

Infoblatt
Sachanalyse:

Stammbrüche sind Brüche mit dem Zähler 1. Sie sind die ältesten Brüche, die man kennt. Gegenüber anderen Brüchen zeichnen sie sich aus, weil man nur eine Zahl (den Nenner) zu ihrer Beschreibung benötigt. Deshalb kann man auch einfachere Rechenregeln für Stammbrüche formulieren: Man erhält das Produkt zweier Stammbrüche, indem man die Nenner multipliziert. Das ist dann der Nenner des Produkt-Stammbruchs. Die Summe zweier Stammbrüche ist in der Regel kein Stammbruch. Der Summenbruch hat als Zähler die Summe der Nenner und als Nenner das Produkt der Nenner der jeweiligen Summanden.

Dabei kann man mit Bruchbildern arbeiten.

Problemstellung: Lässt sich 1 als Summe dreier Stammbrüche darstellen?

Lösung: Es gibt genau 3 Darstellungen

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1; \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

Die Schülerinnen und Schüler (SuS) können das selbst entdecken.
Erweiterungen wären 1 als Darstellung von 2, 4, 5, 6 Stammbrüchen.

Viel schwieriger ist es zu zeigen, dass es keine weiteren Darstellungen gibt. Das kann nur besonders schnellen SuS vorbehalten bleiben. Dazu muss man diese Summen systematisch aufschreiben.

Die Stammbrüche kann man leicht in eine Reihenfolge bringen: $\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$ Diese Folge ist streng

monoton abnehmend. Da man die Summanden vertauschen kann, schreiben wir die Summen so auf, dass die Summanden abnehmen oder gleichbleiben. Der dritte Summand ergibt sich automatisch als Ergänzung zu 1. Ist er größer als der Vorgänger, dann gibt es keine weiteren.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 1 \quad 0 \text{ ist kein Stammbruch.}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = 1 \quad \frac{3}{10} \text{ ist größer als } \frac{1}{5}, \text{ fertig mit } \frac{1}{2} \text{ als erster Summand.}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{5}{12} = 1 \quad \frac{5}{12} \text{ ist größer als } \frac{1}{4}, \text{ fertig mit } \frac{1}{3}.$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1 \quad \frac{1}{2} \text{ ist größer als } \frac{1}{4}; \text{ fertig mit } \frac{1}{4}.$$

Jetzt geht es nicht mehr weiter, weil man als dritten Summanden einen größer als $\frac{1}{2}$ benötigen würde.

Ziele:

- reflektieren, wie die Rechengesetze für Brüche lauten

Didaktischer Kommentar

Die Aufgabe hat von der mathematischen Erkenntnis keinen besonders hohen Anreiz. Der historische Gedanke, dass im alten Ägypten nur mit Stammbrüchen gerechnet wurde, kann dem ein wenig entgegenwirken. Insgesamt wird man den Fokus auf vereinfachte Rechenregeln für Stammbrüche legen und dabei noch einmal die Rechenregeln für Brüche reflektieren.

Für besonders schnelle Schülerinnen und Schüler (SuS) kann man die Frage "Haben wir alle?" diskutieren lassen. Dabei kommt die Problemlösestrategie *systematisch aufschreiben* zum Tragen. Das sollte dann auch betont werden.

Die Rechenregeln für Stammbrüche sind einfacher als für gewöhnliche Brüche. Die Schülerinnen und Schüler können diese selbst entdecken und dann z.B. in einem Spiel anwenden. Sie helfen, sich noch einmal mit den Rechenregeln für Brüche auseinanderzusetzen.

Insgesamt ist nicht der Inhalt, sondern der Weg dazu das Ziel. Insbesondere geht es um das Üben beim Bruchrechnen, nicht aber um die Stammbrüche als solche.

Tafelanschrieb

<p>Rechenregeln für Stammbrüche:</p> $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{12}$ <p>Stammbrüche werden multipliziert, indem man die Nenner multipliziert.</p> $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{4+3}{3 \cdot 4} = \frac{7}{12}$ <p>Stammbrüche werden addiert, indem man die Summe der Nenner in den Zähler und das Produkt der Nenner in den Nenner schreibt.</p>	<p><u>Stammbrüche</u></p> <p>Ein Stammbruch ist ein Bruch mit Zähler 1, z.B. $\frac{1}{3}$.</p> <p>Der Stammbruch $\frac{1}{3}$ teilt ein Ganzes in 3 Teile.</p> <p>Wie kann man ein Ganzes aus Stammbrüchen zusammenfügen.</p> <p>Beispiel: $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$</p> <p>Suche möglichst viele Möglichkeiten 1 als Summe dreier Stammbrüche darzustellen.</p> <p>Lösung:</p> $1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}; 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}; 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$	<p>Zum Vergleich</p> <p>Rechenregeln für Brüche:</p> $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{8}{21}$ <p>Brüche werden multipliziert, indem man Zähler und Nenner jeweils miteinander multipliziert.</p> $\frac{2}{3} + \frac{4}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 7} = \frac{26}{21}$ <p>Brüche werden addiert, indem man sie auf den Hauptnenner erweitert und dann die Zähler addiert.</p>
--	--	---

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf 5. und 6. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Problemstellung und Motivation FEU 5 Min.	L erklärt, was ein Stammbruch ist, evtl. Geschichte der Stammbrüche z.B.: http://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/aegyptischedarstellung.htm	Tafel
2. Erarbeitung I FEU 10 Min.	Rechenregeln für Stammbrüche: Kann man die Regeln zum Addieren und Subtrahieren von Brüchen für Stammbrüche vereinfachen?	Tafel
3. Problemstellung FEU 5 Min.	Interpretation eines Stammbruchs $\frac{1}{3}$ als Zerlegung von einem Ganzen in 3 Teile. Kann man ein Ganzes als Summe von Stammbrüchen darstellen? Z.B. ist $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ die einzige Möglichkeit mit 2 Summanden. Warum gibt es keine weiteren? Problem: Finde möglichst viele Arten 1 als Summe von 3 Stammbrüchen darzustellen?	Tafel
4. Erarbeitung II EA 10 Min.	Suche möglichst viele Summen. L geht umher und gibt Tipps.	Heft
5. Sicherung FEU 5 Min.	L trägt die gefundenen Summen an der Tafel zusammen.	Tafel
6. Problemstellung und Erarbeitung III PA 15 Min.	Weiterer Verlauf je nach Qualität der Ergebnisse. 1 als Summe von 4 Stammbrüchen oder Haben wir alle „Dreier-Summen“ gefunden? Hinweis auf Strategie <i>systematisch aufschreiben</i> oder Wie kam man eigentlich auf die Rechenregeln für Brüche? Könnt ihr das in Bildern erklären?	Heft
7. Sicherung FEU 10 Min.	Zusammentragen und Diskussion der Ergebnisse	Tafel