

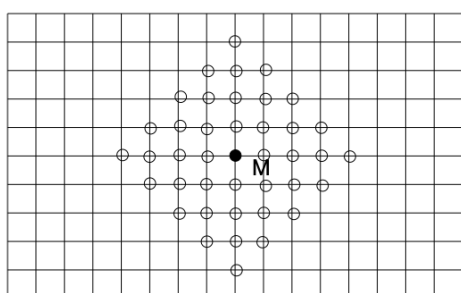
Infoblatt
Kürzeste Entfernungen in Manhattan

Hintergrund-Information: Die Taxi-Geometrie ist eine Geometrie, die statt der Abstandsnorm

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \text{ die Norm } d = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \text{ verwendet.}$$

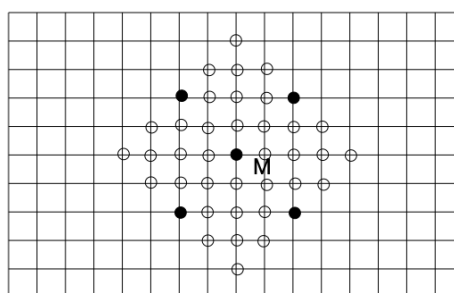
Damit sind alle Aufgaben mathematisch eindeutig formulierbar. Für die Schülerinnen und Schüler (SuS) wäre das aber eine Überforderung. Deshalb sollte die Lehrkraft die Aufgaben gemeinsam mit den SuS lesen und interpretieren. Erst dann können sie von den SuS selbstständig bearbeitet werden.

Lösungen der Aufgaben auf dem Arbeitsblatt

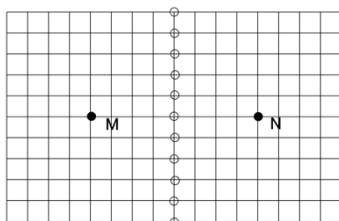
1. Aufgabe

2. Aufgabe

a) Es sind 4.

b) Es sind 6.

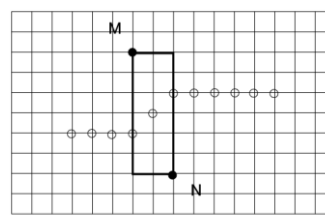
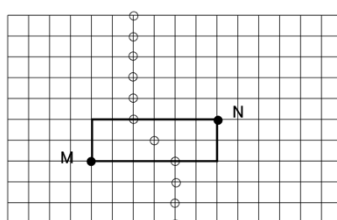
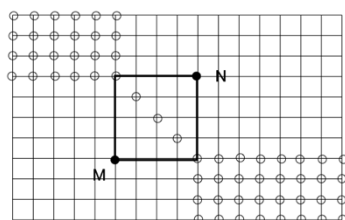

3. Aufgabe

a) Mittelsenkrechte



b) Differenzierung: Arbeitsblatt bzw. Arbeitsblatt B

Auf dem Arbeitsblatt B wird nur der Fall „Quadrat“ – vgl. unten links betrachtet.



Zeichnet man ein Rechteck entlang der Gitterlinien mit den Ecken M und N, dann liegen die Punkte auf der (45°-) Gitterdiagonalen durch den Mittelpunkt des Rechtecks und auf der Vertikalen (bzw. Horizontalen) der Endpunkte dieser Diagonalen.

Didaktischer Kommentar

Kürzeste Entfernungen in Manhattan

Man wird mit dem Stadtplan von Manhattan z.B. aus Google Maps einsteigen und dabei erklären, dass man in der Mathematik gerne vereinfacht und daraus möglichst allgemeine Aussagen gewinnt.

Dann kann man mit dem Karoblatt je nach Stand der Klasse einen Bezug zum Koordinatensystem herstellen, indem man einen Ursprung wählt und dann dem Punkt M Koordinaten gibt. Dabei kann als Einheit 100 m gewählt werden, sodass sich sehr einfache natürliche Koordinaten ergeben.

Weitere Themen, die angesprochen werden können: Geometrie bedeutet Erdvermessung. In der Schule geht man von einer Ebene aus. In der Realität ist die Erde eine Kugel und Abstände werden auf Kreisbögen gemessen. Für die Taxifahrerin bzw. den Fußgänger sind Abstände etwas anderes als z.B. für eine Drohne.

Ziel der Stunde:

- Systematisches Vorgehen (Minimalziel)

Die Schülerinnen und Schüler (SuS) sollen die Punkte nicht wahllos einzeichnen, sondern systematisch vorgehen, z.B.: Wege ohne Abbiegung, Wege mit einer Abbiegung, ... Immer zuerst von einem bestimmten Punkt ausgehend.

- Bezüge zur Geometrie (Abstand, Kreis, Mittelsenkrechte)

Ortslinie Kreis: Die Menge aller Punkte, die von einem Punkt den gleichen Abstand haben, wird hier zum Quadrat (s.u.). Diese Bezüge nur dann herstellen, wenn die SuS mit den Aufgaben gut zurechtkommen.

1. Aufgabe

Differenzierung: Zuerst nur die Ecken, dann die Diagonalen des Quadrats oder die Seiten des Quadrats entdecken. Es kommt darauf an, was die SuS zuerst verstehen:

Möglichkeit von abgelenkten Wegen oder das Kleiner-Gleich in der Aufgabe.

Begründung in Worten, warum Punkte außerhalb des Quadrats nicht möglich sind.

Bezug zum Kreis herstellen. In der (euklidischen) Schulgeometrie wäre das ein Kreis. Wenn bekannt, dann kann man sogar auf die Kreiszahl eingehen.

Richtig schwierig: Welcher Wert entspräche hier der Kreiszahl π ? Wird π als Umfang des Kreises geteilt durch den Durchmesser des Kreises definiert, dann kann man sich analog vorstellen, dass eine Taxifahrerin einmal ein Straßenkarree abfährt und dann einen Verbindungsweg zwischen zwei parallel verlaufenden Straßenzügen. Als Pendant zur Kreiszahl π erhält man so den Wert 4. Es gäbe noch beliebig viele weitere Fragen, z.B. wie viele Schnittpunkte zwei Taxi-„Kreise“ haben können.

2. Aufgabe

a) Differenzierung: Wie viele Straßenkreuzungen gibt es bei einer Entfernung von 300 m? (8)

Kann man noch andere Beispiele finden? Wann sind es 4, wann sind es 8?

b) Differenzierung: Die Wege farblich einzeichnen und abzählen.

Wie ist das mit anderen Punkten auf dem Rand des Quadrats?

Wie viele sind es bei einer Entfernung von 100 m, 200 m, 300 m, 500 m, 600 m?

Hintergrund-Info: Legt man den Ursprung in M, dann gibt es vom Punkt $(x|y)$ aus $\binom{x+y}{x}$ Wege

mit der Länge $x+y$ nach M (o.B.d.A.: $x \geq 0$; $y \geq 0$).

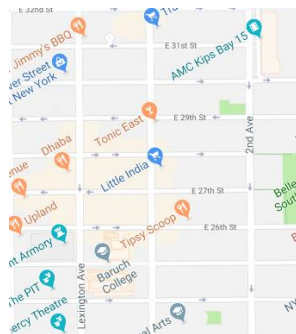
3. Aufgabe

Das Arbeitsblatt und das Arbeitsblatt B unterscheiden sich lediglich bei der Aufgabe 3b).

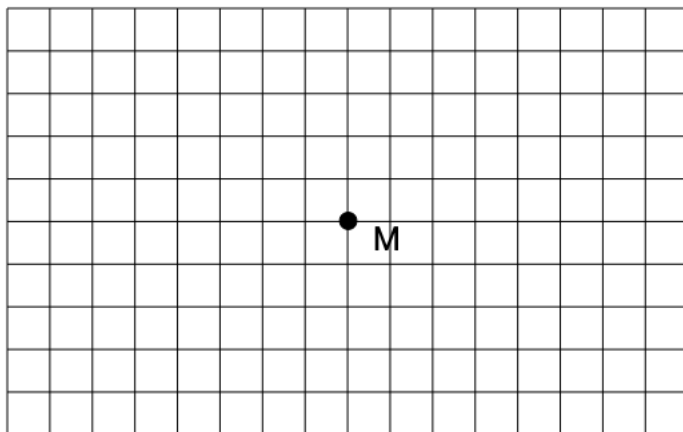
Im Arbeitsblatt B wird nur der Fall des „Quadrats“ thematisiert. Für schwächere SuS reicht es hier sogar, dass sie die Mittelsenkrechte nur für den Fall 3a) finden und erkennen, dass im Fall 3b) diese nicht passt. Schön ist auch hier ein Bezug zur Mittelsenkrechte als Ortslinie (wenn das schon bekannt ist), sonst eben kein Bezug.

Kürzeste Entfernungen in Manhattan

Das nebenstehende Bild zeigt einen Stadtplan von Manhattan, New York. Die Straßen verlaufen parallel bzw. senkrecht zueinander. Parallele Straßen sind durchnummeriert. Wir vereinfachen diese Situation ein wenig und stellen uns ein Straßensystem vor, bei dem die Straßen als Gitterlinien auf kariertem Papier verlaufen. In der Geometrie berechnet man kürzeste Entfernungen, sogenannte Abstände. In dem Straßensystem ist aber die kürzeste Entfernung z.B. für eine Taxifahrerin oder einen Fußgänger nicht die Luftlinie, da er sich an die Straßen halten muss. Geometrische Aufgaben verändern sich also in New York erheblich.



Wir nehmen im Folgenden an, dass zwei benachbarte Straßen einen Abstand von 100 m haben. Man kann dann das Straßennetz durch ein Karogitter mit einer Kästchenlänge 100 m darstellen. Verkleinert sieht das dann so aus.



1. Aufgabe

Karolin arbeitet bei McDonald's an der Straßenkreuzung im Punkt M. Sie ist für den Schutz der Umwelt und möchte zur Arbeit entlang der Straßen laufen. Die Entfernung von ihrer Wohnung zu M soll nicht weiter als 400 m sein. Markiere den Bereich, in dem ihre Wohnung liegen darf.

2. Aufgabe

Nimm nun eine Straßenkreuzung an, an der Karolin wohnt. Sie soll genau 400 m zu Fuß von M entfernt sein und in Luftlinie möglichst nahe an M liegen.

- Wie viele solche Straßenkreuzungen gibt es?
- Wie viele verschiedene Wege, die genau 400 m lang sind, kann Karolin von ihrer Wohnung zur Arbeit laufen?

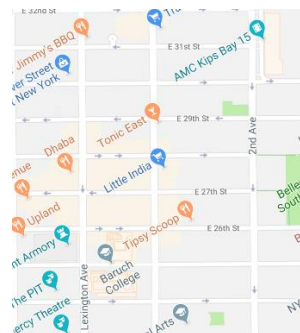
3. Aufgabe

Das Wohnen in New York ist unbezahlbar teuer. Deshalb muss Karolin noch einen zweiten Job annehmen. Der zweite Arbeitsplatz liegt ebenfalls an einer Straßenkreuzung im Punkt N und ist von M 800 m zu Fuß entfernt. Karolin will sich eine neue Wohnung suchen, die genau gleich weit zu Fuß von M und N entfernt ist. Dabei sollen nun auch Wohnorte möglich sein, die weiter als 400 m von den Arbeitsplätzen entfernt sind. Es gibt dann unendlich viele mögliche Wohnorte.

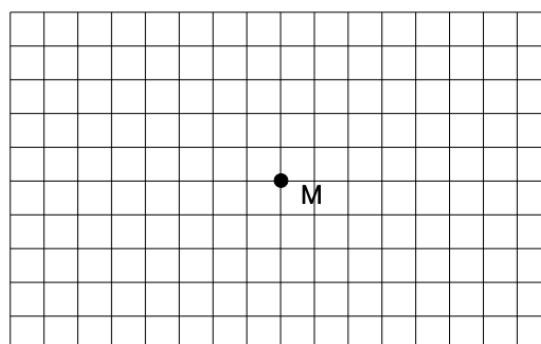
- Beschreibe alle Punkte, die in Frage kommen, wenn M und N an derselben Straße liegen.
- Beschreibe alle Punkte, die in Frage kommen, wenn M und N nicht an derselben Straße liegen. Wähle dazu einen geeigneten Punkt N.

Kürzeste Entfernungen in Manhattan

Das nebenstehende Bild zeigt einen Stadtplan von Manhattan, New York. Die Straßen verlaufen parallel bzw. senkrecht zueinander. Parallele Straßen sind durchnummeriert. Wir vereinfachen diese Situation ein wenig und stellen uns ein Straßensystem vor, bei dem die Straßen als Gitterlinien auf kariertem Papier verlaufen. In der Geometrie berechnet man kürzeste Entfernungen, sogenannte Abstände. In dem Straßensystem ist aber die kürzeste Entfernung z.B. für eine Taxifahrerin oder einen Fußgänger nicht die Luftlinie, da er sich an die Straßen halten muss. Geometrische Aufgaben verändern sich also in New York erheblich.



Wir nehmen im Folgenden an, dass zwei benachbarte Straßen einen Abstand von 100 m haben. Man kann dann das Straßennetz durch ein Karogitter mit einer Kästchenlänge 100 m darstellen. Verkleinert sieht das dann so aus:



1. Aufgabe

Karolin arbeitet bei McDonald's an der Straßenkreuzung im Punkt M. Sie ist für den Schutz der Umwelt und möchte zur Arbeit entlang der Straßen laufen. Die Entfernung von ihrer Wohnung zu M soll nicht weiter als 400 m sein. Markiere den Bereich, in dem ihre Wohnung liegen darf.

2. Aufgabe

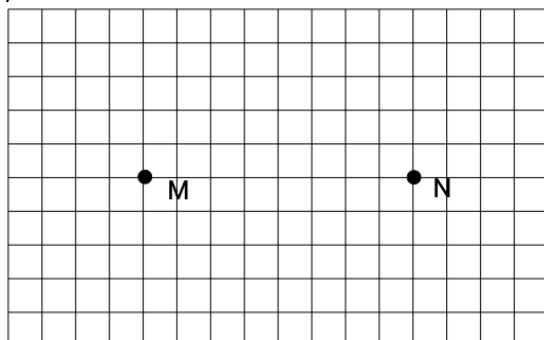
Nimm nun eine Straßenkreuzung an, an der Karolin wohnt. Sie soll genau 400 m zu Fuß von M entfernt sein und in Luftlinie möglichst nahe an M liegen.

- Wie viele solche Straßenkreuzungen gibt es?
- Wie viele verschiedene Wege, die genau 400 m lang sind, kann Karolin von ihrer Wohnung zur Arbeit laufen?

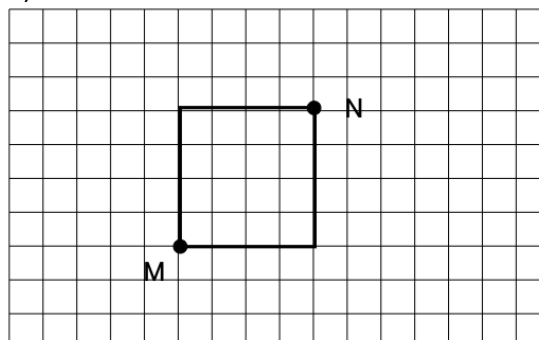
3. Aufgabe

Das Wohnen in New York ist unbezahlbar teuer. Deshalb muss Karolin noch einen zweiten Job annehmen. Der zweite Arbeitsplatz liegt ebenfalls an einer Straßenkreuzung im Punkt N und ist von M 800 m zu Fuß entfernt. Karolin will sich eine neue Wohnung suchen, die genau gleich weit zu Fuß von M und N entfernt ist. Dabei sollen nun auch Wohnorte möglich sein, die weiter als 400 m von den Arbeitsplätzen entfernt sind. Es gibt dann unendlich viele mögliche Wohnorte. Untersuche die beiden gezeichneten Fälle a) und b).

a)



b)



Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler S ... Schülerin bzw. Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf 5. und 6. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 10 Min.	L - stellt das Problem vor - erinnert an die Bestimmung von Abständen - erläutert das Wesen der Geometrie.	Stadtplan von Manhattan oder von Mannheim (!)
2. Aufgabe 1 EA / PA 10 Min.	SuS - bearbeiten Aufgabe 1. L lobt und beobachtet, aber berät zurückhaltend. Vorbereitung einer Folie, auf der eine Gruppe ihre Lösung einträgt.	Arbeitsblatt bzw. Arbeitsblatt B
3. Besprechung Aufgabe 1 FEU 5 Min.	Besprechung an der Tafel, Bezug zum Kreis herstellen, evtl. über Flächeninhalt des Kreises reden.	Tafel
4. Aufgabe 2 EA / PA 10 Min	SuS - bearbeiten Aufgabe 2. L lobt und beobachtet, aber berät zurückhaltend.	Arbeitsblatt bzw. Arbeitsblatt B
5. Besprechung Aufgabe 2 FEU 5 Min.	S trägt auf der o.g. Folie die Lösung ein und erläutert sie. Diskussion (optional): Wann gibt es 4, wann gibt es 8 Punkte?	Tafel
6. Aufgabe 3 EA / PA Restliche Zeit, Besprechung je nach Bedarf	SuS - bearbeiten Aufgabe 3a) L lobt und beobachtet, aber berät zurückhaltend. Aufgabe 3b) (optional bzw. zur Differenzierung) Arbeitsblatt bzw. Arbeitsblatt B	Arbeitsblatt bzw. Arbeitsblatt B Tafel / Heft?