

Infoblatt
Sachanalyse, didaktische Reduktion und Entscheidung:

Satz 1: Es gilt $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Beweis: Durch vollständige Induktion oder mithilfe der Summation der beiden folgenden Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & k & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & (n-(k-1)) & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array}$$

Um diesen Satz rankt sich die (nicht verbürgte) Geschichte des „kleinen GAUß“

(CARL FRIEDRICH GAUß, 1777 bis 1855, einer der bedeutendsten Mathematiker):

Die Schule, in die GAUß im Alter von neun Jahren ging, hatte nur ein Klassenzimmer. Der Lehrer wollte die älteren Schüler unterrichten und stellte den jüngeren Schülern die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 100 zu addieren. Er verfolgte dabei die Absicht, sie mindestens eine Stunde lang still zu beschäftigen. Der kleine GAUß hatte die Lösung (5050) nach drei Minuten mithilfe eines Tricks errechnet. Wie hatte er das gemacht?

Schreibt man die Aufgabe etwas suggestiv auf, können auch Sechstklässlerinnen bzw. Sechstklässler auf den Trick des Zusammenfassens geeigneter Summanden kommen:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 &= (1 + 99) + (2 + 98) + (3 + 97) + \dots + (49 + 51) + 50 + 100 = \\ 49 \cdot 100 + 50 + 100 &= 4900 + 50 + 100 = 5050 \end{aligned}$$

Diese Version hat den Vorteil, dass sie den Lösungsweg selbst entdecken können. Die Herleitung über zwei Zeilen (s.o.) ist eleganter, die Formel ergibt sich direkt ohne weitere Überlegungen zur Anzahl der Paare und der „übrigen“ Summanden. Dieser Kniff liegt aber eher nicht auf der Hand.

Eine didaktische Entscheidung: Aus Gründen der Nachhaltigkeit, der Einsicht und des Transfer-Spektrums halten wir es für sinnvoll, hier nicht auf die Formel oder den Zwei-Zeilen-Trick abzuheben.

Die Berechnung von variierten Aufgaben „zu Fuß“ ist zwar nicht ganz so elegant, dafür ist die „Bodenhaftung“ gewährleistet. Der Fokus liegt u.a. auf dem Prozess der Erkundung von „+ ... +“:

- Bestimme die Summanden-Anzahl.
- Bestimme die Pärchen-Anzahl mit gleicher Pärchen-Summe.
- Bestimme die Mitte und das äußere und das innere Pärchen.
- Bestimme ggf. den „übrigen“ Summanden.

Bei der Bestimmung dieser Einzelelemente treten Redundanzen auf. Die Bestimmung des inneren Pärchens, ausgehend von der Mitte, dient der Durchdringung des Sachverhalts und bietet eine Problemöglichkeit bezüglich der Pärchen-Summe.

Im Hinblick auf die Variationsaufgaben hier noch der Satz 2, der sich aus Satz 1 durch einige Umformungen ergibt. b sei dabei der letzte Summand der arithmetischen Reihe, $b := a + (n-1) \cdot d$.

Satz 2: $\sum_{k=1}^n (a + (k-1) \cdot d) = a \cdot n + d \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ bzw. $\dots = (a+b) \cdot \frac{b-a+d}{2d}$

Ziele:

- Die Problemlösestrategie „geschicktes Rechnen bei strukturierten Summen“ kennenlernen bzw. erproben, dabei ist der Lösungsprozess, insbesondere die Identifizierung der beteiligten einzelnen Elemente, wichtiger als das Ergebnis (!).
- Die Problemlösestrategie „Aufspalten in Teilprobleme“ kennenlernen bzw. erproben.
- Erkennen, dass zwischen a und b (einschließlich) $b - (a-1)$ Zahlen liegen und dass die Mitte der Zahlen a und b gleich $(a+b) : 2$ ist; das sind zwei sehr alltagstaugliche Erkenntnisse 😊.
- Die Bedeutung der beteiligten Zahlen klar benennen und unterscheiden können.

Tafelanschrieb

<p>Der Summentrick des kleinen GAUß ...</p> <p>1.) $1+2+3+ \dots +97+98+99+100 = ?$</p> <p>$\boxed{1}+\boxed{2}+\dots+\boxed{49}+\boxed{50}+\boxed{51}+\dots$ $\quad\quad\quad +\boxed{98}+\boxed{99}+100 = ?$</p> <p>... heißt „Pärchen bilden“</p> <p>Summanden-Anzahl: 100</p> <p>äußeres Pärchen: (1;99)</p>	<p>inneres Pärchen: (49;51)</p> <p>Pärchen-Summe: 100</p> <p>Pärchen-Anzahl: 49</p> <p>restliche Summanden: 50 und 100</p> <p>$\dots = 49 \cdot 100 + 50 + 100 =$ $= 4900 + 150 = \underline{5050}$</p>	<p>2.) $1+2+3+ \dots +85+86+87 = ?$</p> <p>Summanden-Anzahl: 87</p> <p>äußeres Pärchen: (1;87)</p> <p>Pärchen-Summe: 88</p> <p>Mitte: $(1+87):2 = 44$</p> <p>inneres Pärchen: (43;45)</p>	<p>Pärchen-Anzahl: 43</p> <p>restlicher Summand: 44</p> <p>$\boxed{1}+\boxed{2}+\dots+\boxed{43}+\boxed{44}+\boxed{45}+\dots+\boxed{86}+\boxed{87} =$ $43 \cdot 88 + 44 = 3784 + 44 = \underline{3828}$</p>
<p>3.) $1+2+3+ \dots +72+73+74 = ?$</p> <p>74 Summanden: 74 ist eine gerade Zahl, die Pärchenbildung geht auf!</p> <p>Pärchen-Summe: 75</p> <p> —...— — — —...— </p> <p>$\boxed{1} \quad \quad \quad \boxed{37} \quad \quad \boxed{38} \quad \quad \quad \boxed{74}$</p> <p>(37,5)</p> <p>Pärchen-Anzahl: 37</p> <p>$\dots = 37 \cdot 75 = \underline{2775}$</p>	<p>4.) $10+11+12+ \dots +78+79+80 = ?$</p> <p>Summanden-Anzahl:</p> <p>$80 - (10-1) = 80 - 9 = 71$</p> <p>Pärchen-Summe: 90</p> <p> —...— — — —...— </p> <p>$\boxed{10} \quad \quad \quad \boxed{44} \quad \quad \boxed{46} \quad \quad \quad \boxed{80}$</p> <p>45</p> <p>Pärchen-Anzahl: $(71-1):2 = 35$</p> <p>restlicher Summand: 45</p> <p>$\dots = 35 \cdot 90 + 45 = \underline{3195}$</p>		

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird die Lehrkraft stärker oder weniger stark lenken bzw. die 5. Phase weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 5 Min.	L erzählt die Geschichte vom „kleinen GAUß“ und schreibt die Überschrift und die Initialaufgabe in geeignet suggestiver Form wie folgt an die Tafel: 1.) $1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 + 100 = ?$	Tafel
2. Erarbeitung I EA / PA 20 Min.	SuS - suchen nach dem Trick und dem Ergebnis. L stellt ggf. weitere Aufgaben vom Typ $1 + 2 + \dots + (n-1) + n = ?$ ($n = 10 \rightarrow$ Probe durch Aufsummieren und $n = 99$) als Puffer, bis alle SuS die Initialaufgabe gelöst haben. L lobt und beobachtet, aber berät sehr zurückhaltend.	Heft
3. Plenum I // Typ: natürliche Zahlen von 1 ab aufsummieren // FEU 20 Min.	L sammelt die Erkenntnisse und schreibt an die Tafel $1 + 2 + \dots + 49 + 50 + 51 + \dots + 99 + 100 = ?$ (Zahlen der betreffenden Paare gleich färben bzw. mit Bögen verbinden). weiter: vgl. Tafelanschrieb L macht die Probe mit der Anzahl der Summanden mündlich. L und SuS lösen nach diesem Muster gemeinsam die Aufgaben 2.) und 3.) (Dokumentation bei 3.) verkürzt und unter Verwendung einer Skizze – vgl. Tafelanschrieb) unter Einbezug des letzten Summanden bei der Pärchenbildung (Bemerkung: Beim Einführungsbeispiel verfährt man wegen des „schönen“ Hunderters etwas anders.) und erkennen - die Fallunterscheidung nach n ungerade / gerade (die Mitte kommt als Summand vor / nicht vor) - die Mitte von zwei Zahlen als ihren Durchschnitt.	Tafel / Heft
4. Plenum II // Typ: natürliche Zahlen von einer beliebigen Zahl ab aufsummieren // EA / PA 15 Min.	L stellt die Aufgabe 4.) $10 + 11 + 12 + \dots + 78 + 79 + 80 = ?$ L und SuS lösen diese nach obigem Muster gemeinsam (vgl. Tafelanschrieb). SuS und erkennen dabei, dass zwischen a und b (einschließlich) $b - (a-1)$ Zahlen liegen.	Tafel / Heft
5. Erarbeitung II // Typ gerade/ungerade Zahlen aufsummieren u.a. // EA / PA 30 Min.	L stellt je nach Situation weitere Variationsaufgaben. SuS bearbeiten diese selbständig, die Dokumentation kann jetzt knapper werden, und vergleichen ihre Lösungen mit dem aushängenden Lösungsblatt. L lobt, aber beobachtet und berät zurückhaltend.	Tafel / Heft Blatt Aufgaben + Lösungen