

Sachanalyse

Satz: Es gelten die folgenden Teilbarkeitsregeln:

Eine natürliche Zahl z ist genau dann **durch n teilbar** (d.h. die Division $z : n$ ergibt keinen Rest), wenn

- $n = 2$: die letzte Ziffer von z auf 0; 2; 4; 6 oder 8 lautet
- $n = 3$: die Quersumme von z durch 3 teilbar ist
- $n = 4$: die aus den letzten beiden Ziffern von z gebildete Zahl durch 4 teilbar ist
- $n = 5$: die letzte Ziffer von z auf 0 oder 5 lautet
- $n = 6$: z durch 2 und durch 3 teilbar ist
- $n = 8$: die aus den letzten drei Ziffern von z gebildete Zahl durch 8 teilbar ist
- $n = 9$: die Quersumme von z durch 9 teilbar ist
- $n = 10$: die letzte Ziffer von z auf 0 lautet
- $n = 11$: die alternierende Quersumme von z durch 11 teilbar ist.

Beweis:

Für $n = 8$ (entsprechend für $n = 4$):

Die gegebene Zahl z sei

$$z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \quad (a_n; a_{n-1}; \dots; a_2; a_1; a_0 \text{ sind die Ziffern von } z).$$

Da $10^3 = 1000$ durch 8 teilbar ist ($1000 : 8 = 125$), ist 10^n durch 8 teilbar für $n \geq 3$.

z ist also genau dann durch 8 teilbar, wenn $a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$ – das ist **die aus den letzten drei Ziffern gebildete Zahl** – durch 8 teilbar ist. ■

Für $n = 9$ (entsprechend für $n = 3$):

Die gegebene Zahl z sei

$$z = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \quad (a_n; a_{n-1}; \dots; a_1; a_0 \text{ sind die Ziffern von } z).$$

$$\text{Es gilt: } z = a_n \cdot (10^n - 1) + a_{n-1} \cdot (10^{n-1} - 1) + \dots + a_1 \cdot (10^1 - 1) + a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0 \quad (\spadesuit).$$

Die ersten n Summanden in der Darstellung (\spadesuit) sind Vielfache von 9 und somit durch 9 teilbar.

z ist also genau dann durch 9 teilbar, wenn die **Quersumme** von z , das ist die Summe der letzten $n+1$ Summanden von (\spadesuit), durch 9 teilbar ist. ■

Für $n = 11$:

Die gegebene Zahl z sei

$$z = a_{2n} \cdot 10^{2n} + a_{2n-1} \cdot 10^{2n-1} + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 \quad (a_{2n}; a_{2n-1}; \dots; a_1; a_0 \text{ sind die Ziffern von } z).$$

$$\text{Es gilt: } z = a_{2n} \cdot (10^{2n} - 1) + a_{2n-1} \cdot (10^{2n-1} + 1) + \dots + a_1 \cdot (10^1 + 1) + a_{2n} - a_{2n-1} + \dots - a_1 + a_0 \quad (\spadesuit).$$

$$\text{Es gilt für } n \geq 1: \quad 10^{2n} - 1 =$$

$$(10 + 1) \cdot (10^{2n-1} - 10^{2n-2} + 10^{2n-3} - \dots + 10^1 - 10^0) = 11 \cdot (10^{2n-1} - 10^{2n-2} + 10^{2n-3} - \dots + 10^1 - 10^0) \text{ und}$$

$$10^{2n-1} + 1 =$$

$$(10 + 1) \cdot (10^{2n-2} - 10^{2n-3} + 10^{2n-4} - \dots - 10^1 + 10^0) = 11 \cdot (10^{2n-2} - 10^{2n-3} + 10^{2n-4} - \dots - 10^1 + 10^0).$$

Damit sind die ersten $2n$ Summanden in der Darstellung (\spadesuit) Vielfache von 11 und somit durch 11 teilbar.

z ist also genau dann durch 11 teilbar, wenn die **alternierende Quersumme** von z , das ist die Summe der letzten $2n+1$ Summanden von (\spadesuit) durch 11 teilbar ist. ■

Die anderen Fälle sind offensichtlich.

Das Prinzip lautet:

Betrachte die Reste bei der Division der Stufenzahlen durch n . ■

Infoblatt

Didaktische Reduktion:

Bei der Frage nach der Teilbarkeit einer natürlichen Zahl z durch eine natürliche Zahl n kann man z.B. das **Gruppen-Aufteilungs-Modell** heranziehen. Eine Anzahl von z Personen soll in Gruppen zu jeweils n Personen aufgeteilt werden. Die Frage, ob z durch n teilbar ist, geht damit über in die Frage, ob alle z Personen in einer solchen Gruppe der Größe n unterkommen oder ob Personen übrig bleiben. Die Frage, wie viele Gruppen gebildet werden können, ist dabei nicht von Belang.

Exemplarisch für $n = 4$ und $z = 1234$:

Von 1000 ($= 4 \cdot 250$) Personen kommen alle in 4er-Gruppen unter.

Von 100 ($= 4 \cdot 25$) Personen kommen alle in 4er-Gruppen unter.

Es bleibt also nur die Frage, ob von 34 Personen alle in 4er-Gruppen unterkommen.

34 ist nicht durch 4 teilbar, also 1234 auch nicht.

Hilfsregel (diese wird auf dem Arbeitsblatt verwendet):

Eine zweistellige Zahl ist nur dann durch 4 teilbar, wenn

- die Zehnerziffer gerade ist und die Einerziffer 0; 4 oder 8 heißt
- die Zehnerziffer ungerade ist und die Einerziffer 2 oder 6 heißt.

Exemplarisch für $n = 11$ und $z = 1234$:

Von 1000 ($= 11 \cdot 91 - 1$) Personen kommen alle in 11-er Gruppen (Fußball-Mannschaften!) unter. Eine dieser 91 Gruppen hat zunächst aber nur 10 Personen. Es fehlt also noch 1 Person.

Von 100 ($= 11 \cdot 9 + 1$) Personen kommen 99 in 11-er Gruppen unter. Es bleibt 1 Person übrig.

Von 10 Personen kommen alle in einer 11-er Gruppe unter. Dabei fehlt aber noch 1 Person.

1 Person kommt nicht in einer 11-er Gruppe unter. Es bleibt 1 Person übrig.

Bei $1234 = 4 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 100 + 1 \cdot 1000$ Personen bleiben also $4 - 3 + 2 - 1 = 2$ Personen übrig.

Diese so genannte **alternierende Quersumme** entscheidet allein über die Teilbarkeit durch 11.

Ist diese alternierende Quersumme gleich 0, so heben sich die Anzahlen derer, die übrig sind, und derer, die noch fehlen, gerade auf.

Das Zahlenbeispiel 3619 mit der alternierenden Quersumme 11 zeigt, dass man mit denen, die übrig sind, die noch nicht vollständigen Gruppen auffüllen und sogar noch eine neue Gruppe bilden kann.

Das Zahlenbeispiel 7491 mit der alternierenden Quersumme -11 zeigt, dass man ggf. eine bestehende Gruppe auflösen muss.

Also: Eine Zahl ist durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist, sonst nicht.

Bemerkung 1: Über den Wert der Achter-Regel kann man geteilter Meinung sein.

Bemerkung 2: Schülerinnen und Schüler (SuS) fragen Sie eventuell: „Gibt es eine 7er-Regel?“

Entsprechend der Reste bei den Divisionen $1:7$ (Rest 1), $10:7$ (Rest 3), $100:7$ (Rest 2), $1000:7$ (Rest 6), $10000:7$ (Rest 4), $100000:7$ (Rest 5), $1000000:7$ (Rest 1), usw. heißt die 7er-Regel so:

Eine Zahl z ist genau dann durch 7 teilbar, wenn die gewichtete Quersumme, nämlich

1-mal 1-er-Ziffer + 3-mal 10-er-Ziffer + 2-mal 100-er-Ziffer + 6-mal 1000-er-Ziffer +

4-mal 10000-er-Ziffer + 5-mal 100000-er-Ziffer + 1-mal 1000000-er-Ziffer usw., durch 7 teilbar ist.

Alternative: **1-mal 1-er-Ziffer + 3-mal 10-er-Ziffer + 2-mal 100-er-Ziffer – 1-mal 1000-er-Ziffer –**
3-mal 10000-er-Ziffer – 2-mal 100000-er-Ziffer + 1-mal 1000000-er-Ziffer usw.

Beispiel: 312.368 ist durch 7 teilbar, denn $1 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 21$, 21 ist durch 7 teilbar.

Über den Wert der 7er-Regel kann man auch geteilter Meinung sein.

Ziele:

- Teilbarkeitsregeln wiederholen und vertiefen; Kopfrechnen
- Sachverhalte auf den Kern reduzieren:
 Untersuchung der Stufenzahlen auf den Rest bei der Division durch n

1. Teilbarkeitsregeln:

Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn

oder, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn, sonst nicht.

2. Herleitung der 9er-Regel am Beispiel 234: $234 = 2 \text{ Hunderter} + 3 \text{ Zehner} + 4 \text{ Einer}$

Stufenzahl:	aufspalten:	Anzahl der 9er-Gruppen (unwichtig):	für jeden Hunderter/ Zehner usw. bleiben übrig:	insgesamt übrig:
...				
Hunderter				
Zehner				
Einer				
			Summe:	

Für die Teilbarkeit durch 9 entscheidet die Quersumme:

.....

3. Herleitung der 11er-Regel für dreistellige Zahlen. Beispiel: $234 = 2 \text{ Hunderter} + 3 \text{ Zehner} + 4 \text{ Einer}$

Stufenzahl:	aufspalten:	Anzahl der 11er-Gruppen (unwichtig):	für jeden Hunderter/ Zehner usw. bleiben übrig oder fehlen:	insgesamt übrig (+) / fehlen (-):
Hunderter		9 übrig	
Zehner		1 fehlt	
Einer		0 übrig	
			Summe:	

Für die Teilbarkeit durch 11 entscheidet:

.....

1. Teilbarkeitsregeln:

Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn **die Einerziffer 0; 2; 4; 6 oder 8 heißt**, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn **ihre Quersumme durch 3 teilbar ist**, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn **die Zehnerziffer gerade ist und die Einerziffer 0; 4 oder 8 heißt**,
oder **die Zehnerziffer ungerade ist und die Einerziffer 2 oder 6 heißt**, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn **die Einerziffer 0; oder 5 heißt**, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn **ihre Quersumme durch 9 teilbar ist**, sonst nicht.

Eine Zahl ist durch 10 teilbar, wenn **die Einerziffer 0 heißt**, sonst nicht.

2. Herleitung der 9er-Regel am Beispiel 234: $234 = 2 \text{ Hunderter} + 3 \text{ Zehner} + 4 \text{ Einer}$

Stufenzahl:	aufspalten:	Anzahl der 9er-Gruppen (unwichtig):	für jeden Hunderter/ Zehner usw. bleiben übrig:	insgesamt übrig:
...				
Hunderter	$100 = 11 \cdot 9 + 1$	11	1	2
Zehner	$10 = 1 \cdot 9 + 1$	1	1	3
Einer	1	0	1	4
Summe:				$2 + 3 + 4 = 9 \rightarrow$ noch eine 9er-Gruppe \rightarrow keiner übrig

Für die Teilbarkeit durch 9 entscheidet die Quersumme:

Einerziffer plus Zehnerziffer plus Hunderterziffer plus Tausenderziffer usw.

3. Herleitung der 11er-Regel für dreistellige Zahlen. Beispiel: $234 = 2 \text{ Hunderter} + 3 \text{ Zehner} + 4 \text{ Einer}$

Stufenzahl:	aufspalten:	Anzahl der 11er-Gruppen (unwichtig):	für jeden Hunderter / Zehner usw. bleiben übrig oder fehlen:	insgesamt übrig (+)/ fehlen (-):
Hunderter	$100 = 9 \cdot 11 + 1$	9	1 übrig	2
Zehner	$10 = 1 \cdot 11 - 1$	1	1 fehlt	-3
Einer	1	0	1 übrig	4
Summe:				$2 - 3 + 4 = 3$ sind übrig

Für die Teilbarkeit durch 11 entscheidet:

Hunderterziffer plus Einerziffer minus Zehnerziffer

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht
 Phase 4. wird man je nach Zeit und Interesse der SuS stattfinden oder wegfallen lassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU z.T. EA / PA 20 Min.	SuS wiederholen die bis dahin bekannten Teilbarkeitsregeln ($n = 2; 3; 4; 5; 9; 10$), zunächst EA/PA. Teil 1. des Arbeitsblattes wird gemeinsam ausgefüllt, die angestrebte Hilfsregel zur Teilbarkeit durch 4 wird von den SuS an der 4er-Reihe 4; 8; 12; 16; 20; 24; 28; 32; 36; 40; 44; 48; 52; 56; 60; 64; 68; 72; 76; 80; 84; 88; 92; 96 ... in EA/PA erkannt. L gibt ggf. den Tipp: „Unterscheide die beiden Fälle Zehnerziffer gerade bzw. Zehnerziffer ungerade.“ SuS üben die Teilbarkeitsregeln. L stellt dazu Aufgaben vom Typ - Durch welche n (s.o.) ist 3345 teilbar? - Wie muss die letzte Ziffer (x) von $1234x$ lauten, damit eine Teilbarkeit durch n vorliegt? SuS erfinden selbst solche Aufgaben.	Arbeitsblatt Teil 1. ggf. Tafel o.ä.
2. Erarbeitung I FEU 10 Min.	L leitet mit den SuS die 9er-Regel anhand des Gruppenaufteilungs-Modells her.	Arbeitsblatt Teil 2. ggf. Tafel o.ä.
3. Erarbeitung II EA / PA dann FEU 10 Min.	SuS leiten die 11er-Regel für dreistellige Zahlen anhand des Gruppen-Aufteilungs-Modells her. L unterstützt, insbesondere bei der Installation und numerischen Interpretation von „1 fehlt“. Die 11er-Regel wird „gefeiert“: - an Beispielen angewandt und bestätigt (Überprüfung durch Division) - SuS „basteln“ mithilfe der 11er-Regel dreistellige 11er-Zahlen - SuS erkennen die beiden Fälle - <i>Hunderterziffer plus Einerziffer minus Zehnerziffer = 0:</i> → es gleicht sich gerade aus - <i>Hunderterziffer plus Einerziffer minus Zehnerziffer = 11:</i> → noch eine weitere 11er-Gruppe kann gebildet werden.	Arbeitsblatt Teil 3. ggf. Tafel o.ä.
4. Erarbeitung III FEU 15 Min.	L informiert ggf. SuS darüber, wie die allgemeine 11er-Regel lautet (alternierende Quersumme) und thematisiert am Zahlenbeispiel 7491, dass ggf. eine 11er-Gruppe aufgelöst werden muss. L informiert ggf. SuS über die 6er-, die 7er- (ggf. nur für dreistellige Zahlen) und die 8er-Regel.	