

Sachanalyse

Es gelten die folgenden Teilbarkeitsregeln:

Satz 1: Eine natürliche Zahl z ist genau dann **durch n teilbar**

(d.h. die Division $z : n$ ergibt keinen Rest), wenn

- $n = 2$: die letzte Ziffer von z auf 0; 2; 4; 6 oder 8 lautet
- $n = 3$: die Quersumme von z durch 3 teilbar ist
- $n = 4$: die aus den letzten beiden Ziffern von z gebildete Zahl durch 4 teilbar ist
- $n = 5$: die letzte Ziffer von z auf 0 oder 5 lautet
- $n = 6$: z durch 2 und durch 3 teilbar ist
- $n = 8$: die aus den letzten drei Ziffern von z gebildete Zahl durch 8 teilbar ist
- $n = 9$: die Quersumme von z durch 9 teilbar ist
- $n = 10$: die letzte Ziffer von z auf 0 lautet
- $n = 11$: die alternierende Quersumme von z durch 11 teilbar ist.

Beweis:

Für $n = 8$ (entsprechend für $n = 4$):

Die gegebene Zahl z sei

$$z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \quad (a_n; a_{n-1}; \dots; a_2; a_1; a_0 \text{ sind die Ziffern von } z).$$

Da $10^3 = 1000$ durch 8 teilbar ist ($1000 : 8 = 125$), ist 10^n durch 8 teilbar für $n \geq 3$.

z ist also genau dann durch 8 teilbar, wenn $a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$ – das ist **die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl** – durch 8 teilbar ist. ■

Für $n = 9$ (entsprechend für $n = 3$):

Die gegebene Zahl z sei

$$z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \quad (a_n; a_{n-1}; \dots; a_1; a_0 \text{ sind die Ziffern von } z).$$

$$\text{Es gilt: } z = a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \dots + a_1 \cdot (10^1 - 1) + a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \quad (\spadesuit).$$

Die ersten n Summanden in der Darstellung (\spadesuit) sind Vielfache von 9 und somit durch 9 teilbar.

z ist also genau dann durch 9 teilbar, wenn die **Quersumme** von z , das ist die Summe der letzten $n+1$ Summanden von (\spadesuit), durch 9 teilbar ist. ■

Für $n = 11$:

Die gegebene Zahl z sei

$$z = a_{2n} \cdot 10^{2n} + a_{2n-1} \cdot 10^{2n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \quad (a_{2n}; a_{2n-1}; \dots; a_1; a_0 \text{ sind die Ziffern von } z).$$

$$\text{Es gilt: } z = a_{2n} \cdot (10^{2n} - 1) + a_{2n-1} \cdot (10^{2n-1} + 1) + \dots + a_1 \cdot (10^1 + 1) + a_{2n} - a_{2n-1} + \dots - a_1 + a_0 \quad (\spadesuit).$$

$$\text{Es gilt für } n \geq 1: \quad 10^{2n} - 1 =$$

$$(10 + 1) \cdot (10^{2n-1} - 10^{2n-2} + 10^{2n-3} - \dots + 10^1 - 10^0) = 11 \cdot (10^{2n-1} - 10^{2n-2} + 10^{2n-3} - \dots + 10^1 - 10^0) \text{ und}$$

$$10^{2n-1} + 1 =$$

$$(10 + 1) \cdot (10^{2n-2} - 10^{2n-3} + 10^{2n-4} - \dots - 10^1 + 10^0) = 11 \cdot (10^{2n-2} - 10^{2n-3} + 10^{2n-4} - \dots - 10^1 + 10^0).$$

Damit sind die ersten $2n$ Summanden in der Darstellung (\spadesuit) Vielfache von 11 und somit durch 11 teilbar.

z ist also genau dann durch 11 teilbar, wenn die **alternierende Quersumme** von z , das ist die Summe der letzten $2n+1$ Summanden von (\spadesuit) durch 11 teilbar ist. ■

Die anderen Fälle sind offensichtlich. ■

Satz 2: Genau dann, wenn die natürliche Zahl k ungerade ist, ist die Summe von k aufeinander folgenden natürlichen Zahlen durch k teilbar.

$$\text{Beweis: } z + (z + 1) + \dots + (z + k - 1) = k \cdot z + (1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1)) = k \cdot z + 0,5 \cdot (k - 1) \cdot k.$$

Der letzte Ausdruck ist genau dann durch k teilbar, wenn $0,5 \cdot (k - 1)$ eine natürliche Zahl ist.

Das ist genau dann der Fall, wenn $k - 1$ eine gerade Zahl, k also eine ungerade Zahl ist. ■

Infoblatt

Didaktische Reduktion:

Bei der Frage nach der Teilbarkeit einer natürlichen Zahl z durch eine natürliche Zahl n kann man z.B. das **Gruppen-Aufteilungs-Modell** heranziehen. Eine Anzahl von z Personen soll in Gruppen zu jeweils n Personen aufgeteilt werden. Die Frage, ob z durch n teilbar ist, geht damit über in die Frage, ob alle z Personen in einer solchen Gruppe der Größe n unterkommen oder ob Personen übrig bleiben. Die Frage, wie viele Gruppen gebildet werden können, ist hier nicht von Belang.

Exemplarisch für $n = 4$ und $z = 1234$:

Von 1000 ($= 4 \cdot 250$) Personen kommen alle in 4-er Gruppen unter.

Von 100 ($= 4 \cdot 25$) Personen kommen alle in 4-er Gruppen unter.

Es bleibt also nur die Frage ob von 34 Personen alle in 4-er Gruppen unterkommen.

34 ist nicht durch 4 teilbar, also 1234 auch nicht.

Exemplarisch für $n = 11$ und $z = 1234$:

Von 1000 ($= 11 \cdot 91 - 1$) Personen kommen alle in 11-er Gruppen (Fußball-Mannschaften!) unter.

Eine dieser 91 Gruppen hat zunächst aber nur 10 Personen. Es fehlt also noch 1 Person.

Von 100 ($= 11 \cdot 9 + 1$) Personen kommen 99 in 11-er Gruppen unter. Es bleibt 1 Person übrig.

Von 10 Personen kommen alle in einer 11-er Gruppe unter. Dabei fehlt aber noch 1 Person.

1 Person kommt nicht in einer 11-er Gruppe unter. Es bleibt 1 Person übrig.

Bei $1234 = 4 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 100 + 1 \cdot 1000$ Personen bleiben also $4 - 3 + 2 - 1 = 2$ Personen übrig.

Diese so genannte **alternierende Quersumme** entscheidet allein über die Teilbarkeit durch 11.

Ist diese alternierende Quersumme gleich 0, so heben sich die Anzahlen derer, die übrig sind, und derer, die noch fehlen, gerade auf.

Das Zahlenbeispiel 3619 mit der alternierenden Quersumme 11 zeigt, dass man mit denen, die übrig sind, die noch nicht vollständigen Gruppen auffüllen und sogar noch eine neue Gruppe bilden kann.

Das Zahlenbeispiel 7491 mit der alternierenden Quersumme -11 zeigt, dass man ggf. eine bestehende Gruppe auflösen muss.

Also: Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, sonst nicht.

Bemerkung 1: Über den Wert der Achter-Regel kann man geteilter Meinung sein.

Bemerkung 2: Schülerinnen und Schüler (SuS) fragen: „Gibt es eine Siebener-Regel?“

Entsprechend der Reste bei den Divisionen $10 : 7$; $100 : 7$; $1000 : 7$ usw. heißt die Sieber-Regel so:

Eine Zahl z ist genau dann durch 7 teilbar, wenn die gewichtete Quersumme, nämlich

1-er-Ziffer mal **1** + 10-er-Ziffer mal **3** + 100-er-Ziffer mal **2** + 1000-er-Ziffer mal **6** + 10000-er-Ziffer mal **4** + 100000-er-Ziffer mal **5** + 1000000-er-Ziffer mal **1** usw., durch 7 teilbar ist.

Alternative: 1-er-Ziffer mal **1** + 10-er-Ziffer mal **3** + 100-er-Ziffer mal **2** – 1000-er-Ziffer mal **1** – 10000-er-Ziffer mal **3** – 100000-er-Ziffer mal **2** + 1000000-er-Ziffer mal **1** usw.

Über den Wert der Siebener-Regel kann man auch geteilter Meinung sein.

Zu den Summen aufeinander folgender Zahlen:

Hat man eine ungerade Anzahl von Summanden, kann man sehr schön den bereits gelernten Summentrick (vgl. die gleichnamige Sitzung) anwenden. Ein Beispiel:

$123+124+125+126+127+128+129 = (123+129) + (124+128) + (125+127) + 126 = 7 \cdot 126$.

Diese Zahl ist durch 7 teilbar, dazu muss man das Produkt nicht ausrechnen.

Ziele:

- Kopfrechnen üben
- Sachverhalte auf den Kern reduzieren:
Untersuchung der Stufenzahlen auf den Rest bei der Division durch n

Tafelanschrieb
Teilbarkeit

1.) Teilbarkeitsregeln (2; 3; 4; 5; 9; 10) auswendig <Übungen>

2.) Ist 1234 durch 9 teilbar?

 $1234 = 1 \text{ Tausender} + 2 \text{ Hunderter} + 3 \text{ Zehner} + 4 \text{ Einer}$

Stufenzahl:	aufspalten:	Anzahl der 9er- Gruppen (unwichtig):	für jeden Einer / Zehner usw. bleiben übrig:	insgesamt übrig:
Einer	1	0	1	4
Zehner	$10 = 1 \cdot 9 + 1$	1	1	3
Hunderter	$100 = 11 \cdot 9 + 1$	11	1	2
Tausender	$1000 = 111 \cdot 9 + 1$	111	1	1
...				

Für die Teilbarkeit durch 9 entscheidet die Quersumme:

*Einerziffer **plus** Zehnerziffer **plus** Hunderterziffer **plus** Tausenderziffer usw.*

3.) Ist 1234 durch 11 teilbar?

 $1234 = 1 \text{ Tausender} + 2 \text{ Hunderter} + 3 \text{ Zehner} + 4 \text{ Einer}$

Stufenzahl:	aufspalten:	Anzahl der 11er- Gruppen (unwichtig):	für jeden Einer / Zehner usw. bleiben übrig:	insgesamt übrig:
Einer	1	0	1	4
Zehner	$10 = 1 \cdot 11 - 1$	1	-1	-3
Hunderter	$100 = 9 \cdot 11 + 1$	9	1	2
Tausender	$1000 = 91 \cdot 11 - 1$	91	-1	-1
...				

Für die Teilbarkeit durch 11 entscheidet die sogenannte alternierende Quersumme:

*Einerziffer **minus** Zehnerziffer **plus** Hunderterziffer **minus** Tausenderziffer usw.*

4.) Die Summe von 2 aufeinander folgenden Zahlen ist nie durch 2 teilbar.

Begründung: gerade Zahl + ungerade Zahl = ungerade Zahl

Die Summe von 3 aufeinander folgenden Zahlen ist immer durch 3 teilbar.

 Begründung: $123 + 124 + 125 = 3 \cdot 124$, entsprechend für alle anderen Zahlen, die Summe ist immer dreimal die „mittlere“ Zahl (Summentrick).

Die Summe von 4 aufeinander folgenden Zahlen ist nie durch 4 teilbar.

 Begründung: $123 + 124 + 125 + 126 = 2 \cdot 249$, entsprechend für alle anderen Zahlen, das Doppelte einer ungeraden Zahl kann nicht durch 4 teilbar sein.

usw.

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird die Lehrkraft die 4. Phase bzw. 5. Phase weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 20 Min.	SuS wiederholen und üben die bis dahin bekannten Teilbarkeitsregeln ($n = 2; 3; 4; 5; 9; 10$). L stellt Aufgaben vom Typ - Durch welche n (s.o.) ist 3345 teilbar? - Wie muss die letzte Ziffer (= ?) von 1234? lauten, damit eine Teilbarkeit durch n vorliegt? SuS erfinden Aufgaben.	Tafel
2. Erarbeitung I FEU 20 Min.	L leitet die Neuner-Regel anhand des Gruppenaufteilungs-Modells her. (Tabelle – vgl. Tafelanschrieb)	Tafel
3. Erarbeitung II und Sicherung EA/PA dann FEU 15 Min.	SuS leiten die Elfer-Regel anhand des Gruppen-Aufteilungs-Modells her (Tabelle – vgl. Tafelanschrieb). L unterstützt, insbesondere bei der Installation und Interpretation von „-1 bleibt übrig“. L informiert SuS darüber, dass es über die Tausender hinaus genauso „mit + und –“ weitergeht.	Heft / Tafel
4. Erarbeitung III FEU 15 Min.	Was fehlt noch? L informiert über die Sechser-, Siebener- und Achterregel.	
5. Erarbeitung IV und Sicherung EA/PA 20 Min.	L: Die Summe der 9 aufeinander folgenden Summanden $35 + 36 + 37 + 38 + 39 + 40 + 41 + 42 + 43 = 351$ ist durch 9 teilbar. Ist das Zufall? SuS forschen zur Frage <i>Ist die Summe von k ($= 2; 3; 4; 5; \dots$) aufeinander folgenden Zahlen immer durch k teilbar?</i> Typische Phasen: - Generiere Beispiele. - Versuche eine allgemeine Begründung (hier u.a.: beispielgebunden, Summentrick anwenden). L und SuS: Ergebnisse werden gebündelt und festgehalten. (Je nach Zeit und Lenkung ist eine unterschiedliche Begründungstiefe möglich.)	Heft / Tafel