

Sachanalyse

Definition: **Regelmäßige Polyeder** sind konvexe Körper, bei denen an jeder Ecke gleich viele Flächen zusammentreffen und deren Oberfläche aus kongruenten regelmäßigen Vielecken besteht.

Regelmäßige n-Ecke haben gleiche Seitenlängen und Innenwinkel α . Es gilt:

n =	3	4	5	6	> 6
$\alpha =$	60°	90°	108°	120°	>120°

Zwei Fragen:

Welche regelmäßigen Polyeder gibt es? Wie kann man sicher sein, dass es keine weiteren gibt?

Durch Probieren findet man die **fünf regelmäßigen Polyeder**. Auf einen formalen Beweis der Existenz wird hier verzichtet.

Die griechischen Vorsilben benennen die Anzahl der Flächen:

tetra = vier;

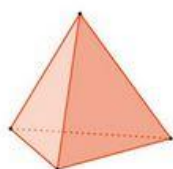
hexa = sechs;

okta = acht;

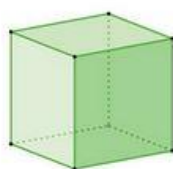
dodeka = zwölf;

ikosa = zwanzig

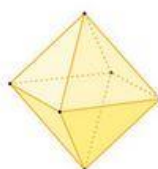
Tetraeder



Hexaeder



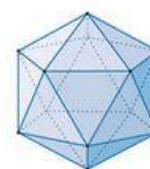
Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder



Dass dies alle sind, wird im Folgenden anschaulich begründet. Dabei sei a die Anzahl der regelmäßigen n -Ecke, die eine räumliche Ecke bilden, offensichtlich ist $a \geq 3$.

$n = 3$: Man kann entweder je $a = 3$ gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen (\rightarrow Tetraeder) oder je $a = 4$ (\rightarrow Oktaeder) oder je $a = 5$ (\rightarrow Ikosaeder) gleichseitige Dreiecke.

$a = 6$ gleichseitige Dreiecke aneinander bilden zusammen einem Innenwinkel von $6 \cdot 60^\circ = 360^\circ$ („liegen eben“) und damit keine räumliche Ecke mehr.

$n = 4$: Man kann nur je $a = 3$ Quadrate zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen (\rightarrow Hexaeder = Würfel); $a = 4$ Quadrate aneinander bilden zusammen einem Innenwinkel von $4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$ („liegen eben“) und damit keine räumliche Ecke mehr.

$n = 5$: Man kann nur je $a = 3$ regelmäßige Fünfecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen (\rightarrow Dodekaeder), es ist $3 \cdot 108^\circ < 360^\circ$.

$n = 6$: $a = 3$ regelmäßige Sechsecke aneinander bilden zusammen einem Innenwinkel von $3 \cdot 120^\circ = 360^\circ$ („liegen eben“) und damit keine räumliche Ecke mehr.

Alle anderen Kombinationen von a und n führen zu Überlappungen und scheiden damit ebenfalls als Möglichkeiten aus.

Eine dritte Frage:

Sind in der Definition die Forderungen „konvex“ und „an jeder Ecke gleich viele Flächen zusammentreffen“ notwendig?

Antwort: Ja. Ansonsten würde man weitere regelmäßige Körper bekommen:

- Man denke sich, ausgehend vom Ikosaeder, eine der Ecken einspringend nach innen; dieser „Dellen-Ikosaeder“ besteht nach wie vor aus zwanzig gleichseitigen Dreiecken und an jeder Ecke treffen gleich viele Dreiecke aufeinander.

- Man denke sich zwei Tetraeder an je einer der Flächen aufeinander geklebt, der „Doppel-Tetraeder“ besteht aus sechs gleichseitigen Dreiecken, ist konvex, aber an den Ecken treffen entweder drei oder vier Dreiecke zusammen.

Infoblatt

Didaktischer Kommentar

Der Charme dieses Vorhabens liegt darin, dass beim Tun

- die fünf regelmäßigen Polyeder gefunden werden können und
- die Grenzen der Möglichkeiten, solche Körper zu bilden, erfahrbar werden.

In der Unterstufe gibt man sich mit dem Nachweis der Existenz dieser Polyeder durch die Konstruktion zufrieden. Auf dem Arbeitsblatt wird nur der Hauptstrang des Gedankengangs dokumentiert.

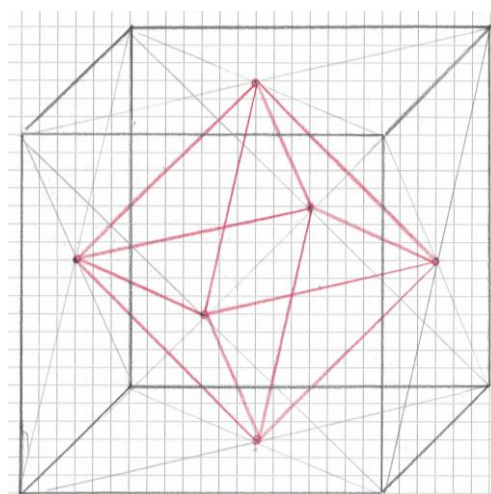
Die Suche nach den regelmäßigen Polyedern ist in natürlicher Weise **selbstdifferenzierend**:

- beim Ausloten und Verbalisieren der Möglichkeiten, solche Körper zu bilden
- beim Finden des Doppel-Tetraeders (den Dellen-Ikosaeder darf die Lehrkraft mit in die Diskussion einbringen).

Reguläre Polyeder sind zueinander dual. Verbindet man nämlich die Mittelpunkte der Seitenflächen, so erhält man wieder einen regelmäßigen Polyeder:

Tetraeder \rightarrow Tetraeder; Hexaeder \rightarrow Oktaeder;
 Oktaeder \rightarrow Hexaeder; Ikosaeder \rightarrow Dodekaeder;
 Dodekaeder \rightarrow Ikosaeder

Die Schrägbild-Zeichnung des Oktaeders im Würfel lässt sich gut bewerkstelligen. Alle anderen Übergänge könnte man bei der Betrachtung der regulären Körper gedanklich nachvollziehen.



Ziele:

- die Problemlösestrategien
 - ein Problem *in Teilprobleme aufspalten*
 - alle *Fälle der Reihe nach abhandeln*
 - *systematisches Probieren*
- kennenlernen bzw. erproben
- das räumliche Vorstellungsvermögen weiterentwickeln
- Freude an der Ästhetik von Figuren und an der Aufdeckung von Zusammenhängen empfinden

Material:

- Steckerle von regelmäßigen n-Ecken ($n = 3; 4; 5; 6$) in ausreichender Anzahl
- Arbeitsblatt



Regelmäßige Polyeder

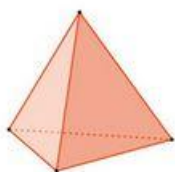
Polyeder sind Körper, die nur von ebenen Flächen begrenzt sind, zum Beispiel Quader oder Pyramiden.

Regelmäßige Polyeder

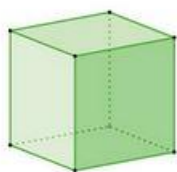
- haben eine Oberfläche, die nur aus gleichen regelmäßigen Vielecken besteht (nur gleichseitige Dreiecke, nur Quadrate usw.)
- haben Ecken, an denen immer gleich viele Flächen zusammentreffen
- haben keine einspringenden Ecken.

Es gibt nur fünf regelmäßige Polyeder.

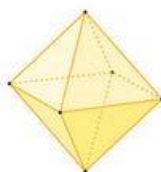
Tetraeder



Hexaeder



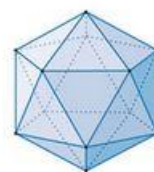
Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder



Die griechischen Vorsilben geben die Anzahl der Flächen an. **Trage die Zahlen ein.**

tetra =

hexa =

okta =

dodeka =

ikosa =

Warum gibt es nur diese fünf regelmäßigen Polyeder? Fülle die Text-Lücken aus.

Man kann je drei gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das

Man kann auch je gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält dann das

Man kann auch je gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält dann das

Fügt man jedoch gleichseitige Dreiecke aneinander, liegen diese flach in der Ebene, und man erhält keinen mehr.

Das Gleiche gilt für Quadrate oder regelmäßige Sechsecke.

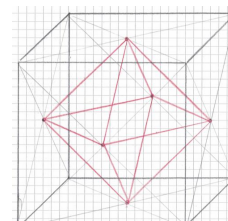
Man kann je drei zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das Hexaeder.

Man kann je drei regelmäßige Fünfecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das

Weitere Möglichkeiten gibt es damit nicht.

Zeichnung eines Oktaeders in einem Hexaeder:

- **Zeichne** das Schrägbild eines Würfels (Hexaeder) mit der Kantenlänge 10cm, die Kanten schräg nach hinten nur 6 Kästchendiagonalen lang.
- **Markiere** die Mittelpunkte der sechs Quadrate rot. Dazu jeweils beide Diagonalen mit ganz feinen Linien eintragen.
- **Verbinde** (rote Farbe) die benachbarten Mittelpunkte und du erhältst das Oktaeder.



Regelmäßige Polyeder

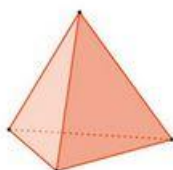
Polyeder sind Körper, die nur von ebenen Flächen begrenzt sind, zum Beispiel Quader oder Pyramiden.

Regelmäßige Polyeder

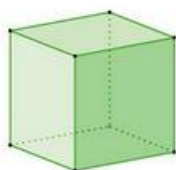
- haben eine Oberfläche, die nur aus gleichen regelmäßigen Vielecken besteht (nur gleichseitige Dreiecke, nur Quadrate usw.)
- haben Ecken, an denen immer gleich viele Flächen zusammentreffen
- haben keine einspringenden Ecken.

Es gibt nur fünf regelmäßige Polyeder.

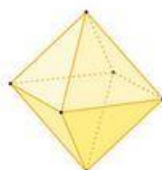
Tetraeder



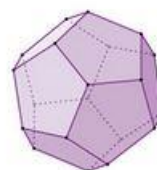
Hexaeder



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder



Die griechischen Vorsilben geben die Anzahl der Flächen an. **Trage die Zahlen ein.**

tetra = 4

hexa = 6

okta = 8

dodeka = 12

ikosa = 20

Warum gibt es nur diese fünf regelmäßigen Polyeder? Fülle die Text-Lücken aus.

Man kann je drei gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das **Tetraeder**.

Man kann auch je **vier** gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält dann das **Oktaeder**.

Man kann auch je **fünf** gleichseitige Dreiecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält dann das **Ikosaeder**.

Fügt man jedoch sechs gleichseitige Dreiecke aneinander, liegen diese flach in der Ebene, und man erhält keinen **Körper** mehr.

Das Gleiche gilt für **vier** Quadrate oder **drei** regelmäßige Sechsecke.

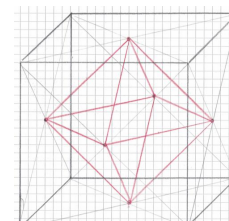
Man kann je drei **Quadrate** zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das Hexaeder.

Man kann je drei regelmäßige Fünfecke zu einer räumlichen Ecke zusammenfügen und erhält das **Dodekaeder**.

Weitere Möglichkeiten gibt es damit nicht.

Zeichnung eines **Oktaeders** in einem Hexaeder:

- **Zeichne** das Schrägbild eines Würfels (Hexaeder) mit der Kantenlänge 10cm, die Kanten schräg nach hinten nur 6 Kästchendiagonalen lang.
- **Markiere** die Mittelpunkte der sechs Quadrate rot. Dazu jeweils beide Diagonalen mit ganz feinen Linien eintragen.
- **Verbinde** (rote Farbe) die benachbarten Mittelpunkte und du erhältst das Oktaeder.



Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird die Lehrkraft stärker oder weniger stark lenken bzw. den Punkt 5. weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 5 Min.	L stellt regelmäßige Polyeder (man nennt diese auch <i>platonische Körper</i>) zunächst als Körper vor, die aus „lauter gleichen regelmäßigen Vielecken zusammengesetzt sind“ und teilt Steckerle in ausreichender Anzahl aus mit dem Auftrag: „Baue <u>alle</u> regelmäßigen Polyeder.“	Steckerle in Form regelmäßiger n-Ecke ($n = 3; 4; 5; 6$)
2. Erarbeitung I EA/PA 25 Min.	SuS - bauen die fünf regelmäßigen Polyeder, dazu auch den Doppel-Tetraeder - erfahren beim Tun die Grenzen der Möglichkeiten hierbei. L fordert im Einzelgespräch SuS zur Verbalisierung dieser Grenzen auf. L lobt und beobachtet, aber berät zurückhaltend.	Steckerle
3. Plenum I FEU 15 Min.	L - problematisiert die beiden Beispiele des Doppel-Tetraeders und des Dellen-Ikosaeders („Verdienen diese den Namen <i>regelmäßig</i> ?“) - präzisiert die Definition (Ecken, an denen gleich viele Flächen zusammentreffen + Konvexität) - verteilt das Arbeitsblatt - führt die fünf Namen der fünf Körper ein.	Arbeitsblatt
4. Erarbeitung II EA/PA + FEU 10 Min.	SuS bearbeiten die Anweisungen des Arbeitsblattes. L lobt und beobachtet, aber berät zurückhaltend. SuS und L besprechen die Eintragungen	- Körper aus Steckerle - Arbeitsblatt
5. Erarbeitung III EA/PA 15 Min.	Duale Beziehungen zwischen den regelmäßigen Polyedern: Zeichnung für den Fall Hexaeder → Oktaeder: - Zeichne das Schrägbild eines Würfels (Hexaeder) mit der Kantenlänge 10 cm - Kanten schräg nach hinten <u>nur</u> 6 Kästchendiagonalen lang - markiere die Mittelpunkte der sechs Quadrate rot (jeweils beide Diagonalen mit ganz feinen Linien eintragen) - verbinde (rote Farbe) die benachbarten Mittelpunkte und du erhältst das Oktaeder.	kariertes Papier, Geodreieck, Stifte