

**Infoblatt**
**Sachanalyse und didaktische Reduktion:**

Für einen beschränkten konvexen Polyeder (Vielflächner) mit  $e$  Ecken,  $k$  Kanten und  $f$  Flächen gilt die Polyederformel von EULER:  $e + f - k = 2$ .

Der Beweis ist (leider) nicht trivial und deshalb nicht Gegenstand der vorliegenden Stunde.

Im Sinne einer didaktischen Reduktion wird die Konvexitätsvoraussetzung zunächst unterschlagen. Sie kann nach der Erarbeitung kurz thematisiert werden. Von der Beschränktheit geht man implizit aus.

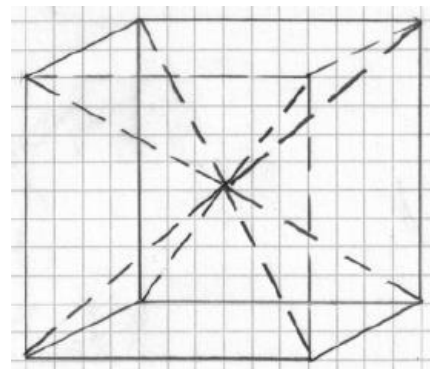
Die Voraussetzung der Konvexität ist „stark“ hinreichend.

Oder anders gesagt: Polyeder, für die die EULER-Formel nicht gilt, muss man „mit der Lupe suchen“.

Beispiel für einen nicht-konvexen Polyeder, für den die EULER-Formel nicht gilt:

*Würfel mit zwei ausgefrästen „gegenüberliegenden“ quadratischen Pyramiden mit Spitze im Würfelmittelpunkt ist  $k = 20$ ,  $e = 9$  und  $f = 12$ .*

→ Die Gleichung  $k = e + f - 2$  ist nicht erfüllt.



Man kann auf dem Arbeitsblatt für die Schülerinnen und Schüler (mit einem \* wie folgt ergänzen:

// Er hat für alle Polyeder\* eine Formel herausgefunden ... (\*ohne einspringende Ecken) //

**Lösungen:**

zu den sechs konvexen Polyedern des Arbeitsblattes:

	„Haus“	Dreiecks- prisma	Dreiecks- pyramide	Pyramiden- stumpf	Würfel mit ab- geschnittener Ecke	Doppel- pyramide
$k =$	15	9	6	12	15	24
$e =$	10	6	4	8	10	10
$f =$	7	5	4	6	7	16

**Ziele:**

- die Problemlösestrategie „aus Beispielen eine Vermutung erzeugen“ kennenlernen bzw. erproben
- das räumliche Vorstellungsvermögen weiterentwickeln

**Material:**

- Arbeitsblatt
- viele verschiedene Polyeder-Modelle, z.B. auch Verpackungen (Prismen, Pyramiden, Pyramidenstumpf, Würfel mit aufgesetzter quadratischer Pyramide)

### Didaktischer Kommentar

Im Hinblick auf eine möglichst einfache Entdeckung des Sachverhalts  $e + f - k = 2$

(e ... Anzahl der Ecken, f ... Anzahl der Flächen und k ... Anzahl der Kanten)

ist dieser auf dem Arbeitsblatt für die Schülerinnen und Schüler (SuS) umformuliert zu  $k = [e + f - 2]$ .

Formeln kennen die SuS z.B. vom Rechteck mit den Seitenlängen a und b und dem

Umfang U:  $U = 2 \cdot (a + b)$

Das erste Beispiel des Arbeitsblattes („Haus“ = Quader mit aufgesetztem „liegendem“ dreiseitigen Prisma, also ein Haus mit Satteldach) soll gemeinsam bearbeitet werden, um sicherzustellen, dass alle SuS wissen, was zu tun ist. Das ist grundsätzlich ein sehr wichtiger Punkt.

Für das „Haus“ ergibt sich:  $k = 15$ ;  $e = 10$  und  $f = 7$ .

Am Beispiel des Umfangs eines Rechtecks erläutert die Lehrkraft, worum es jetzt geht:

Angenommen, man kennt die Formel

$U = 2 \cdot (a + b)$  nicht. Könnte man sie mithilfe der vier Zahlenbeispiele erraten?

U	a	b
14	5	2
20	5	5
22	9	2
110	50	5

Eventuell kann man noch ein zweites Beispiel liefern.

Kann man mithilfe der vier Zahlenbeispiele erraten, wie man H mithilfe von a und b errechnen kann?

Lösung:  $H = (a \cdot b) : 2$

Interpretation: die Hälfte des Flächeninhalts des Rechtecks mit den Seitenlängen a und b oder Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den „Seiten“ (=Katheten) a und b.

H	a	b
6	4	3
24	6	8
35	7	10
49,5	9	11

Erfahrungsgemäß finden bei dieser Hinführung viele SuS der Unterstufe die Eulersche Polyederformel mithilfe der vier Zahlenbeispiele selbständig. Wenn nicht, kann die Lehrkraft nach einiger Zeit den folgenden Tipp geben:

„Trage in die freie Spalte einmal die Summe  $e + f$  ein. Fällt dir jetzt etwas auf?“

Ganz wichtig ist, dass die Lehrkraft umhergeht und alle Zahleneinträge der SuS auf dem Arbeitsblatt kontrolliert. Wenn diese nicht stimmen, kann man die Formel nicht finden!

Die „schnelleren“ SuS bestätigen die gefundene Formel an den beiden letzten Beispielen des Arbeitsblattes und/oder an bereitgestellten Polyeder-Modellen (Binnendifferenzierung).

## Die Polyeder-Formel von EULER

Polyeder sind Körper, die nur von ebenen Flächen begrenzt sind.  
 Beispiele für Polyeder sind Quader, Prismen oder Pyramiden.  
 Keine Polyeder sind z.B. Zylinder oder Kegel.

LEONHARD EULER (1707-1783) ist einer der berühmtesten Mathematiker.

Er hat für alle Polyeder eine Formel herausgefunden und begründet,  
 wie man die Anzahl der Kanten (k) mithilfe  
 der Anzahl der Ecken (e) und der Anzahl der Flächen (f) ausrechnen kann.

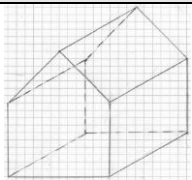
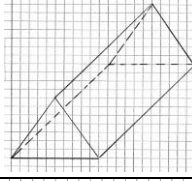
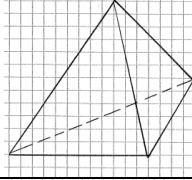
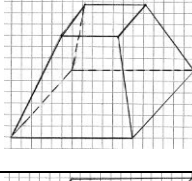
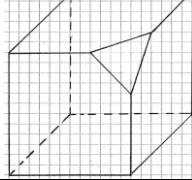
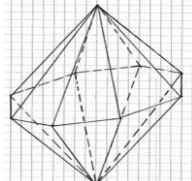
(Bild zur Wiederverwendung gekennzeichnet: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EULER\\_HARLUQ.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EULER_HARLUQ.jpg))



**Fülle** zunächst die Tabelle für die ersten vier angegebenen Beispiele **aus**.

**Findest du** diese Formel mithilfe der Beispiele in der Tabelle auch?

**k** = .....

Polyeder	Schrägbild-Skizze	k ... Anzahl der Kanten	e ... Anzahl der Ecken	f ... Anzahl der Flächen	
„Haus“					
Dreiseitiges Prisma					
Dreiecks-Pyramide					
Pyramidenstumpf					
Würfel mit abgeschnittener Ecke					
Doppel-pyramide					

### Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler    L ... Lehrerin bzw. Lehrer    AB ... Arbeitsblatt

EA ... Einzelarbeit    PA ... Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit

FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
<b>1. Einstieg</b> FEU 15 Min.	L stellt das Problem vor. L und SuS bearbeiten das erste Beispiel („Haus“ = <i>Quader mit aufgesetztem „liegendem“ dreiseitigen Prisma</i> ) gemeinsam. L erläutert am Beispiel des Rechtecksumfangs (ggf. an einem weiteren Beispiel – vgl. didaktischer Kommentar), dass jetzt mithilfe von Zahlenbeispielen die Formel gefunden werden soll.	AB Polyeder-Modelle  Tafel
<b>2. Erarbeitung I</b> EA/PA 30 Min.	SuS - bearbeiten drei weitere Beispiele - machen sich auf die Suche nach der Formel - nehmen beim Abzählen von Ecken, Kanten und Flächen (je nach räumlichem Vorstellungsvermögen) die bereit gestellten Körper zur Hand oder zählen am Schrägbild ab. L gibt den Tipp: Ecken und Kanten unterschiedlich färben! L lobt und beobachtet, berät aber zurückhaltend.	AB Polyeder-Modelle
<b>3. Erarbeitung II</b> (=Puffer) EA/PA 10 Min.	Die „schnelleren“ SuS bestätigen die gefundene Formel an den beiden letzten Beispielen des Arbeitsblattes und/oder an bereitgestellten Polyeder-Modellen (Binnendifferenzierung).	AB Polyeder-Modelle
<b>4. Sicherung und Reflexion</b> FEU 5 Min.	L und SuS tauschen sich über den Suchprozess und die Einzelergebnisse aus. L berichtet von seinen Beobachtungen (s.o.).	
<b>5. Weitere Problemstellung</b> FEU und EA/PA 15 Min.	SuS untersuchen den <i>Würfel mit zwei ausgefrästen „gegenüberliegenden“ quadratischen Pyramiden mit Spitze im Würfelmittelpunkt</i> und erkennen: → die Formel gilt nicht mehr! Modifikation des Textes auf dem AB: // Er hat für alle Polyeder* eine Formel herausgefunden ... (*ohne einspringende Ecken) //	Tafel-zeichnung