

Infoblatt

Sachanalyse und didaktische Reduktion:

Für die Berechnung der Endziffer eines Produkts genügt es, die Endziffern der Faktoren zu multiplizieren. Das kann man sehr leicht erkennen, wenn man eine schriftliche Multiplikation durchführt und die Endziffern jeweils rot markiert.

Da es nur endlich viele Endziffern gibt, müssen diese sich wiederholen. Dies erkennt man, wenn man beispielsweise die Potenzen $7^1, 7^2, 7^3, 7^4, 7^5 \dots$ aufschreibt.

Mit dieser Periode lässt sich die Endziffer von $7^{\text{Jahreszahl}}$ bestimmen.

Mathematisch geht das über Kongruenzrechnung. In unserem Beispiel kann man das didaktisch so reduzieren, dass man sich eine Viererzahl in der Nähe der Jahreszahl sucht und dann von der zugehörigen Endziffer ausgehend bis zur Jahreszahl abzählt.

Als Erweiterung erkennt man, dass nur endlich viele Beispiele untersucht werden müssen

Basis hat Endziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Endziffern der Potenz	0	1	2, 4, 8, 6	3, 9, 7, 1	4, 6	5	6	7, 9, 3, 1	8, 4, 2, 6	9, 1

Es gibt also abgesehen von den trivialen Fällen nur die Periode 2 oder 4.

Ziele:

- erkennen, dass man schwierige Aufgaben durch Anwendung universeller Problemlösestrategien lösen kann
- die Problemlösestrategien *vereinfachen*, *systematisch vorgehen* und *genau beobachten* kennenlernen und erproben
- Kongruenzrechnung auf einem sehr einfachen Niveau intuitiv erleben
- Kompetenzerleben

Material:

- keine Materialien
- Arbeit an der Tafel und im Heft

Didaktischer Kommentar

Die Aufgabe ist im Hinblick auf das Kompetenzerleben der Schülerinnen und Schüler (SuS) besonders gut geeignet, weil sie auf den ersten Blick sehr schwierig zu sein scheint und trotzdem mithilfe geeigneter Problemlösestrategien lösbar ist.

Deshalb ist es wichtig, in der Motivationsphase den hohen Schwierigkeitsgrad der Aufgabe herauszuarbeiten. Der Landeswettbewerb Mathematik richtet sich an begabte SuS der Klassen 7 bis 9. Wer solche Aufgaben lösen kann, zählt also zur Zielgruppe des Wettbewerbs!

Bei der Formulierung der Problemlösestrategien sind folgende Vergleiche geeignet:

Strategie vereinfachen

Wenn du über eine 2 m hohe Latte springen willst, dann kannst du das 100-mal versuchen und die Latte jedes Mal reißen. Das ist frustrierend.

Hochspringerinnen bzw. Hochspringer gehen anders vor.

Sie beginnen mit einer 1 m hohen Latte und steigern die Höhe langsam. Das führt erfolgreicher zum Ziel, weil man seine Technik dabei immer weiter verbessert.

Strategie systematisch vorgehen

Beim Hochspringen könnte man die Latte schließlich auf 1,2 m dann auf 1,5m und dann auf 1,7 m hoch legen. Ist das sinnvoll?

Strategie gut beobachten

Ob bei einem Hochsprung die Latte gerissen wird oder nicht, dafür gibt es Gründe, die man genau beobachten muss.

Die SuS erarbeiten das Problem in zwei Schritten. Zuerst werden systematisch die Siebener-Potenzen aufgeschrieben, bis die Wiederholung erkannt wird. Beim Berechnen der Endziffer stellt man fest, dass man nur die Endziffern der Faktoren berechnen muss. Für beide Erkenntnisse sind Farben und sauberes ausführliches Aufschreiben enorm hilfreich. Das sollte auch die erste Hilfe durch die Lehrkraft sein. Wenn erste Erkenntnisse vorliegen (Think) tauschen sich zwei aus (Pair) und fassen es dann in einer Gruppe oder im Plenum so zusammen, dass die anderen es verstehen können. Am Schluss wird das Ergebnis an der Tafel gesichert.

In der zweiten Erarbeitungsphase der SuS muss nun noch erkannt werden, dass jede vierte Siebener-Potenz dieselbe Endziffer hat. **Hilfestellungen** (als Impuls an geeigneter Stelle):

Zum Beispiel: $7^4 = \dots 1$; $7^8 = \dots 1$; $7^{12} = \dots 1$; usw.

Welche Eigenschaft haben die Hochzahlen?

Wie ist das mit der Hochzahl 2000?

Am Ende muss das Ergebnis gefeiert werden. Jede Erkenntnis kann nicht genug gelobt werden!

Sicherheit im Verfahren erhalten die SuS durch die Wiederholung bzw. Erweiterung durch ähnliche Aufgaben.

Insgesamt sollen die Strategien in späteren Stunden aufgegriffen werden.

Tafelanschrieb

$7^1 = 7$ $7^2 = 49$ $7^3 = 343$ Nebenrechnung: $343 \cdot 7 = 2401$ Beobachtung: Für die letzte Ziffer ist immer nur das Produkt aus letzter Ziffer und 7 verantwortlich $3 \cdot 7 = 21$ $7^4 = \dots 1$ $7^5 = \dots 7$ $7^6 = \dots 9$ $7^7 = \dots 3$ $7^8 = \dots 1$	Endziffern Problemlösestrategien Wie lautet die letzte Ziffer von 7^{2017} ? Die Strategie VEREINFACHEN Beginne mit etwas Leichtem. Die Strategie SYSTEMATISCH VORGEHEN z.B. schrittweise steigern - jedenfalls nicht wild durcheinander Die Strategie GUT BEOBACHTEN Was funktioniert, was nicht, woran liegt es?	Hochzahl 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 Endziffer 7 9 3 1 7 9 3 1 7 9 3 1 Ergebnis: Ist die Hochzahl durch 4 teilbar, dann ist die Endziffer 1, also $7^{2016} = \dots 1$ und somit $7^{2017} = \dots 7$
--	--	--

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf 5. und 6. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Problemstellung und Motivation FEU 5 Min.	L berichtet vom Landeswettbewerb Mathematik (LWM) und dessen Zielen. L stellt das Problem vor: Wie lautet die letzte Ziffer von 7^{2017} ? (Aufgabe des LWM) L Warum ist das eine schwierige Aufgabe? Warum kann man die Aufgabe nicht mit dem Taschenrechner lösen?	Tafel
2. Erarbeitung I FEU 15 Min.	Tafel: Die Strategie vereinfachen L Wie könnte man diese Strategie auf unser Problem anwenden? Erwartete Antworten: 7^2 , 7^3 , 7^{10} Tafel: Die Strategie systematisch vorgehen L Wie schreibst du die Siebener Potenzen auf? Erwartete Antwort: $7^1 = 7$; $7^2 = 49$; $7^3 = 343$; usw. Tafel: Die Strategie gut beobachten Wenn du letzte Ziffern ausrechnest, dann solltest du gut beobachten, ob du irgendwelche Methoden findest, wie das besonders einfach geht.	Tafel
3. Erarbeitung II Think-Pair-Share 10 Min.	SuS erarbeiten mit den neuen Strategien erste Ergebnisse.	Heft
4. Sicherung und Reflexion FEU 10 Min.	L fasst an der Tafel die Ergebnisse zusammen. (Tafelanschrieb linke Tafel) bis den SuS die Wiederholung auffällt.	Tafel / Heft
5. Problemlösung EA/PA 15 Min.	Arbeitsauftrag: Könnt ihr jetzt herausfinden, wie die letzte Ziffer von 7^{2017} lautet? Wendet evtl. wieder eine der gelernten Strategien an.	Heft
6. Sicherung 5 Min.	Tafelanschrieb Ergebnis	Tafel / Heft
7. Puffer	Aufgaben: 1. Wie lautet die Endziffer von 7^{3500} ? 2. Wie lautet die Endziffer von 1^{2017} ? 3. Wie lautet die Endziffer von 5^{2017} ? 4. Wie lautet die Endziffer von 6^{2017} ? Richtig schwierig: Kann man die Strategien bei jeder Aufgabe "Wie lautet die Endziffer von einer beliebigen Potenz" anwenden?	Heft