

Sachanalyse

Definition: **Regelmäßige Polyeder** sind konvexe Körper, bei denen an jeder Ecke gleich viele Flächen zusammentreffen und deren Oberfläche aus kongruenten regelmäßigen Vielecken besteht.

Regelmäßige n-Ecke haben gleiche Seitenlängen und Innenwinkel α . Es gilt:

n =	3	4	5	6	> 6
$\alpha =$	60°	90°	108°	120°	>120°

Zwei Fragen: Welche regelmäßigen Polyeder gibt es? Wie kann man sicher sein, dass es keine weiteren gibt? Durch Probieren findet man die **fünf regelmäßigen Polyeder**. Auf einen formalen Beweis der Existenz wird hier verzichtet. Die griechischen Vorsilben benennen die Anzahl der Flächen:

tetra = vier;

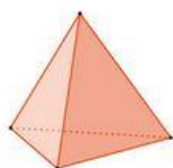
hexa = sechs;

okta = acht;

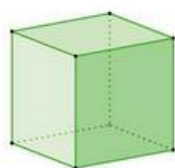
dodeka = zwölf;

ikosa = zwanzig

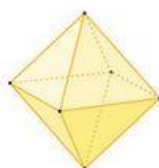
Tetraeder



Hexaeder



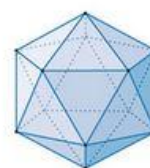
Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder



Dass dies alle sind, wird im Folgenden anschaulich begründet. Dabei sei a die Anzahl der regelmäßigen n-Ecke, die eine räumliche Ecke bilden, offensichtlich ist $a \geq 3$.

$n = 3$: Man kann entweder je $a = 3$ gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen (\rightarrow Tetraeder) oder je $a = 4$ (\rightarrow Oktaeder) oder je $a = 5$ (\rightarrow Ikosaeder) gleichseitige Dreiecke.

$a = 6$ gleichseitige Dreiecke aneinander bilden zusammen einem Innenwinkel von $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$ („liegen eben“) und damit keine räumliche Ecke mehr.

$n = 4$: Man kann nur je $a = 3$ Quadrate zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen (\rightarrow Hexaeder = Würfel); $a = 4$ Quadrate aneinander bilden zusammen einem Innenwinkel von $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$ („liegen eben“) und damit keine räumliche Ecke mehr.

$n = 5$: Man kann nur je $a = 3$ regelmäßige Fünfecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen (\rightarrow Dodekaeder), es ist $3 \cdot 108^\circ < 360^\circ$.

$n = 6$: $a = 3$ regelmäßige Sechsecke aneinander bilden zusammen einem Innenwinkel von $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ („liegen eben“) und damit keine räumliche Ecke mehr.

Alle anderen Kombinationen von a und n führen zu Überlappungen und scheiden damit ebenfalls als Möglichkeiten aus.

Eine dritte Frage:

Sind in der Definition die Forderungen „konvex“ und „...an jeder Ecke gleich viele Flächen zusammentreffen“ notwendig?

Antwort: Ja. Ansonsten würde man weitere regelmäßige Körper bekommen:

- Man denke sich, ausgehend vom Ikosaeder, eine der Ecken nach innen einspringend; dieser „Dellen-Ikosaeder“ besteht nach wie vor aus zwanzig gleichseitigen Dreiecken und an jeder Ecke treffen gleich viele Dreiecke aufeinander.

- Man denke sich zwei Tetraeder an je einer der Flächen aufeinander geklebt. Der „Doppeltetraeder“ besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken, ist konvex, aber an den Ecken treffen entweder drei oder vier Dreiecke zusammen.

Eine letzte Frage:

Wie gelingt die Bestätigung des Polyedersatzes mithilfe der regelmäßigen Polyeder ohne Abzählen?

Der Eulersche Polyedersatz besagt bei konvexen Polyedern: $e + f - k = 2$. Hierbei ist

e ... Anzahl der Ecken, f ... Anzahl der Flächen und k ... Anzahl der Kanten.

Es gilt $e = \frac{n \cdot f}{a}$ und $k = \frac{n \cdot f}{2}$ (Nachprüfen durch Verbalisieren).

Setze z.B. beim Würfel $f = 6$ und errechne (!) daraus $e = 8$ und $k = 12$, in der Tat ist $8 + 6 - 12 = 2$.

Infoblatt
Didaktischer Kommentar:

Der Charme dieses Vorhabens liegt darin, dass beim Tun

- die fünf regelmäßigen Polyeder gefunden werden können und
- die Grenzen der Möglichkeiten, solche Körper zu bilden, erfahrbar werden.

In der Unterstufe gibt man sich mit dem Nachweis der Existenz dieser Polyeder durch die Konstruktion zufrieden. Beim Arbeitsblatt wird nur der Hauptstrang des Gedankengangs dokumentiert.

Die Suche nach den regelmäßigen Polyedern ist in natürlicher Weise **selbstdifferenzierend**:

- beim Ausloten und Verbalisieren der Grenzen der Möglichkeiten, solche Körper zu bilden
- beim Finden des Doppel-Tetraeders (den Dellen-Ikosaeder darf die Lehrperson mit in die Diskussion einbringen).

Die Berechnung von Anzahlen als Alternative zum sturen Abzählen („Abzählen durch Rechnen“) ist den Schülerinnen und Schülern (SuS) von rechteckförmigen Mustern her bekannt (z.B. Anzahl der Stuhlreihen in einem Saal, Anzahl der Sitze in jeder Reihe). Die Berechnung der Anzahl der Körper-Ecken mithilfe der Anzahl der Flächen und der Anzahl der Flächen-Ecken zu berechnen, bildet eine kleine intellektuelle Herausforderung.

Nachfolgende Tabelle offenbart duale Bezüge zwischen den regulären Körpern.

Anzahl der...	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
... Flächen	4	6	8	12	20
... Ecken	4	8	6	20	12

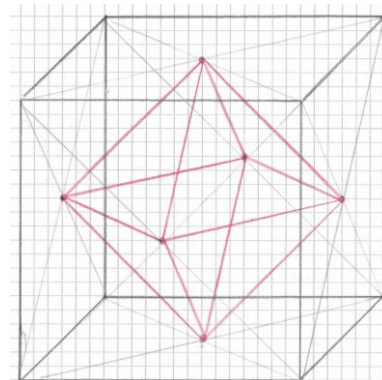
Diese haben eine geometrische Entsprechung. Verbindet man nämlich die Mittelpunkte der Seitenflächen, so erhält man wieder einen regelmäßigen Körper:

Tetraeder → Tetraeder; Hexaeder → Oktaeder;

Oktaeder → Hexaeder; Ikosaeder → Dodekaeder;

Dodekaeder → Ikosaeder

Die Schrägbild-Zeichnung des Oktaeders im Würfel lässt sich gut bewerkstelligen. Alle anderen Übergänge kann man bei der Betrachtung der regelmäßigen Körper gedanklich nachvollziehen.


Ziele:

- die Problemlösestrategien
 - ein Problem *in Teilprobleme aufspalten*
 - alle *Fälle der Reihe nach abhandeln*
 - *systematisches Probieren*
 - *Abzählen durch Rechnen*

kennenlernen bzw. erproben sowie das räumliche Vorstellungsvermögen weiterentwickeln.

- Freude an der Ästhetik von Figuren und am Aufdecken von Zusammenhängen empfinden.

Material:

- Steckerle von regelmäßigen n-Ecken ($n = 3; 4; 5; 6$) in ausreichender Anzahl



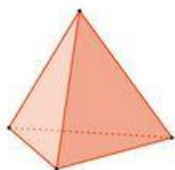
Regelmäßige Polyeder

Polyeder sind Körper, die nur von ebenen Flächen begrenzt sind, zum Beispiel Quader oder Pyramiden.

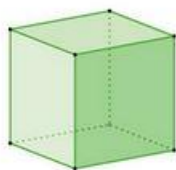
Regelmäßige Polyeder

- haben eine Oberfläche, die nur aus gleichen regelmäßigen Vielecken besteht (nur gleichseitige Dreiecke, nur Quadrate usw.)
- haben Ecken, an denen immer gleich viele Flächen zusammentreffen
- haben keine einspringenden Ecken oder Löcher.

Tetraeder



Hexaeder



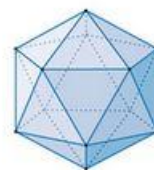
Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder



Die griechischen Vorsilben geben die Anzahl der Flächen an. **Trage die Zahlen ein.**

tetra = ;	hexa = ;	okta = ;	dodeka = ;	ikosa =
----------------	---------------	---------------	-----------------	--------------

Warum gibt es nur diese fünf regelmäßigen Polyeder? **Fülle die Text-Lücken aus.**

Man kann je drei gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das

Man kann auch je gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält dann das

Man kann auch je gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält dann das

Fügt man jedoch gleichseitige Dreiecke aneinander, liegen diese flach in der Ebene, und man erhält keine mehr.

Das gleiche gilt für Quadrate oder regelmäßige Sechsecke.

Man kann je drei zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das Hexaeder.

Man kann je drei regelmäßige Fünfecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das Weitere Möglichkeiten gibt es damit nicht.

Wie viele Ecken e und Kanten k haben die regelmäßigen Polyeder jeweils?

Das kann man natürlich einfach abzählen. Beim Ikosaeder kann man sich dabei leicht verzählen.

Man kann e und k aber auch ausrechnen!

Hier wird das an einem Beispiel des Hexaeders (Würfels) vorgemacht:

- Das Hexaeder hat $f = 6$ Quadrate. Jedes Quadrat hat 4 Ecken.
Insgesamt sind es also $6 \cdot 4 = 24$ Quadrat-Ecken. Immer 3 Quadrat-Ecken ergeben zusammen eine Hexaeder-Ecke. Es gibt also $e = 24 : 3 = 8$ Hexaeder-Ecken.
- Das Hexaeder hat $f = 6$ Quadrate. Jedes Quadrat hat 4 Seiten.
Insgesamt sind es also $6 \cdot 4 = 24$ Quadrat-Seiten. Immer 2 Quadrat-Seiten ergeben zusammen eine Hexaeder-Kante. Es gibt also $k = 24 : 2 = 12$ Hexaeder-Kanten.

Fülle die Tabelle aus (Anzahlen ausrechnen!), **mache die Probe** mit dem Eulerschen Polyedersatz.

	Tetraeder	Hexaeder	Oktaeder	Dodekaeder	Ikosaeder
$f =$	4	6	8	12	20
$e =$		8			
$k =$		12			
$k = e + f - 2?$		stimmt			

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerinnen- und Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird die Lehrkraft stärker oder weniger stark lenken bzw. den Punkt 6. weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 5 Min.	L stellt regelmäßige Polyeder (man nennt diese auch <i>platonische Körper</i>) zunächst als Körper vor, die aus „lauter gleichen regelmäßigen Vielecken zusammengesetzt sind“ und teilt Steckerle in ausreichender Anzahl aus mit dem Auftrag: „Baue <u>alle</u> regelmäßigen Polyeder.“	Steckerle in Form regelmäßiger n-Ecke ($n = 3; 4; 5; 6$)
2. Erarbeitung I EA/PA 25 Min.	SuS bauen die fünf regelmäßigen Polyeder, dazu auch den Doppel-Tetraeder. SuS erfahren beim Tun die Grenzen der Möglichkeiten hierbei. L fordert im Einzelgespräch SuS zur Verbalisierung dieser Grenzen auf. L lobt und beobachtet, aber berät zurückhaltend.	Steckerle
3. Plenum I FEU 15 Min.	L - problematisiert die beiden Beispiele des Doppel-Tetraeders und des Dellen-Ikosaeders („Verdienen diese den Namen <i>regelmäßig</i> ?“) - präzisiert die Definition (Ecken, an denen gleich viele Flächen zusammentreffen + Konvexität) - verteilt das Arbeitsblatt - führt die fünf Namen der fünf Körper ein.	Arbeitsblatt
4. Erarbeitung II EA/PA 10 Min.	SuS bearbeiten die Anweisungen des Arbeitsblattes L lobt und beobachtet, aber berät zurückhaltend.	- Körper aus Steckerle - Arbeitsblatt
5. Plenum II FEU 10 Min.	SuS und L besprechen die Eintragungen.	- Körper aus Steckerle - Arbeitsblatt
6. Erarbeitung III FEU und EA/PA 25 Min.	L thematisiert die dualen Bezüge zwischen den regulären Körpern anhand der Tabelle. Gedanklich am Beispiel Dodekaeder → Ikosaeder: „3 Flächen bilden eine Ecke, deren Mittelpunkte also ein Dreieck, es gibt 20 Ecken, also 20 Dreiecke ...“ Zeichnung im Fall Hexaeder → Oktaeder: - Zeichne das Schrägbild eines Würfels (Hexaeder) mit der Kantenlänge 10cm - Kanten schräg nach hinten <u>nur</u> 6 Kästchendiagonalen - markiere die Mittelpunkte der sechs Quadrate rot (beide Diagonalen ganz fein eintragen) - verbinde (rote Farbe) die benachbarten Mittelpunkte und du erhältst das Oktaeder.	kariertes Papier, Geodreieck, Stifte