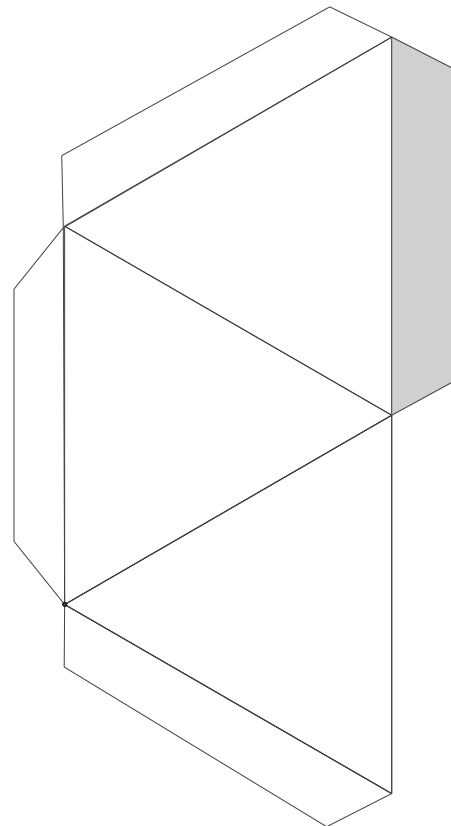
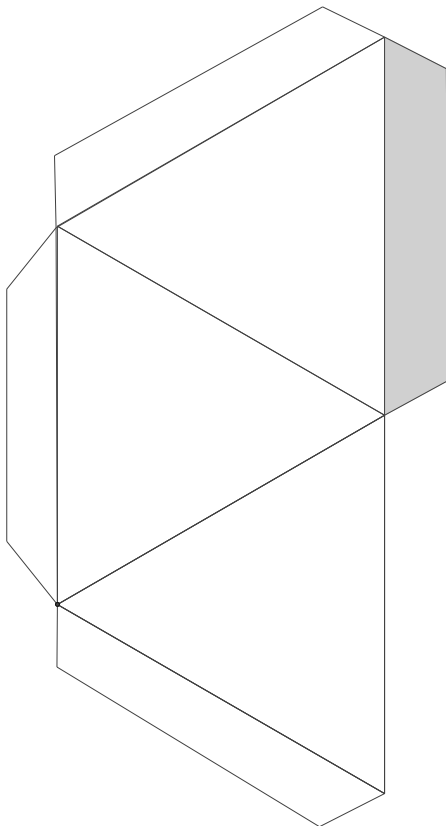
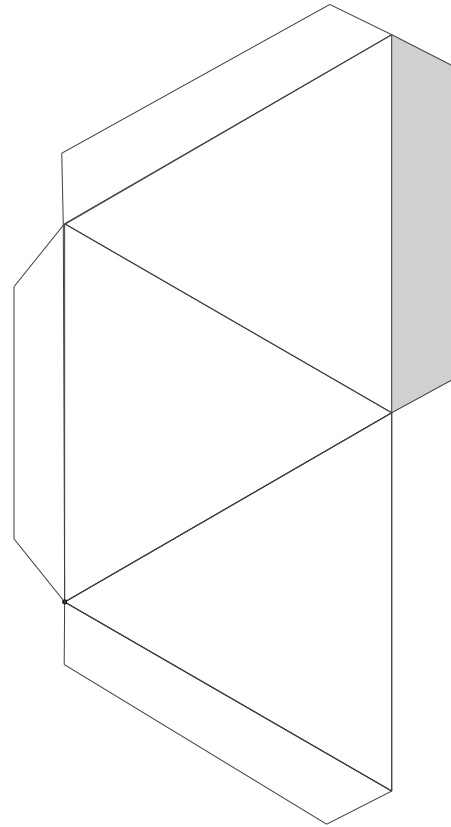
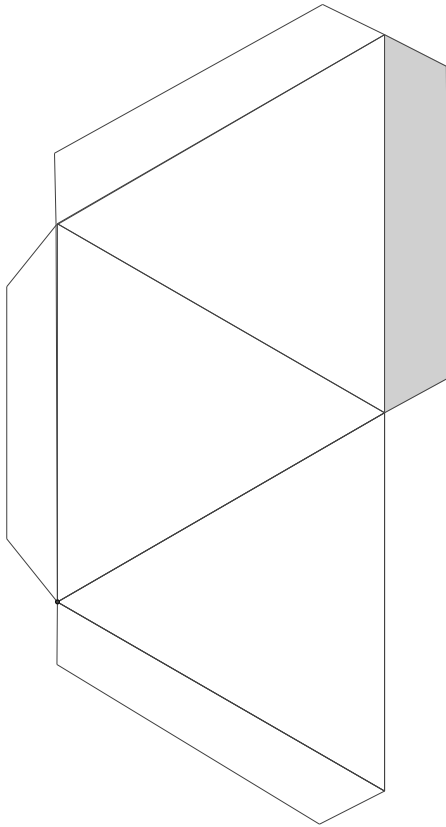
Gib an, ob einer der abgebildeten fünf regelmäßigen Polyeder diesen Raum ausfüllt.

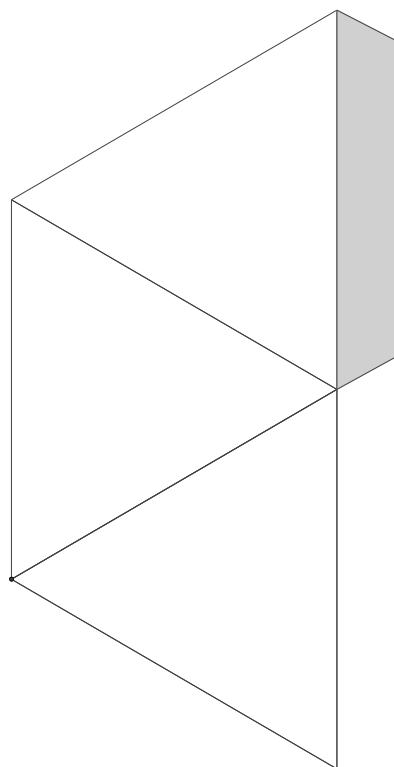
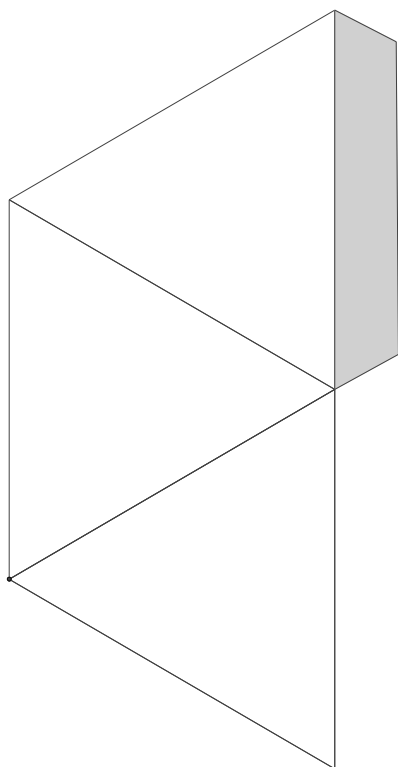
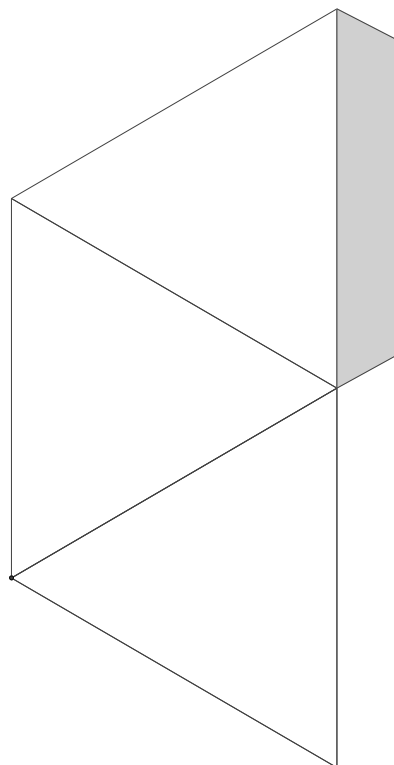
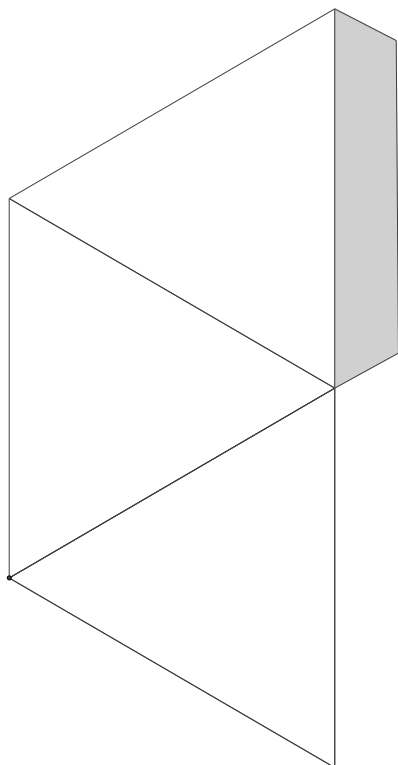


4. Verbinde die äußeren Eckpunkte des Kepler-Sterns in Gedanken. Welcher Körper entsteht dadurch?

Für Schnelle:

5. Aus der letzten Stunde kennst du die Polyederformel von EULER. Prüfe, ob sie auch für den Keplerstern gilt.
6. Zum Vergleich: Wie viele Ecken, Kanten und Seitenflächen haben die beiden Körper, die den Keplerstern ergeben, wenn man sie ineinandersteckt?





Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit

FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg Themenstellung 5 Min.	L zeigt fertigen Keplerstern: Dieser Stern ist nach einem bekannten Mathematiker und Naturwissenschaftler benannt, JOHANNES KEPLER aus Weil der Stadt (1571 – 1630). (evtl. Anknüpfung an JOHANNES KEPLER: Wer war schon im Keplermuseum in Weil der Stadt?) Ihr dürft heute alle so einen Stern basteln.	Fertig gebastelter Keplerstern
2. Basteln des Keplersterns + Erarbeitung EA/PA 40 Min.	SuS - schneiden die Figuren aus den Bögen aus - basteln den Keplerstern - beantworten die Fragen in Partnerarbeit. L hilft bei der Fertigstellung des Keplersterns. L gibt den Tipp: Schaut die Polyeder auf dem Arbeitsblatt an.	Arbeitsblatt Keplerstern + Bastelbögen Schere, Klebstoff, Körpermodelle
3. Sicherung und Reflexion FEU 15 Min.	L und SuS tauschen sich über die Ergebnisse aus. L visualisiert den Würfel mit Schnüren. Tafelanschrieb: <i>Der Keplerstern hat 36 Kanten, 14 Ecken und 24 Flächen.</i> $36 = 14 + 24 - 2$ <i>Er erfüllt also die eulersche Polyederformel, obwohl er kein konvexer Polyeder ist.</i>	Schnur Tafel / Heft?