

Infoblatt

Die Knobelaufgaben-Sammlung umfasst etwa **100 Aufgaben** (Teilaufgaben sind einzeln gezählt) in den drei Schwierigkeitsstufen *einfach, **mittel und ***schwer, samt Lösungen und ggf. Kommentaren. Man darf den Begriff Knobelaufgabe hier gerne im weiteren Sinn verstehen. Trotzdem haben nicht wenige Aufgaben dieser Sammlung den typischen Knobelaufgaben-Clou. Einige der Knobelaufgaben haben auch die immanente Wiederholung von Stoffen aus Klasse 5 zum Inhalt.

Die Aufgaben können bei Mkid-Stunden als **Puffer** eingesetzt werden.

Der **Zeitbedarf** erstreckt sich mit allen Abstufungen von einer Minute (*Dörtes Mutter, Vier Töchter*) bis zu einer ganzen Sitzung (*Kryptogramm, römische Zahlzeichen, zeichnerisches Multiplizieren*), wenn man das ausdehnen möchte.

Manche Aufgabentypen (*Stimmt's; Schätzfragen*) eignen sich für ein kleines **Gewinnspiel**.

Eine Knobelaufgabe oder ein „Dreierpack“ von einer geeigneten Mischung von Knobelaufgaben zum Abschluss der Mkid-Stunde könnte zu einem **Ritual** werden.

Manche Aufgaben eignen sich gut zur **selbständigen Variation** durch die Schülerinnen und Schüler (*Buchstaben-Rätsel, Durchschnitte, Würfel*).

Es ist nicht daran gedacht, dass die Lehrkraft die Aufgaben gedruckt austeilte, sondern dass die **Aufgaben vorgelesen** und ggf. im Unterrichtsgespräch **erläutert** werden. Ggf. werden wichtige Informationen an die Tafel (o.ä.) geschrieben.

Für die Aufgaben *Punktsymmetrisch* und *Vier gleiche Teile* kann man auf das Blatt *4-4-Quadrate* zurückgreifen, wenn man das möchte.

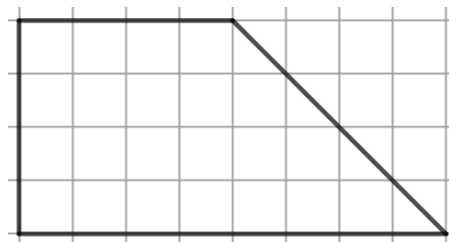
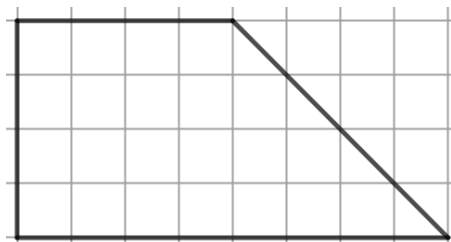
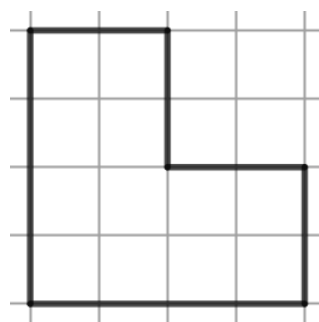
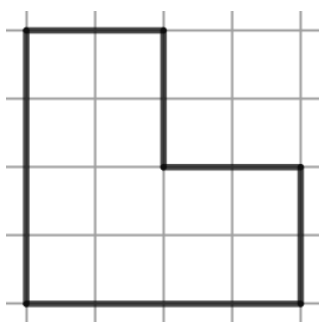
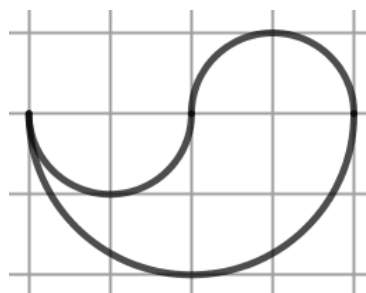
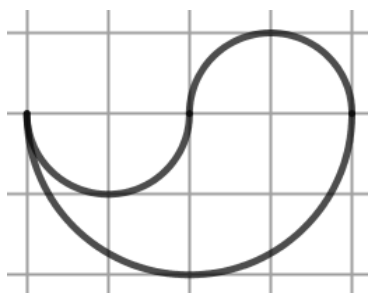
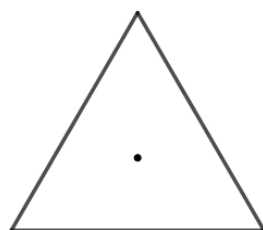
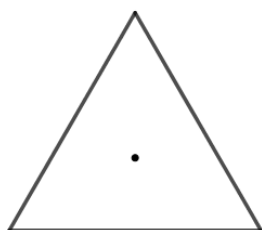
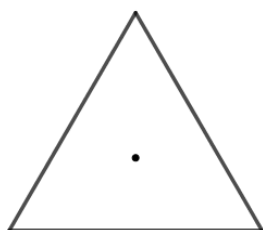
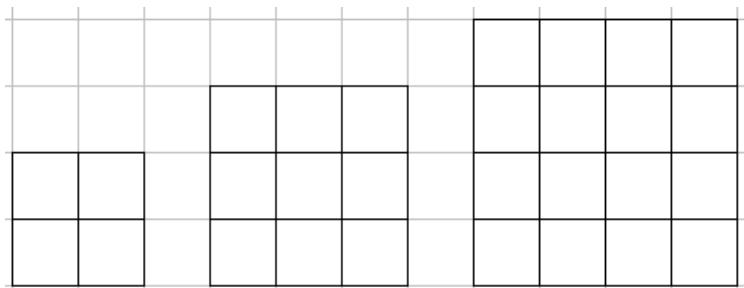
Bei Aufgaben, die Figuren enthalten, kann man auf das Blatt *Figuren* zurückgreifen, wenn man das möchte.

Bei **schwierigen Aufgaben** (*Kryptogramm, Waageprobleme*) ist es schon gut, wenn die Schülerinnen und Schüler

- das Problem erfassen
- sich Gedanken machen
- von der Lehrkraft gesagt bekommen, dass dieses Problem ganz schwierig ist
- selbständig erste Lösungsansätze fassen (loben, loben, loben!)
- mit einem Tipp auf die richtige Lösung kommen
- das Dilemma auskosten
- die Auflösung verstehen
- deren intellektuellen Charme erkennen
- erkennen, dass es auch in aussichtslosen Situationen eine Lösung geben kann.

An geeigneten Stellen wird die Lehrkraft auf eine der **Problemlöse-Strategien** hinweisen.

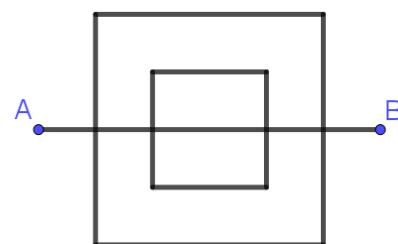
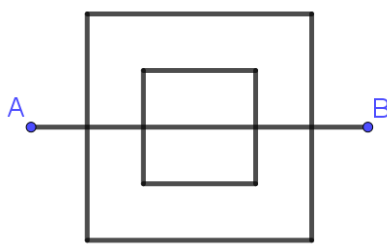
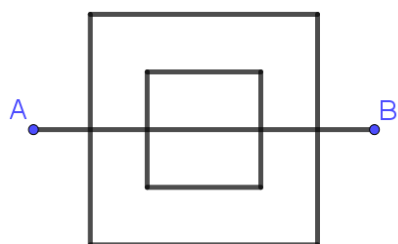
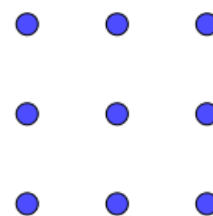
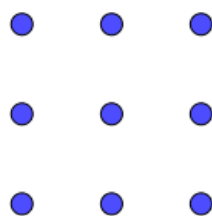
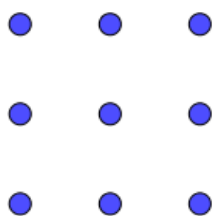
Die **Selbsterfahrung der Lehrkraft** ist wichtig beim Knobeln, hierfür sei z. B. die Aufgaben *Fischblase* oder *Kryptogramm* empfohlen.



	9	
	1	

16			
	10	11	
	6		
4			1

11	24	7	20	
4			8	16
		13	21	9
	18	1	14	
		19		



a)

$$XI - II = XII$$

b)

$$X + IV = V$$

c)

$$X + V - II = VII$$

d)

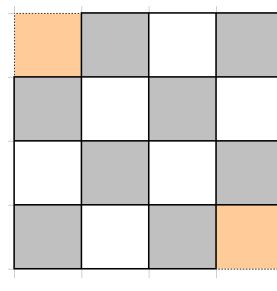
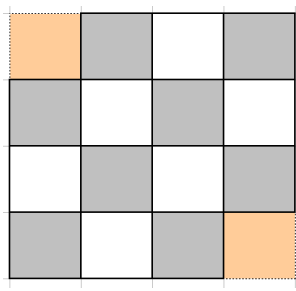
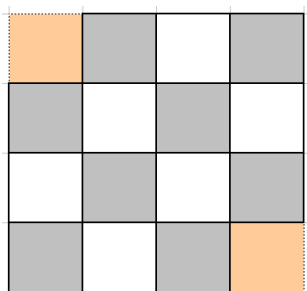
$$VI + VIII = XII$$

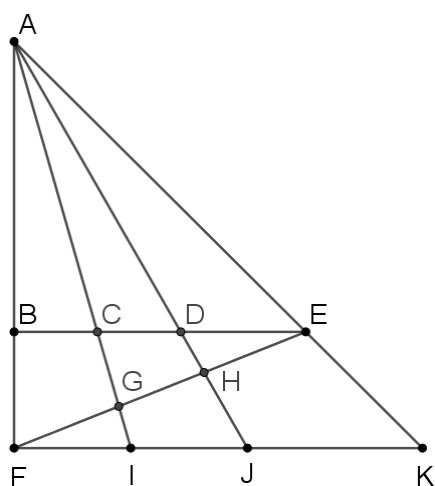
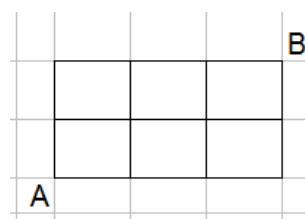
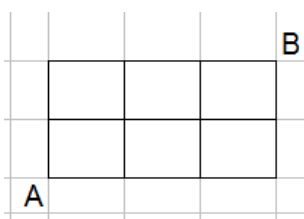
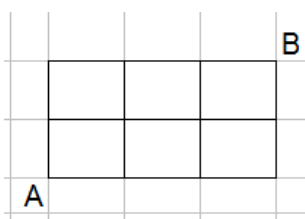
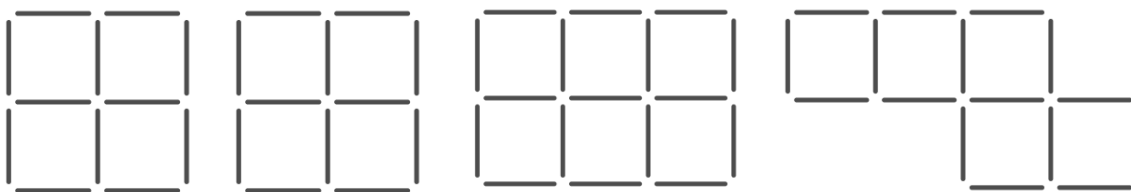
e)

$$XII - II = XV + VI$$

f)

$$X - II = XV + VI$$





4	2	3				3	2					1	2				5	6							2						3		
	1						1	4					3					2						4	6	3				1	5		
	5						5						5	6				1							5						4	6	
a)	6					b)	6					c)	4				d)	4	3					e)	1					f)	2		
1																																	
2							5					2					3												1				
6	4						4	6	3			6	3				4	5									2	3					
	5							2					5	1				1												5	4		
g)	3						h)	1				i)	4				j)	2	6									k)			6		

A 5x5 grid of squares, consisting of 5 rows and 5 columns, totaling 25 squares. The grid is used for drawing a picture.A 4x4 grid of squares, consisting of 16 squares in total, arranged in 4 rows and 4 columns. The grid is used for drawing a net of a cube.A 4x4 grid of squares, consisting of 4 rows and 4 columns, totaling 16 squares. The grid is empty and is used for drawing a net of a cube.A 4x4 grid of squares, consisting of 4 rows and 4 columns, totaling 16 squares. The grid is used for drawing a picture.A 4x4 grid of squares, consisting of 4 rows and 4 columns, totaling 16 squares. The grid is used for drawing a shape.A 4x4 grid of squares, consisting of 16 squares in total, arranged in 4 rows and 4 columns. The grid is used for drawing a net of a cube.A 4x4 grid of squares, consisting of 16 squares in total, arranged in 4 rows and 4 columns. The grid is used for drawing a net of a cube.A 4x4 grid of squares, consisting of 4 rows and 4 columns, totaling 16 squares. The grid is used for drawing a picture.A 4x4 grid of squares, consisting of 4 rows and 4 columns, totaling 16 squares. The grid is formed by 5 horizontal lines and 5 vertical lines, creating a uniform pattern of squares.A 4x4 grid of squares, consisting of 4 rows and 4 columns, totaling 16 squares. The grid is formed by 5 horizontal and 5 vertical lines.A 4x4 grid of squares, consisting of 4 rows and 4 columns, totaling 16 squares. The grid is formed by 5 horizontal and 5 vertical lines.A 4x4 grid of squares, consisting of 4 rows and 4 columns, totaling 16 squares. The grid is used for drawing a picture.A 4x4 grid of squares, consisting of 4 rows and 4 columns, totaling 16 squares. The grid is formed by 5 horizontal and 5 vertical lines.A 4x4 grid of squares, consisting of 4 rows and 4 columns, totaling 16 squares. The grid is formed by 5 horizontal lines and 5 vertical lines, creating a uniform pattern of squares.A 4x4 grid of squares, consisting of 4 rows and 4 columns, totaling 16 squares. The grid is formed by 5 horizontal and 5 vertical lines.A 4x4 grid of squares, consisting of 4 rows and 4 columns, totaling 16 squares. The grid is formed by 5 horizontal and 5 vertical lines.A 4x4 grid of squares, consisting of 4 rows and 4 columns, totaling 16 squares. The grid is formed by 5 horizontal and 5 vertical lines.A 4x4 grid of squares, consisting of 4 rows and 4 columns, totaling 16 squares. The grid is formed by 5 horizontal and 5 vertical lines.A 4x4 grid of squares, consisting of 4 rows and 4 columns, totaling 16 squares. The grid is formed by 5 horizontal and 5 vertical lines.

Knobelaufgaben-Sammlung

Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen; und jeder geht zufrieden aus dem Haus. (Goethe)

Schwierigkeitsgrad: *einfach **mittel ***schwierig

****Anzahl der Quadrate:**

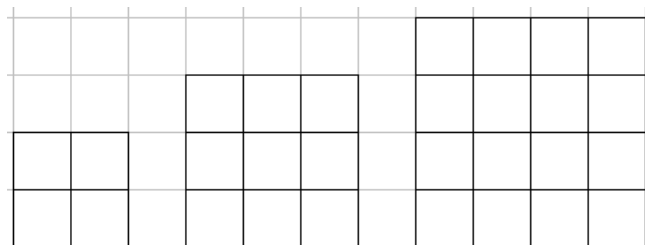
In einem 2x2-Quadrat (linke Abbildung) gibt es insgesamt fünf Quadrate, nämlich vier 1x1-Quadrate und ein 2x2-Quadrat.

a) Wie viele Quadrate gibt es in einem 3x3-Quadrat (mittlere Abbildung)?

b) Wie viele Quadrate gibt es in einem 4x4-Quadrat (rechte Abbildung)?

Schreibe zunächst einzeln auf, wie viele 1x1-Quadrate, wie viele 2x2-Quadrate, wie viele 3x3-Quadrate und wie viele 4x4-Quadrate es sind.

c) Wie viele Quadrate gibt es vermutlich in einem 10x10-Quadrat?


Anzahl der Quadrate – Lösungen:

a) Anzahl der 1x1-Quadrate: 9; Anzahl der 2x2-Quadrate: 4; Anzahl der 3x3-Quadrate: 1; insgesamt also: $9 + 4 + 1 = 14$

b) Anzahl der 1x1-Quadrate: 16; Anzahl der 2x2-Quadrate: 9; Anzahl der 3x3-Quadrate: 4; Anzahl der 4x4-Quadrate: 1; insgesamt also: $16 + 9 + 4 + 1 = 30$

c) Die Vermutung $100 + 81 + 64 + 49 + 36 + 25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 385$ liegt nahe.

Im Bildungsplan 2016 für die Klasse 5/6 steht: Die Schülerinnen und Schüler (SuS) können die Quadratzahlen von 1^2 bis 20^2 wiedergeben und erkennen (!).

Anzahl der Quadrate – Kommentar:

Strategien: alle Fälle der Reihe nach systematisch sorgfältig und konzentriert „abarbeiten“ & dann aus Beispielen eine Vermutung generieren.

Die Vermutung *In einem $N \times N$ -Quadrat gibt es $N^2 + (N-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2$ Quadrate.* liegt nahe.

Entre nous: Der Nachweis gelingt durch vollständige Induktion.

Induktionsverankerung: Die Behauptung ist offensichtlich richtig für $N = 1$.

Induktionsannahme: Sie sei richtig für N .

Induktionsschluss: Zeige, dass sie dann auch für $N+1$ richtig ist.

Es gilt:

Anzahl der 1x1-Quadrate im $N \times N$ -Quadrat = Anzahl der 2x2-Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat

Anzahl der 2x2-Quadrate im $N \times N$ -Quadrat = Anzahl der 3x3-Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat (vgl. Abbildung unten für $N = 3$) ...

Anzahl der $K \times K$ -Quadrate im $N \times N$ -Quadrat = Anzahl der $(K+1) \times (K+1)$ -Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat

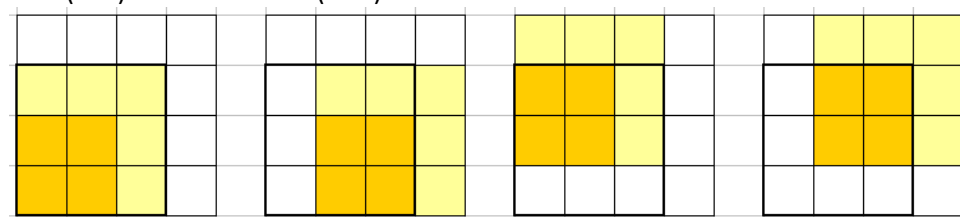
...

Anzahl der $N \times N$ -Quadrate im $N \times N$ -Quadrat = Anzahl der $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat

Insgesamt gilt: Anzahl aller Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat =

Anzahl aller Quadrate im $N \times N$ -Quadrat + Anzahl der 1x1-Quadrate im $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat =

$$N^2 + (N-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2 + (N+1)^2 \quad \blacksquare$$



***Artisten:**

Kurt und Landolf sind beide Artisten. Von der Körpergröße her ist Kurt ziemlich kurz, Landolf ziemlich lang. Sie möchten aus einem sehr hohen Schrank etwas herausholen, einer soll sich dabei auf die Schultern des andern stellen, als Artisten können sie das.

Wer muss auf wessen Schulter steigen, damit der obere möglichst hoch in den Schrank fassen kann?

Artisten - Lösung:

Die Schulterhöhe des „oberen Mannes“ ist zwar jeweils dieselbe, nicht aber die Greifhöhe, denn Landolf hat als „Langer“ auch die längeren Arme. Landolf soll auf die Schultern von Kurt steigen, nicht umgekehrt.

Artisten - Kommentar:

Eine Skizze kann helfen.

****Besteck:**

Eine Gabel und ein Löffel wiegen zusammen 135g, eine Gabel und ein Messer wiegen zusammen 140g, ein Löffel und ein Messer wiegen zusammen 155g.

Was wiegen eine Gabel, ein Löffel und ein Messer zusammen?

Besteck – Lösung:

Wirft man alles zusammen – das ist der Clou bei dieser Aufgabe, so hat man von allen drei Bestecksorten zwei Stück: zwei Gabeln, zwei Löffel und zwei Messer mit einem Gesamtgewicht von 430g. Eine Gabel, ein Löffel und ein Messer wiegen zusammen also 215g.

Besteck – Kommentar:

Hier ist nicht an die (formale) Lösung eines linearen Gleichungssystems gedacht, aus dem man zunächst die einzelnen Gewichte ermittelt (Gabel 60 g, Löffel 75 g, Messer 80 g).

Natürlich erhält man die Einzelgewichte aus dem Summengewicht 215 g dann auch schnell durch Subtraktion: Messergewicht = $215\text{ g} - 135\text{ g} = 80\text{ g}$ usw.

***Brett:**

Ein Brett ist 250 cm lang. Es soll in gleiche Stücke zu je 50 cm Länge zersägt werden. Wie oft muss man sägen?

Brett – Lösung:

Man muss 4-mal sägen, nicht 5-mal – wer's nicht glaubt, macht eine Skizze.

***Buchstaben-Rätsel mit Lösungen:**

Zu einer „Abkürzung“ in einer abenteuerlichen Schreibweise ist eine Bedeutung zu finden.

Beispiel: 60 = M hat eine S → Bedeutung: 60 Minuten hat eine Stunde

500 = G hat ein P → Bedeutung: 500 Gramm hat ein Pfund

100 = L hat ein HL → Bedeutung: 100 Liter hat ein Hektoliter

4 = E hat ein D → Bedeutung: 4 Ecken hat ein Drachen

1000 = KCM hat ein L → Bedeutung: 1000 Kubikzentimeter hat ein Liter

6 = Q hat ein W → Bedeutung: 6 Quadrate hat ein Würfel

Buchstaben-Rätsel – Kommentar:

Mit den Schülerinnen und Schülern zusammen selbst Beispiele (gerne auch außermathematische: 366 Tage hat ein Schaltjahr, 4 Blätter hat ein Glücks-Kleeblatt, 5 Finger hat eine Hand, 11 Spieler hat eine Fußballmannschaft usw.) finden, macht Spaß!

***Cola:**

Eine Dose Cola kostet 1 €. Das Cola selbst kostet 0,60 € mehr als die leere Dose. Was kostet die leere Dose?

Cola - Lösung:

Die spontane Idee, dass die leere Dose $1,00 \text{ €} - 0,60 \text{ €} = 0,40 \text{ €}$ kostet, ist falsch. Das offenbart eine Probe (!): $0,40 \text{ €} + (0,40 \text{ €} + 0,60 \text{ €}) = 1,40 \text{ €}$. Die Dose kostet 0,20 € (Lösung durch Probieren). Das Cola kostet dann 0,80 €, das sind tatsächlich 0,60 € mehr als 0,20 €.

***Dörtes Mutter:**

Die Mutter von Dörte hat 4 Kinder. Das erste Kind heißt Mara. Das zweite Kind hat heißt Mere. Das dritte Kind heißt Mimi. Wie heißt das vierte Kind?

Dörtes Mutter - Lösung:

Nein, nicht Momo. Das vierte Kind von Dörtes Mutter muss Dörte heißen, wenn die anderen drei Kinder offenbar nicht Dörte heißen.

****Drei-Drei-Drei:**

Von den 10 Ziffern 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 und 9 werden jeweils zwei zu einer zweistelligen Zahl zusammengefasst, anschließend wird die Summe dieser fünf Zahlen gebildet. Dafür gibt es viele Möglichkeiten. Welche davon haben die Summe 360, welche die Summe 351?

Drei-Drei-Drei – Lösungen:

$94 + 83 + 72 + 61 + 50 = 360$... das ist die maximale mögliche Summe, die fünf größten Ziffern müssen Zehnerziffern sein, die Einerziffern kann man dabei untereinander beliebig vertauschen.

$95 + 83 + 72 + 61 + 40 = 351$... ausgehend von der Maximalsumme wurde „4“ und „5“ vertauscht, das bedeutet 10 weniger und 1 mehr, die Einerziffern kann man dabei wieder untereinander beliebig vertauschen.

Vertauscht man eine andere Zehnerziffer als 5 mit irgendeiner einer Einerziffer erhält man Zahlen die kleiner sind als 351.

Drei-Drei-Drei – Kommentar:

Dies ist eine selbstdifferenzierende Knobelaufgabe. Jede(r) kann auf seinem eigenen Niveau ein Erfolgserlebnis erreichen:

- eine Lösung finden - mehrere Lösungen finden - alle Lösungen finden
- begründen, warum es keine weiteren gibt

***Dreiecke:**

Ordne sechs gleich lange Stäbe so an, dass vier gleichseitige Dreiecke entstehen – genau vier, nicht mehr und nicht weniger.

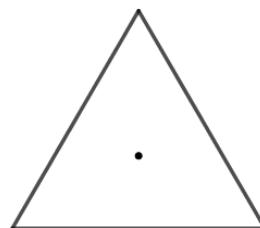
Dreiecke – Lösung:

Man bilde ein Tetraeder.

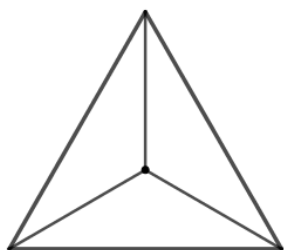
****Dreiteilung:**

Teile ein gleichseitiges Dreieck (vgl. Abbildung rechts mit eingetragem Mittelpunkt) in deckungsgleiche Teile (gleiche Form und gleiche Größe) auf, und zwar:

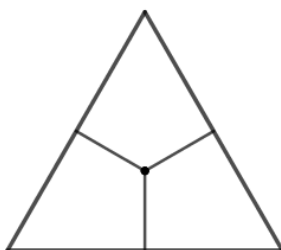
- a) in drei Dreiecke
- b) in drei Drachen
- c) in drei Trapeze

**Dreiteilung – Lösungen:**

a) Verbinde den Mittelpunkt mit den Eckpunkten.



b) Fülle das Lot vom Mittelpunkt auf die Seiten.



c) Zeichne Parallelen zu den Seiten durch den Mittelpunkt.

**Dreiteilung – Kommentar:**

Entre nous: Vom Mittelpunkt eines Dreiecks zu sprechen verbietet sich im Allgemeinen, weil dabei unklar ist, welche „Mitte“ gemeint ist. In Frage kommt z.B. der Umkreismittelpunkt, der Inkreismittelpunkt und der Schwerpunkt. Beim gleichseitigen Dreieck fallen alle diese Punkte (und noch weitere wie der Höhenschnittpunkt oder der FERMAT-TORRICELLI-Punkt, das ist der Punkt mit der minimalen Entfernungssumme zu den Eckpunkten) zusammen, so dass man wohl von „dem“ Mittelpunkt sprechen kann.

***Durchschnitte:**

- a) Zu den Zahlen 3 und 8 ist eine dritte Zahl gesucht, so dass der Durchschnitt der drei Zahlen 10 ist.
- b) Es sind vier unterschiedliche Zahlen gesucht, deren Durchschnitt größer als die zweitgrößte Zahl ist.
- c) Es sind drei unterschiedliche Zahlen gesucht, deren Durchschnitt größer als die größte der drei Zahlen ist.
- d) Bilde mit den Ziffern 1; 2; 3; 4; 5 und 6 (jede der sechs Ziffern soll genau einmal verwendet werden) drei Zahlen, deren Durchschnitt 37 ist.
- e) Felix hat von drei Zahlen den Durchschnitt berechnet. Er vergrößert eine Zahl um 6. Um wie viel vergrößert sich der Durchschnitt?

Durchschnitte – Lösungen:

- a) Dritte Zahl: 19, die Summe der drei Zahlen muss $3 \cdot 10 = 30$ sein.
- b) z.B.: 1; 2; 3 und 10 mit Durchschnitt 4
- c) Das ist nicht möglich.
- d) $(14 + 62 + 35) : 3 = 111 : 3 = 37$
- e) Der Durchschnitt vergrößert sich um 2.

Formal: $(a + b + c) : 3 = m$; $(a + b + c + 6) : 3 = m + 2$.

Man ist hier auch mit beispielgebundenen Argumentationen der Schülerinnen und Schüler (SuS) zufrieden.

Durchschnitte – Kommentar:

SuS können in aller Regel Durchschnitte (arithmetische Mittel) berechnen, auch schon vor einer Behandlung dieses Themas im Unterricht. Für diesen Fall würde man ausloten, was von den Aufgabenteilen a) bis d) möglich ist.

SuS können ggf. selbst solche Aufgaben erfinden.

***Elf:**

Welche Zahl ist gemeint mit „elf Tausend elf Hundert elf“?

Elf – Lösungen:

$$11 \cdot 1000 + 11 \cdot 100 + 11 = 12.111$$

***Extreme Körper:**

Was für ein Körper ist das?

- a) eine einzelne Spaghetti-Nudel
- b) ein Blatt Papier
- c) ein Sandkorn
- d) eine Büroklammer
- e) die Spitze eines gespitzten Bleistifts
- f) ein Haar
- g) ein Trinkhalm

Extreme Körper - Lösung:

- a) ein Zylinder
- b) ein Quader
- c) eine Kugel
- d) ein gebogener Zylinder
- e) ein Kegel
- f) ein Zylinder
- g) ein Hohlzylinder (ein Zylinder bei dem innen ein kleinerer Zylinder „fehlt“)

***Farbige Socken:**

Leander hat insgesamt zwei Paar dunkelblaue, drei Paar dunkelbraune und vier Paar dunkelgrüne Socken. Die liegen gewaschen und getrocknet in einer Schublade, aber einzeln und durcheinander. Er bittet Linda, ihm ein Paar gleichfarbige zu holen. Linda ist leicht farbenblind und kann diese dunklen Socken nicht unterscheiden. Wie viele Socken muss sie mindestens mitnehmen, damit sicher zwei gleichfarbige darunter sind?

Wir gehen davon aus, dass es hierbei keine linken oder rechten Socken gibt.

Farbige Socken – Lösung:

Sie muss mindestens vier Socken mitnehmen. Bei dreien sind es im ungünstigsten Fall drei verschiedene, bei vierten sind dann sicher zwei gleiche Farben dabei.

Farbige Socken – Kommentar:

Strategien hierbei:

- Den *Worst-Case betrachten*.
- Das sogenannte *Schubfachprinzip* anwenden. Wenn $n+1$ Kugeln in n Schubfächern verteilt werden sollen, dann liegt in mindestens einem Schubfach mehr als eine Kugel.

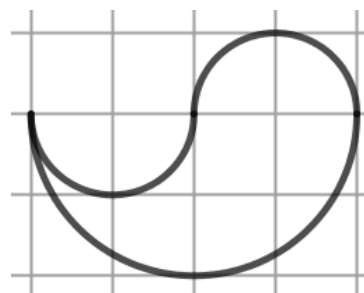
*****Fischblase:**

Teile die Fischblase (Figur rechts) in zwei deckungsgleiche Teile.
 Zur Info: Die Lösung ist nicht irgendwie „trickreich“. Man setzt (gedanklich) die Schere einmal an, schneidet ein Stück ab – fertig.

Fischblase – Lösung:

Die Lösung ist unten in sehr kleiner Schrift abgedruckt, damit man wirklich in Ruhe knobeln kann.

Der Punkt A sei der Übergang vom linken kleinen Halbkreis (der nach oben geöffnet ist) zum rechten kleinen Halbkreis (der nach unten geöffnet ist). Der Punkt B sei der Tiefpunkt der Figur, also der Mittelpunkt des großen Halbkreisbogens. Die gestrichelte Schrittlinie ist der rechte Teil des Kreises mit Durchmesser AB. Die beiden Teile kommen durch eine Drehung um A zur Deckung. Als Tipp könnte man vorgeben „Die Schrittlinie ist gebogen“, oder noch weitergehend „Die Schrittlinie ist ein Halbkreis.“

**Fischblase – Kommentar:**

Das ist – auch für Erwachsene – ziemlich schwierig.

****Fußball-Turnier:**

Zu einem Fußball-Turnier sind sechs Mannschaften gemeldet. Jede Mannschaft spielt gegen jede.

a) Wie viele Spiele finden statt?

b) Kurz vor Turnierbeginn meldet sich noch eine siebte Mannschaft. Die Turnierleiterin überlegt, ob sie die siebte Mannschaft zulassen soll. Wie viele Spiele würden dazu kommen?

Fußball-Turnier – Lösungen:

a) Wir nennen die sechs Mannschaften A; B, C, D, E und F und schreiben die möglichen Begegnungen systematisch auf:

AB AC AD AE AF
 BC BD BE BF
 CD CE CF
 DE DF
 EF

Es sind 15 Spiele.

b) Mit der siebten Mannschaft G würden sechs Spiele dazu kommen: AG, BG, CG, DG, EG und FG.

Fußball-Turnier – Kommentar:

Strategie: alle Fälle der Reihe nach *systematisch, sorgfältig und konzentriert* „abarbeiten“.

Entre nous – allgemein: Wie viele Spiele sind es bei n Mannschaften?

Bzw. in der kombinatorischen Übersetzung:

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n Objekten 2 auszuwählen?

Bei n Mannschaften gibt es $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Spiele.

***Gewicht 1:**

Mert sagt: „Ich wiege 27 kg und die Hälfte meines Gewichts.“ Wie viel wiegt Mert?

Gewicht 1 – Lösung:

Der fehlende Teil ist wieder eine Hälfte, also sind 27 kg die Hälfte des Gewichts von Mert. Mert wiegt also $2 \cdot 27 \text{ kg} = 54 \text{ kg}$.

Gewicht 1 – Kommentar:

Eine kleine Skizze kann helfen.

***Gewicht 2:**

Daniel sagt: „Ich wiege 27 kg und ein Drittel meines Gewichts.“ Wie viel wiegt Daniel?

Gewicht 2 – Lösung:

Der fehlende Teil zu einem Drittel sind zwei Drittel, also sind 27 kg zwei Drittel des Gewichts von Daniel. Ein Drittel wären dann 13,5 kg. Daniel wiegt also $3 \cdot 13,5 \text{ kg} = 40,5 \text{ kg}$.

Gewicht 2 – Kommentar:

Eine kleine Skizze kann helfen.

***Grabung:**

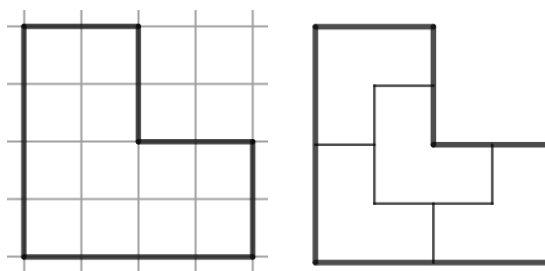
Wenn Ingmar 1 Tag braucht, um ein Loch auszugraben, das 1 Meter lang, 1 Meter breit und 1 Meter tief ist, wie viele Tage braucht er dann für ein Loch, das 3 Meter lang, 3 Meter breit und 3 Meter tief ist?

Grabung – Lösung:

Nicht 3 Tage, sondern 27 Tage.

****Grundstücke 1:**

Ein hakenförmiges Grundstück – vgl. linke Abbildung – soll in vier deckungsgleiche Teile (gleiche Größe und gleiche Form) aufgeteilt werden.

**Grundstücke 1 – Lösung:**

Rechte Abbildung – ohne unterlegtes Karogitter

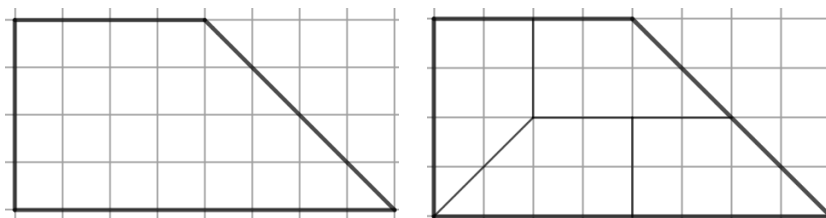
Grundstücke 1 – Kommentar:

Stellt man die Aufgabe ohne unterlegtes Karogitter (dafür mit den Angaben „nur rechte Winkel, die kürzeren Strecken sind alle gleich lang.“), fällt das Auffinden der Lösung erfahrungsgemäß deutlich schwerer.

Für beide Fälle gilt: Wenn man sich einmal von der Hoffnung verabschiedet hat, dass man mit der Rechteckform hinkommt, liegt die Lösung „nahe“.

****Grundstücke 2:**

Ein trapezförmiges Grundstück – vgl. linke Abbildung – soll in vier deckungsgleiche Trapeze aufgeteilt werden.

**Grundstücke 2 – Lösung:**

Rechte Abbildung

Grundstücke 2 – Kommentar:

Stellt man die Aufgabe ohne die Angabe der Art der vier deckungsgleichen Stücke („Trapeze“) wird es wesentlich schwieriger, dann ist es eine ***-Aufgabe. Man wird wohl zunächst mit Dreiecken experimentieren, was aber nicht zum Ziel führt.

****Haare:**

Gibt es in Stuttgart zwei Personen, die gleich viele Haare auf dem Kopf haben?

Haare – Lösung:

Stuttgart hat etwa 600.000 Einwohner. Menschen haben bis zu 150.000 Haare auf dem Kopf. Angenommen es gäbe nur 150.001 Stuttgarter, dann könne es theoretisch passieren, dass der 1. Stuttgarter 0 Haare, der 2. Stuttgarter 1 Haar, der 3. Stuttgarter 2 Haare usw. und der 150001. Stuttgarter 150.000 Haare auf dem Kopf hätte. Also hätten alle eine unterschiedliche Anzahl. Jetzt gibt es aber noch viel mehr Stuttgarter, also sicher auch zwei mit einer gleichen Kopfhaar-Anzahl – selbst wenn man ggf. noch einen Bart mit einrechnet 😊.

Haare – Kommentar:

Strategien hierbei sind: - Den *Worst-Case* betrachten.

- Das so genannte *Schubfachprinzip* anwenden, dies lautet z.B. so: Wenn $n+1$ Kugeln in n Schubfächern verteilt werden sollen, dann liegt in mindestens einem Schubfach mehr als eine Kugel.

Hundert:

Zu Verfügung stehen die Ziffern 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 und 9. Die Zahl 100 soll erreicht werden. Dabei gelten die folgenden Regeln:

- Die Reihenfolge der Ziffern darf nicht verändert werden.
- Man kann Ziffern zu einer mehrstelligen Zahl verbinden.
- Es darf addiert und subtrahiert werden.

Beispiel: $123 + 45 - 67 + 8 - 9 = 100$

Hundert – Lösungen:

$$123 + 4 - 5 + 67 - 89 = 100$$

$$123 - 4 - 5 - 6 - 7 + 8 - 9 = 100$$

$$123 - 45 - 67 + 89 = 100$$

$$12 + 3 - 4 + 5 + 67 + 8 + 9 = 100$$

$$12 + 3 + 4 + 5 - 6 - 7 + 89 = 100$$

$$12 - 3 - 4 + 5 - 6 + 7 + 89 = 100$$

$$1 + 2 + 3 - 4 + 5 + 6 + 78 + 9 = 100$$

$$1 + 2 + 34 - 5 + 67 - 8 + 9 = 100$$

$$1 + 23 - 4 + 56 + 7 + 8 + 9 = 100$$

Hundert – Kommentar:

Man kann ein Wettspiel (Wer findet am meisten Möglichkeiten?) oder eine Teamarbeit daraus machen (Finden wir gemeinsam alle 10 Möglichkeiten?).

****Kamele:**

Ein alter Araber bestimmt vor seinem Tode, dass der erste Sohn die Hälfte, der zweite Sohn den dritten und der dritte Sohn den neunten Teil seiner Kamele erhalten soll. Da er 17 Kamele hinterließ, konnten sich die Söhne nicht einigen. Ein Derwisch, der mit einem alten Kamel vorbeikam, half ihnen und sagte: „Ich will euch mein Kamel leihen.“ Nun nahm jeder der Söhne von den 18 Kamelen seinen Teil, der erste Sohn 9 Kamele, der zweite Sohn 6 Kamele und der dritte Sohn 2 Kamele.

Damit waren 17 der 18 Kamele verteilt und der Derwisch zog mit seinem übrig gebliebenen Kamel weiter.

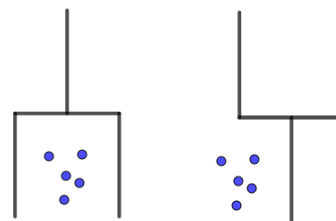
Hier stimmt doch etwas nicht! Aber was?

Kamele – Lösung:

Die drei Teile, die der alte Araber seinen Söhnen bestimmt hat, geben zusammen kein Ganzes. Es ist nämlich $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$. Damit bleibt beim Verteilen natürlich etwas übrig.

***Kehrschaufel:**

Vier Hölzer stellen eine Kehrschaufel dar. In der Schaufel liegt etwas Dreck – vgl. linke Abbildung. Lege zwei Hölzer so um, dass der Dreck außerhalb der Schaufel liegt.

**Kehrschaufel – Lösung:**

rechte Abbildung

***Knöpfe:**

In einer Familie sind sieben Söhne. Jeder Sohn hat sieben Hemden. Jedes Hemd hat sieben Knöpfe. Wie viele Knöpfe sind es insgesamt?

Knöpfe – Lösung:

Es sind $7 \cdot 7 \cdot 7$ Knöpfe = 343 Knöpfe.

Knöpfe – Kommentar:

Beachte die sogenannte Produktregel der Kombinatorik (nicht addieren!).

***Körper: (Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)**

- Ein geometrischer Körper hat acht Ecken und zwölf Kanten. Welcher könnte es sein?
- Ein geometrischer Körper hat fünf Ecken und acht Kanten. Welcher könnte es sein?
- Ein Rechteck rotiert schnell um eine seiner Seiten. Welcher Körper „entsteht“?

Körper – Lösung:

- Es könnte ein Quader sein.
- Es könnte eine quadratische Pyramide sein.
- Es „entsteht“ ein Zylinder.

Körper – Kommentar:

Zu a) und b) Das kann man mit Prismen variieren.

Zu c) Das kann man mit rechtwinkligen Dreiecken variieren.

*****Kryptogramm:**

Jeder Buchstabe steht für eine Ziffer von 0 bis 9, unterschiedliche Buchstaben bedeuten unterschiedliche Ziffern. Keine Zahl beginnt mit einer 0.

a)	ONE	b)	EIN	c)	ZWEI	d)	EINS	e)	EINS	f)	EINS
+	ONE	+	EIN	+	ZWEI	+	EINS	+	EINS	+	EINS
----		-----		-----		-----		-----		-----	
=	TOO	=	ZWEI	=	VIER	=	ZWEI	=	DREI	=	VIER

Kryptogramm – Lösungen und Kommentar:

Kryptogramme sind ganz schwierig, man wird auch mit Lösungsansätzen zufrieden sein und ggf. viel loben und Hilfen geben. Die Aufgabe ist auf natürliche Weise binnendifferenzierend: Man kann eine oder mehrere Lösungen finden.

Zu a) Diese erste Aufgabe sollte man mit den Schülerinnen und Schülern (SuS) gemeinsam machen, damit klar wird, wie man sich hier vorwärtsarbeitet. Hier eine Reihe von Überlegungen:

- Wir kümmern uns zuerst um O, das kommt oft vor.
- Für O kommen nur die Ziffern 1; 2; 3 und 4 in Frage. Ab O = 5 gäbe es einen Übertrag und das Ergebnis wäre vierstellig. O = 0 kommt auch nicht in Frage wegen der Regel *Keine Zahl beginnt mit einer 0*.
- O muss eine gerade Zahl sein wegen $E + E = O$. Es bleibt also nur O = 2 oder O = 4.
- Wir probieren es mit O = 2. Dann muss E = 1 oder E = 6 sein.
- E = 6 geht nicht, es würde einen Übertrag geben und das passt dann nicht mit $N + N + 1 = 2$ bzw. 12.
- Also weiter mit E = 1. Dann muss N = 6 sein, denn die 1 ist ja schon „verbraucht“ (Regel: *Unterschiedliche Buchstaben bedeuten unterschiedliche Ziffern*.)
- Dann muss T = 5 sein – fertig ☺.

Jetzt bearbeiten die SuS selbstständig auf die gleiche Weise den Fall O = 4 und erhalten die zweite Lösung. Hier die beiden Lösungen:

ONE	261	472
+ ONE	+ 261	+ 472
-----	-----	-----
= TOO	= 522	= 944

Zu b) Einige Überlegungen:

- Z kann nur durch einen Übertrag zustande kommen, also Z = 1.
- E muss „groß“ sein, wegen dieses Übertrags. Also E = 5 oder E = 6 oder E = 7 oder E = 8 oder E = 9.
- Wir beginnen einmal mit E = 5. W muss dann 0 oder 1 sein. Da Z = 1 ist, kommt nur W = 0 in Frage.
- Also gibt es keinen Übertrag hierher. Dann muss I = 2 sein mit 1 als Übertrag. Es bleibt nur schließlich nur N = 6.

Es gibt insgesamt fünf Lösungen, mindestens eine davon könnten die SuS gut selbst finden. Recht zügig geht es, wenn man mit verschiedenen Einsetzungen für N beginnt.

EIN	526	684	789	842	947
+ EIN	+ 526	+ 684	+ 789	+ 842	+ 947
-----	-----	-----	-----	-----	-----
= ZWEI	= 1052	= 1368	= 1578	= 1684	= 1894

Zu c) Eventuell einen Tipp geben:

Kümmere dich zuerst um E; „E + E = E“ ist interessant. Es kann nur E = 0 oder E = 9 sein.

Hier gibt es insgesamt 12 Lösungen, mindestens eine davon könnten die SuS gut selbst finden.

ZWEI	1397	1602	1704	1795	1897	2704
+ ZWEI	+ 1397	+ 1602	+ 1704	+ 1795	+ 1897	+ 2704
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
= VIER	= 2794	= 3204	= 3408	= 3590	= 3794	= 5408

ZWEI	2897	3102	3204	3295	3602	4295
+ ZWEI	+ 2897	+ 3102	+ 3204	+ 3295	+ 3602	+ 4295
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
= VIER	= 5794	= 6204	= 6408	= 6590	= 7204	= 8590

Zu d) Eventuell einen Tipp geben: E muss klein sein (E = 1 oder E = 2 oder E = 3 oder E = 4), denn es gibt keinen Übertrag bei der Tausenderziffer, sonst wäre das Ergebnis fünfstellig. Diese Möglichkeiten einfach ausprobieren und schauen, wie man „durchkommt“.

Hier gibt es insgesamt 11 Lösungen, eine davon können die SuS gut selbst finden.

EINS	1407	1457	1608	1809	1859	2814
+ EINS	+ 1407	+ 1457	+ 1608	+ 1809	+ 1859	+ 2814
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
= ZWEI	= 2814	= 2914	= 3216	= 3618	= 3718	= 5628

EINS	2864	3417	3618	3819	4271	
+ EINS	+ 2864	+ 3417	+ 3618	+ 3819	+ 4271	
-----	-----	-----	-----	-----	-----	
= ZWEI	= 5728	= 6834	= 7236	= 7638	= 8542	

Zu e) Einige Überlegungen (ggf. Tipps):

- Es muss gelten $E = 1$ oder $E = 2$ oder $E = 3$, sonst gäbe es einen Übertrag und das Ergebnis wäre fünfstellig.
- Wir beginnen einmal mit $E = 1$. Wenn es von der Einer- zur Zehnerziffer keinen Übertrag gibt, muss $N = 7$ sein und für S bleibt nur die 2 oder die 3.
- Nur der Fall $S = 2$ führt zu einem Ergebnis. Usw.

Es gibt insgesamt sieben Lösungen, mindestens eine davon können die SuS gut selbst finden.

EINS	1204	1672	1739	1806	2107	2341	2709
+ EINS	+ 1204	+ 1672	+ 1739	+ 1806	+ 2107	+ 2341	+ 2709
+ EINS	+ 1204	+ 1672	+ 1739	+ 1806	+ 2107	+ 2341	+ 2709
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----
= DREI	= 3612	= 5016	= 5217	= 5418	= 6321	= 7023	= 8127

zu f) Einige Überlegungen (ggf. Tipps):

- Es muss gelten $E = 1$ oder $E = 2$, sonst gäbe es einen Übertrag und das Ergebnis wäre fünfstellig.
- Es muss gelten $I = 0$ (kein Übertrag von den Zehnerziffern her) oder $I = 3$ (Übertrag 1 von den Zehnerziffern her) oder $I = 6$ (Übertrag 2 von den Zehnerziffern her) oder $I = 9$ (Übertrag 3 von den Zehnerziffern her).

Diese Kombinationen muss man durchprobieren. Es gibt nur eine Lösung, und zwar für die Kombination $E = 1$ und $I = 3$.

Das ist jetzt doch ganz schön schwierig.

Man könnte auch einfach die Überlegung bezüglich $E = 1$ oder $E = 2$ (s.o.) sowie $S = 9$ vorgeben.

EINS	1329
+ EINS	+ 1329
+ EINS	+ 1329
+ EINS	+ 1329
-----	-----
= VIER	= 5316

**Magische Quadrate 1:

Bei einem magischen 3x3-Quadrat sind die Ziffern 1; 2; 3; ...; 9 so in die neun Felder einzutragen, dass die Summe der drei Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch entlang der beiden Diagonalen immer dieselbe ist, wir nennen sie die *magische Summe*.

a) Wie muss diese magische Summe lauten?

b) linke Abbildung: Ergänze zu einem magischen 3x3-Quadrat.

	9		4	9	2
			3	5	7
	1		8	1	6

Magische Quadrate 1 – Lösung:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$, diese Summe ist gleichmäßig auf drei Zeilen zu verteilen.

Die magische Summe ist also $45 : 3 = 15$.

b) Wegen der magischen Summe 15 muss die 5 in der Mitte stehen. In der unteren Zeile müssen zwei Zahlen mit der Summe 14 stehen, 7 kann nicht doppelt vorkommen, es bleiben also nur 6 und 8 übrig. Beide Möglichkeiten führen in der Tat zu einem magischen 3x3-Quadrat (Probe!), eines davon zeigt die rechte Abbildung.

Magische Quadrate 1 – Kommentar:

Das sogenannte Lo-Shu-Quadrat (rechte Abbildung) ist das älteste bekannte magische Quadrat (2800 v. Chr., China).

Man kann zeigen, dass bei jedem magischen 3x3-Quadrat die 5 in der Mitte stehen muss. Dass die 1 (und damit natürlich auch die 9) nicht in einer Ecke stehen kann, ergibt sich direkt durch Ausprobieren. Alle weiteren magischen 3x3-Quadrate ergeben sich damit aus dem gezeigten durch Spiegelung oder Drehung. Wenn man möchte, kann man hieraus eine c)-Aufgabe formulieren.

In der Abbildung unten sind alle acht magischen 3x3-Quadrate abgebildet.

4	9	2	2	9	4	8	1	6	6	1	8	8	3	4	6	7	2	2	7	6	4	3	8
3	5	7	7	5	3	3	5	7	7	5	3	1	5	9	1	5	9	9	5	1	9	5	1
8	1	6	6	1	8	4	9	2	2	9	4	6	7	2	8	3	4	4	3	8	2	7	6

****Magische Quadrate 2:**

Bei einem magischen 4x4-Quadrat sind die Ziffern 1; 2; 3; ...; 16 so in die 16 Felder einzutragen, dass die Summe der vier Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch entlang der beiden Diagonalen immer dieselbe ist, wir nennen sie die *magische Summe*.

a) Wie muss die magische Summe lauten?

b) Fülle die restlichen zehn Felder zu einem magischen 4x4-Quadrat aus – vgl. linke Abbildung.

16				16	3	2	13
	10	11		5	10	11	8
	6			9	6	7	12
4			1	4	15	14	1

Magische Quadrate 2 – Lösung:

a) $1 + 2 + 3 + \dots + 16 = 136$, diese Summe ist gleichmäßig auf vier Zeilen zu verteilen.

Die magische Summe ist also $136 : 4 = 34$.

b) Wegen der magischen Summe 34 muss im noch freien mittleren Feld 7 stehen. In der unteren Zeile müssen zwei Zahlen mit der Summe 29 stehen, es bleiben nur 14 und 15 übrig, beide möglichen Positionierungen führen zu einem magischen 4x4-Quadrat (Probe!), eines davon zeigt die rechte Abbildung oben.

Magische Quadrate 2 – Kommentar:

Das gezeigte magische 4x4-Quadrat findet sich in Melencolia 1, einem berühmten Kupferstich von ALBRECHT DÜRER (1514).

***Magische Quadrate 3:**

Bei einem magischen 5x5-Quadrat sind die Ziffern 1; 2; 3; ...; 25 so in die 25 Felder einzutragen, dass die Summe der fünf Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch entlang der beiden Diagonalen immer dieselbe ist, wir nennen sie die *magische Summe*.

- a) Wie muss die magische Summe lauten?
 b) Fülle die restlichen elf Felder zu einem magischen 5x5-Quadrat aus – vgl. linke Abbildung.

Magische Quadrate 3 – Lösung:

- a) $1 + 2 + 3 + \dots + 25 = 325$, diese Summe ist gleichmäßig auf fünf Zeilen zu verteilen.
 Die magische Summe ist also $325 : 5 = 65$.

11	24	7	20	
4			8	16
		13	21	9
	18	1	14	
		19		

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

- b) Mithilfe der magischen Summe wird man sich sukzessive zur Lösung (Probe!) vorwärtsarbeiten, man muss keine Verzweigungen ausprobieren – rechte Abbildung.

****MiniMax:**

- a) Bilde aus den Ziffern 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 und 9 zwei fünfstellige Zahlen, deren Differenz möglichst klein ist.
 b) Bilde aus den Ziffern 1; 2; 4 und 8 zwei zweistelligen Zahlen, deren Quotient möglichst groß ist.
 c) Bilde aus den Ziffern 1; 2; 3 und 4 zwei zweistelligen Zahlen, deren Produkt möglichst groß ist.
 d) Suche unter den Quadratzahlen bis 289 diejenigen, die Summe von zwei Quadratzahlen sind.

****MiniMax – Lösungen:**

- a) $50123 - 49876 = 247$... Dass die Zehntausenderziffern Nachbarzahlen sein sollten, ist wohl bald klar. Dass es aber optimalerweise die 4 und die 5 sein sollten, erkennt man eventuell erst nach einigem Ausprobieren.
 b) $84 : 12 = 7$... Der Dividend muss möglichst groß sein, der Divisor möglichst klein.
 c) $41 \cdot 32 = 1312$... Dass die beiden großen Ziffern als Zehnerziffer verwendet werden sollten, ist wohl bald klar. Dass aber $41 \cdot 32 (=1312)$ größer ist als $42 \cdot 31 (=1302)$, ist doch eine erstaunliche Erkenntnis.
 d) $25 = 16 + 9$ $100 = 64 + 36$ $169 = 144 + 25$ $225 = 144 + 81$ $289 = 225 + 64$ $400 = 256 + 144$

****MiniMax – Kommentar:**

zu c) Entre nous – allgemein gilt: Ein Produkt bleibt i.a. nicht gleich, wenn man den einen Faktor um 1 erhöht und den anderen um 1 verringert. Genauer:

$(a + 1) \cdot (b - 1) = a \cdot b + b - a - 1$ ist kleiner als $a \cdot b$, wenn $b - a - 1 < 0$ bzw. $a > b - 1$ ist.

Noch allgemeiner für $x > 0$:

$(a + x) \cdot (b - x) = a \cdot b + b \cdot x - a \cdot x - x^2$ ist kleiner als $a \cdot b$, wenn $b \cdot x - a \cdot x - x^2 < 0$ bzw. $a > b - x$ ist.

Zu d) Mit System vorgehen – z.B.: Zunächst diese 20 Quadratzahlen aufschreiben

1; 4; 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81; 100; 121; 144; 169; 196; 225; 256; 289; 324; 361; 400

und dann daraufhin prüfen, ob sie als Summe von zwei Zahlen weiter links dargestellt werden können.

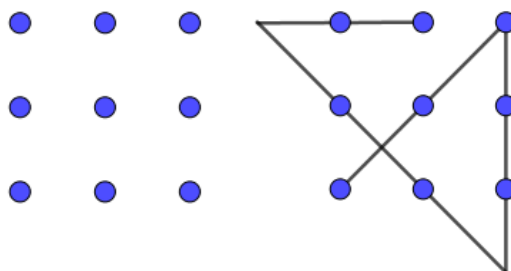
Z.B.: $121 = 100 + 21$ (☹) $121 = 81 + 40$ (☹) $121 = 64 + 57$ (☹) ... ab hier keine weiteren Möglichkeiten

Interessant ist die geometrische Anwendung (Kehrsatz des Pythagoras):

Gilt $a^2 + b^2 = c^2$, dann ist das aus den Stäben der Länge a, b und c gebildete Dreieck rechtwinklig.

****Neun Punkte:**

Neun Punkte – vgl. linke Abbildung – sollen mit einem zusammenhängenden, aus vier Teilen bestehenden Streckenzug verbunden werden. Kein Punkt darf zweimal von dem Streckenzug erfasst werden.

**Neun Punkte – Lösung:**

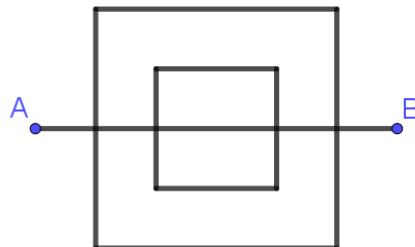
rechte Abbildung

Neun Punkte – Kommentar:

Man muss (!) über die Zeichnung (metaphorisch: über den Tellerrand!) hinausgehen.

***Postbote:**

Ein Postbote möchte seinen Bezirk (vgl. Abbildung) von A nach B in einem Zug durchlaufen und keine Strecke zweimal begehen.

***Postbote – Lösung:**

Hier wird jeweils beschrieben, wie der Postbote sich z. B. der Reihe nach an Kreuzungen entscheidet, es gibt mehrere Lösungen:

links / rechts / rechts / links / rechts / links / links / rechts

***Plus-Zeichen:**

Setze zwischen die Ziffern der Zahl 987654321 Plus-Zeichen so, dass als Summe 99 entsteht.

Plus-Zeichen - Lösungen:

1. Lösung: $9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99$
2. Lösung: $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 99$

Plus-Zeichen - Kommentar:

Der Anfang muss $9 + 8 + 7$ lauten, sonst kommt man zwangsläufig über die 99 hinaus.

Es gibt beliebig viele Varianten zu dieser Aufgabe, z.B.: Setze zwischen die Ziffern der Zahl 88.888.888 Plus-Zeichen so, dass als Summe 1000 entsteht (Lösung: $888 + 88 + 8 + 8 + 8$).

Vielleicht können Sie bzw. dann auch Ihre Schülerinnen und Schüler auch selbst solche Aufgaben erfinden? Das ist nicht so schwer, wie es vielleicht scheint, denn Sie bestimmen die Regeln ☺ - welche Ziffern und wie viele, welche Zeichen, welches Ergebnis.

Weitere Beispiele:

- Setze zwischen die Ziffern der Zahl 5.555.555 Plus- oder Minus-Zeichen so, dass als Ergebnis 1000 entsteht (Lösung: $555 + 555 - 55 - 55$).
- Setze zwischen die Ziffern der Zahl 44.444.444 Plus- oder Mal-Zeichen so, dass als Ergebnis 100 entsteht (Lösung: $4 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4$).
- Mit den Zeichen $+$ $-$ $*$ $:$: $222 = 6$ $333 = 6$ $555 = 6$ $666 = 6$ $777 = 6$
(Lösungen: $2 + 2 + 2 = 6$; $3 \cdot 3 - 3 = 6$; $5 + 5 : 5 = 6$; $6 + 6 - 6 = 6$; $7 - 7 : 7 = 6$)

****Primzahlen:**

Von dem Hobby-Mathematiker CHRISTIAN GOLDBACH (1690 – 1764) stammt folgende Vermutung:

Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.

Bis heute weiß man nicht, ob diese Vermutung zutrifft. Gesichert ist sie mit Computerhilfe jedenfalls für die Zahlen bis $4 \cdot 10^{18}$.

a) Schreibe alle geraden Zahlen zwischen 30 und 50 als Primzahlen.

b) Schreibe 44 auf alle möglichen Arten als Summe zweier Primzahlen.

Primzahlen – Lösungen:

- a) z.B. $30 = 11 + 19$ $32 = 3 + 29$ $34 = 11 + 23$ $36 = 17 + 19$ $38 = 7 + 31$
 $40 = 3 + 37$ $42 = 5 + 37$ $44 = 13 + 31$ $46 = 17 + 29$ $48 = 11 + 37$ $50 = 19 + 31$
- b) $3 + 41$; $7 + 37$; $13 + 31$

Primzahlen – Kommentar:

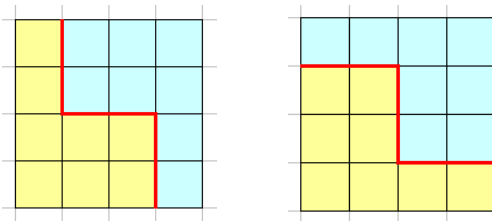
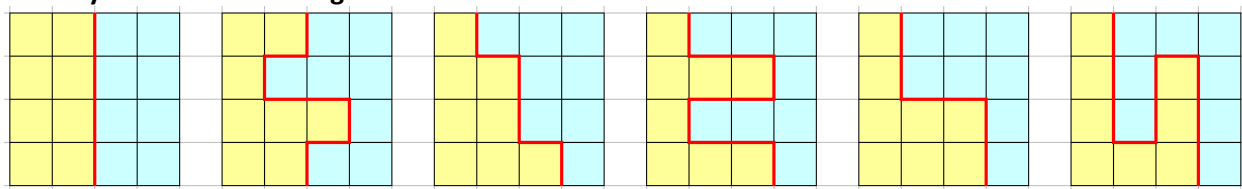
a) Die Schülerinnen und Schüler sollten aus der Klasse 5 den Primzahlbegriff und die Primzahlen bis 40 kennen. Man kann den Begriff wiederholen und die Liste zunächst aufschreiben lassen:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 39; 41; ...

b) Strategie: alle *Möglichkeiten mit System durchgehen*, das heißt hier: die Primzahlreihe einfach der Reihe nach durchgehen und prüfen, ob der ergänzende Summand wieder eine Primzahl ist.

****Punktsymmetrisch:**

Teile das Quadrat durch einen Streckenzug entlang der Gitterlinien in zwei Teile auf, die zum Mittelpunkt des Quadrates punktsymmetrisch sind. Färbe die beiden Teile unterschiedlich. Lösungen, die deckungsgleich sind (gleiche Form und Größe haben), sollen als gleich gelten – vgl. die beiden gezeigten Beispiele.

**Punktsymmetrisch – Lösungen:****Punktsymmetrisch – Kommentar:**

Dies ist eine selbstdifferenzierende Knobelaufgabe. Jede bzw. jeder kann auf eigenem Niveau ein Erfolgserlebnis erreichen – zum Zeichnen wird man sinnvollerweise das Arbeitsblatt mit vorgegebenen 4x4-Quadraten nutzen:

- eine Lösung finden
- mehrere Lösungen finden
- alles sechs Lösungen finden
- begründen, dass man alle gefunden hat.

Beim Probieren kann man erkennen, dass der teilende Streckenzug punktsymmetrisch zur Quadratmitte sein muss. Die Frage ist also: Wie kommt man also zur Quadratmitte, ohne den Rand oder den bisherigen Streckenzug zu berühren?

Ein darauf aufbauendes systematisches Vorgehen hängt jetzt nur noch vom Startpunkt ab. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten: eine Seitenmitte oder eine Mitte zwischen Seitenmitte und benachbartem Eckpunkt.

***Quadratzahlen:**

Der Vier-Quadratzahlen-Satz von LAGRANGE lautet:

Jede natürliche Zahl kann als Summe von vier Quadratzahlen geschrieben werden.

Dieser Satz ist eine Steilvorlage für Übungsaufgaben zu den Quadratzahlen und zum Kopfrechnen. Schreibe 123; 456 und 666 als Summe von vier Quadratzahlen (die Auswahl an Ausgangszahlen ist grenzenlos ☺).

Quadratzahlen – Lösung:

$$8^2 + 7^2 + 3^2 + 1^2 = 64 + 49 + 9 + 1 = 123$$

$$20^2 + 6^2 + 4^2 + 2^2 = 400 + 36 + 16 + 4 = 456$$

$$20^2 + 16^2 + 3^2 + 1^2 = 400 + 256 + 9 + 1 = 666$$

Quadratzahlen – Kommentar:

Im Bildungsplan 2016 für die Klassen 5/6 steht: Die Schülerinnen und Schüler können die Quadratzahlen von 1^2 bis 20^2 wiedergeben und erkennen (!).

****Richtig oder falsch? (Begründung oder Gegenbeispiel)**

- a) Immer wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich lang sind, dann hat es einen rechten Winkel.
- b) Immer wenn ein Viereck vier rechte Winkel hat, dann ist es ein Quadrat.
- c) Bei jedem Rechteck halbieren die Diagonalen die Eckwinkel.
- d) Es gibt kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln.
- e) Für zwei natürliche Zahlen a und b ist a^b immer dasselbe wie b^a .

Richtig oder falsch? – Lösungen:

- a) offensichtlich falsch – geeignete Zeichnung
- b) falsch; es könnte auch ein Rechteck mit unterschiedlichen Seitenlängen sein
- c) falsch; man denke sich ein sehr langes und wenig breites Rechteck
- d) richtig; die beiden freien Schenkel wäre dann ja parallel, sie würden sich nicht in einem Dreieckspunkt schneiden
- e) falsch; Gegenbeispiel $3^2 = 9$ ist nicht $2^3 = 8$.

Richtig oder falsch? – Kommentar:

Das ist ein beliebtes Format zur Durchdringung von Sachverhalten.

***Rollende Körper:**

Ein Körper liegt auf einer Ebene und wird angestoßen.

- a) Er rollt geradeaus.
- b) Er rollt im Kreis.

Um welchen Körper könnte es sich handeln?

Rollende Körper – Lösungen:

- a) Ein Zylinder, eine Kugel
- b) Ein Kegel, ein Kegelsumpf

***Römische Zahlzeichen 1:**

Die römischen Zahlzeichen sind: I = 1 V = 5 X = 10 L = 50 C = 100 D = 500 M = 1000

(Eine mögliche Merkregel: Ich **V**erkaufe **X** Leuten **C**omics **D**rei **M**al)

Weitere Zahlen entstehen dadurch, dass man mehrere dieser Zeichen aneinanderfügt.

Dabei sollen (hier) die folgenden Regeln gelten:

- Die verwendeten Zeichen werden der Größe nach aufgeschrieben (beginnend mit dem größten) und die zugehörigen Werte addiert.
- Die Zeichen C, X und I stehen höchstens dreimal nebeneinander.
- Die Zeichen D, L und V stehen nicht mehrmals nebeneinander.
- Kommt im Zehnersystem die Ziffer 4 oder die Ziffer 9 vor, verwendet man jeweils eines der sechs Subtraktions-Paare, sonst nicht: $\overline{\text{IV}} = 4$; $\overline{\text{IX}} = 9$; $\overline{\text{XL}} = 40$; $\overline{\text{XC}} = 90$; $\overline{\text{CD}} = 400$; $\overline{\text{CM}} = 900$.

Man erkennt sie daran, dass hier ein Zahlzeichen links von einem größeren steht, hierbei wird das kleinere vom größeren abgezogen (es kann nur das jeweils nächstkleinere der Zeichen I, X oder C subtrahiert werden).

- Es gibt kein Zeichen für die Null – das braucht man hier auch nicht.

Beispiele:

$$8 = 5 + 1 + 1 + 1 = V I I I$$

$$32 = 10 + 10 + 10 + 1 + 1 = X X X I I$$

$$120 = 100 + 10 + 10 = C X X$$

$$346 = 100 + 100 + 100 + 40 + 5 + 1 = C C C \boxed{XL} V I$$

$$1789 = 1000 + 500 + 100 + 100 + 50 + 10 + 10 + 10 + 9 = M D C C L X X X \boxed{IX}$$

a) Schreibe mit römischen Zahlzeichen: 17 85 104 455 880 1001 1947 4949

b) Übersetze zurück ins Zehnersystem: XIII XXVI CCC CDIII DCIII MCMXCI

c) Welche Zahl ist möglicherweise gemeint? Verbessere. IC DVD LIDL

Römische Zahlzeichen 1 – Lösungen:

a) $17 = 10 + 5 + 1 + 1 = X V I I$

$$85 = 50 + 10 + 10 + 10 + 5 = L X X X V$$

$$104 = 100 + 4 = C \boxed{IV}$$

$$455 = 400 + 50 + 5 = \boxed{CD} L V$$

$$880 = 500 + 100 + 100 + 100 + 50 + 10 + 10 + 10 = D C C C L X X X$$

$$1001 = 1000 + 1 = M I$$

$$1947 = 1000 + 900 + 40 + 5 + 1 + 1 = M \boxed{CM} \boxed{XL} V I I$$

$$4949 = 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 900 + 40 + 9 = M M M M \boxed{CM} \boxed{XL} \boxed{IX}$$

b) $X I I I = 10 + 1 + 1 + 1 = 13$

$$X X V I = 10 + 10 + 5 + 1 = 26$$

$$C C C = 100 + 100 + 100 = 300$$

$$\boxed{CD} I I I = 400 + 1 + 1 + 1 = 403$$

$$D C I I I = 500 + 100 + 1 + 1 + 1 = 603$$

$$M \boxed{CM} \boxed{XC} I = 1000 + 900 + 90 + 1 = 1991$$

c) $I C = 100 - 1 = 99$; $I C$ ist kein mögliches Subtraktions-Paar;

Verbesserung: $\boxed{99} = 90 + 9 = \boxed{XC} \boxed{IX}$

$D V D = 500 + 500 - 5 = 995$; VD ist kein mögliches Subtraktions-Paar;

Verbesserung: $\boxed{995} = 900 + 90 + 5 = \boxed{CM} \boxed{XC} V$

$L I D L = 50 + (500 - 1) + 50 = 599$; ID ist kein mögliches Subtraktions-Paar, die Zeichen sind nicht der Größe nach aufgeschrieben; Verbesserung: $\boxed{599} = 500 + 90 + 9 = D \boxed{XC} \boxed{IX}$

Römische Zahlzeichen 1 – Kommentar:

Die Schülerinnen und Schüler (SuS) kennen die römischen Zahlzeichen wahrscheinlich schon aus der Klasse 5. Je nachdem wird man zügiger oder weniger zügig vorgehen, evtl. sogar mit c) beginnen.

Die Formulierung des Regelwerkes mithilfe der Subtraktions-Paare (das kommt so in den Schulbüchern nicht vor) zielt auf die Eindeutigkeit der Darstellung.

SuS können sich gegenseitig Aufgaben stellen.

Römische Zahlzeichen 2:

Rechnungen mit römischen Zahlzeichen kann man z.B. mit Streichhölzern „legen“ – jeder Strich in +, = oder V mit einem Holz.

Welches Holz muss man umlegen, damit die Rechnung stimmt?

a)

$$XI - II = XII$$

b)

$$X + IV = V$$

c)

$$X + V - II = VII$$

d)

$$VI + VIII = XII$$

e)

$$XII - II = XV + VI$$

f)

$$X - II = XV + VI$$

Römische Zahlzeichen 2 – Lösungen:

a)

$$X + II = XII$$

b)

$$X - IV = VI$$

c)

$$X - V + II = VII$$

d) (mehrere Möglichkeiten)

$$IV + VIII = XII$$

e) (mehrere Möglichkeiten)

$$XII - III = XV - VI$$

f)

$$VI + IV = X$$

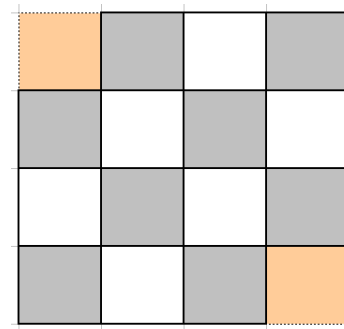
*****Schachbrett:**

Aus einem kleinen 4x4-Schachbrett mit 16 Feldern sind das linke obere und das rechte untere Eck-Feld herausgesägt (vgl. Abbildung). Wie kann man dieses mit rechteckigen Dominosteinen (diese decken immer zwei Felder ab) lückenlos und ohne Überhang abdecken?

Schachbrett – Lösung:

Das geht nicht. Ein Dominostein deckt immer gleichzeitig ein weißes und ein graues Feld ab.

Es gibt bei unserem ausgesägten Schachbrett aber acht graue und nur sechs weiße Felder.

**Schachbrett – Kommentar:**

Strategie: Grundsätzliche Sachverhalte beim *Ausprobieren* erkennen.

***Schätzfragen:**

Wie viel wiegt das?

- a) ein DIN-A4-Blatt normales Papier (= 80 g/m²)
- b) das Schulbuch Lambacher Schweizer 6 (Klett 2016)
- c) ein Päckchen Papiertaschentücher (10 Stück, normale Größe)
- d) eine 2 € Münze

Schätzfragen – Lösungen:

- a) 5 g
- b) 616 g
- c) 26 g
- d) 8,5 g

Schätzfragen – Kommentar:

Eignen sich als Wettspiel zum Stundenabschluss: Wer am besten geschätzt hat, bekommt einen (kleinen) Preis. Weitere Anregungen: Welchen Flächeninhalt hat die Tafel? Wie hoch ist das Klassenzimmer? usw. (Ein Zollstock gehört sowieso zur Grundausrüstung jeder Mathematiklehrkraft ☺.)

****Spaghetti:**

Mariam kocht Spaghetti, Kochzeit fünf Minuten. Mariam stehen zwei Sanduhren zur Verfügung. Die erste braucht genau vier Minuten, um ganz durchzulaufen, die zweite genau drei Minuten. Wie kann Mariam mit Hilfe dieser beiden Sanduhren die Kochzeit abmessen?

Spaghetti – Lösungen:

Mariam setzt die Spaghetti auf und lässt beide Sanduhren gleichzeitig laufen. Wenn die 3-Minuten-Sanduhr durchgelaufen ist, dreht sie sie um. Nach vier Minuten, wenn die 4-Minuten-Sanduhr fertig ist, dreht sie die 3-Minuten-Sanduhr nochmal um und erfasst so noch die letzte Minute. Insgesamt hat sie die Spaghetti dann 5 Minuten gekocht.

***Spiegelung:** (Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)

- a) Spiegle ein Dreieck an seiner längsten Seite. Welche Gesamtfigur ergibt sich?
- b) Spiegle ein rechtwinkliges Dreieck an seiner kürzesten Seite. Welche Gesamtfigur ergibt sich?

Spiegelung – Lösungen:

- a) Ein Drachenviereck
- b) Ein gleichschenkliges Dreieck

***Stimmt's?**

- a) Eine Million hat neun Nullen.
- b) 1 Meter sind 100 Millimeter.
- c) 1 Ar sind 100 Quadratmeter.
- d) 1 Liter sind 100 Kubikzentimeter.
- e) Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist $a \cdot b$.
- f) Der Umfang eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist $a + b$.
- g) Null Komma neun plus null Komma zehn ist null Komma neunzehn.
- h) Eine Tonne ist 1000 Gramm.
- i) 1 plus 2 mal 3 plus 4 ist 5.

Stimmt's? – Lösungen:

- a) falsch, 6 Nullen
- b) falsch, 1000 Millimeter
- c) richtig
- d) falsch, es sind 1000 Kubikzentimeter
- e) richtig
- f) falsch, der Umfang berechnet sich zu $2 \cdot (a + b)$
- g) eher falsch; wenn man null Komma zehn versteht als 0,10, ist das eben eine ungute Sprechweise.
- h) falsch, es sind 1000 Kilogramm
- i) falsch, es ergibt sich 11 (Punkt vor Strich beachten!)

Stimmt's? – Kommentar:

Das ist ein beliebtes Format zur Reaktivierung von Wissen.

***Streichhölzer 1:**

Nimm vier Streichhölzer weg, so dass zwei Quadrate übrig bleiben.

(Lösung: rechte Abbildung)

***Streichhölzer 2:**

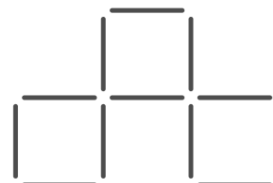
Lege drei Streichhölzer um, so dass nur noch drei Quadrate zu sehen sind.

(Lösung: rechte Abbildung)

***Streichhölzer 3:**

Nimm fünf Streichhölzer weg, so dass drei Quadrate übrig bleiben.

(Lösung: rechte Abbildung)

****Streichhölzer 4:**

Lege zwei Streichhölzer um, so dass nur noch vier Quadrate zu sehen sind.

(Lösung: rechte Abbildung)

**Streichhölzer 1-4 Kommentar:**

Vergleicht man die Anzahl der vorhandenen Hölzer mit der Anzahl der zu bildenden Quadrate, so erkennt man in allen vier Fällen, dass für jedes Quadrat vier Hölzer „verbraucht“ werden müssen. Das bedeutet, dass die Quadrate keine gemeinsamen Seiten haben dürfen.

****Summe:**

Jonathan berechnet der Reihe nach die folgenden Summen

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} =$$

a) Rechne die Summen aus.

b) Wann hat Jonathan die Zahl 1 erreicht?

Summe – Lösung:

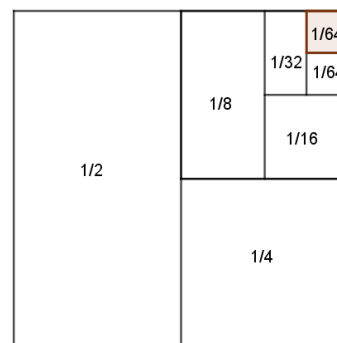
a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$



b) Er erreicht die Zahl 1 nie. Es fehlt zur 1 jeweils immer noch einmal der letzte Summand der jeweiligen Summe.

Man kann diese Situation wie in der Abbildung gezeigt veranschaulichen.

Summe – Kommentar:

Voraussetzung ist hierbei, dass die Schülerinnen und Schüler Brüche addieren können.

Das ist schon bemerkenswert – es kommt immer noch etwas dazu, und doch wird die Zahl 1 nicht erreicht oder gar überschritten.

***Teilbar 1:**

- Schreibe alle vierstelligen Zahlen aus den Ziffern 1; 2; 3 und 4 auf, die durch 4 teilbar sind.
- Schreibe alle vierstelligen Zahlen aus den Ziffern 1; 2; 3 und 4 auf, die durch 9 teilbar sind.
- Wie viele vierstelligen Zahlen mit den Ziffern 1; 2; 3 und 4 gibt es?

Teilbar 1 – Lösungen:

a) 3412; 4312; 4132; 1432; 1324; 3124

b) Es gibt keine solchen Zahlen wegen der Quersummenregel für die 9. Es ist $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, die Zahl 10 ist nicht durch 9 teilbar.

c) Es sind 24 Stück.

Lösungsweg: Alle aufschreiben – aber mit System, damit man sicher sein kann, dass man alle hat.

Zum Beispiel der Größe nach:

Zuerst alle die mit 1 beginnen: 1234 1243 1324 1342 1423 1432

Dann die mit 2 beginnen: 2134 2143 2314 2341 2413 2431 usw.

Teilbar 1 – Kommentar:

Zu c) An die Entwicklung der allgemeinen Erkenntnis *n Elemente kann man auf n! Arten anordnen* ist hier nicht unbedingt gedacht.

***Teilbar 2:**

Setze für ♣ und ♥ Ziffern ein, sodass die Zahl 123♣5678♥

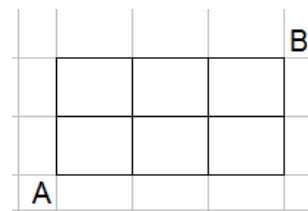
- durch 5 und 9 teilbar ist
- durch 4 und 9 teilbar ist
- durch 2; 3; 4; 5 und 6 teilbar ist

Teilbar – Lösungen:

- a) 123856785
 b) 123956784
 c) 123456780

****Viele Wege:**

Wie viele Wege führen von A (links unten) nach B (rechts oben), wenn man nur auf den Gitterlinien gehen darf und keine Umwege machen möchte?

****Viele Wege – Lösung:**

Ein Weg lässt sich beschreiben durch eine Folge aus fünf Buchstaben, entweder „r“ (für „rechts“) oder „h“ (für „hoch“), wobei genau dreimal „r“ und genau zweimal „h“ vorkommen soll.

rrrrh; rrrhr; rrrhr;
 rrrhr; rrrhr; rrrhr;
 hrrrh; hrrrh; hrrrh;
 hrrrh; hrrrh; hrrrh;

Es sind 10 Wege.

Viele Wege – Kommentar:

Strategie: alle Fälle der Reihe nach *systematisch, sorgfältig und konzentriert* „abarbeiten“.

Der kreative Akt bei den Schülerinnen und Schülern besteht hier aus dem Erfinden einer Systematik, z.B. in der oben gezeigten Art.

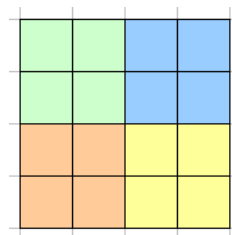
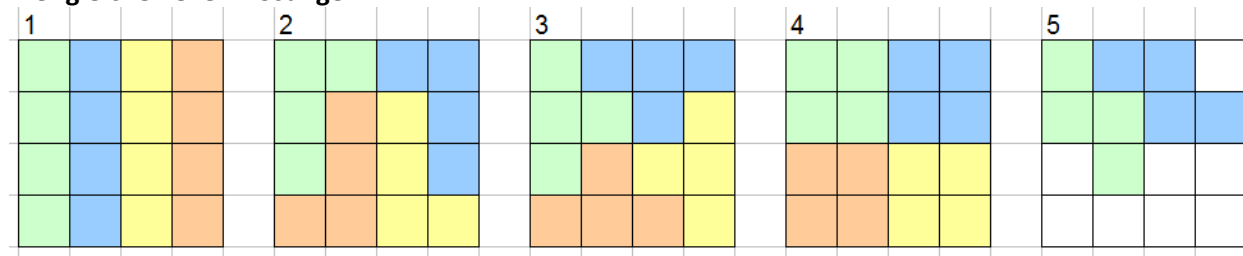
Entre nous – allgemein gilt:

Ist R die Anzahl der möglichen „Rechts-Schritte“ und H die Anzahl der möglichen „Hoch-Schritte“, so ist die Anzahl der möglichen Wege gleich dem Binomialkoeffizienten $\binom{R+H}{R}$.

Begründung: In einem (R+H)-Tupel sind von den R+H Stellen R Stellen auszuwählen, die mit „r“ belegt werden, die übrigen werden dann mit „h“ belegt.

***Vier gleiche Teile:**

Teile das 4x4-Quadrat entlang der Gitterlinien in vier deckungsgleiche Teile (gleiche Form und Größe). Färbe die vier gleichen Teile unterschiedlich.
 Ein Beispiel zeigt die Abbildung.

**Vier gleiche Teile – Lösungen:**

Vier gleiche Teile – Kommentar:

Dies ist eine selbstdifferenzierende Knobelaufgabe. Alle können entsprechend dem eigenen Niveau ein Erfolgserlebnis erreichen. Zum Zeichnen wird man sinnvollerweise das Blatt mit vorgegebenen 4x4-Quadraten nutzen:

- eine Lösung finden - mehrere Lösungen finden - alle vier Lösungen finden
- begründen, dass man alle gefunden hat.

Jedes der vier Teile besteht aus vier kleinen Quadraten. Die Anzahl dieser „Vierlinge“ ist sehr begrenzt. Legt man drei Quadrate in eine Reihe und fügt ein viertes hinzu, so hat man drei Möglichkeiten: „I“, „L“ oder „T“ (vgl. in den Abbildungen oben 1; 2 und 3 – die Bezeichnungen mit Buchstaben sind der jeweiligen Form des Vierlings nachempfunden).

Will man eine 3er-Reihe vermeiden, so gibt es nur die Möglichkeiten „O“ (4) oder „N“ (5) – dieser Ansatz führt nicht zu einer Lösung.

***Viereck 1:**

Alle vier Seiten eines Vierecks sind gleich lang, es ist aber kein Quadrat. Kann das sein?

Viereck 1 - Lösung:

Ja, es ist eine Raute.

***Viereck 2:**

Die gegenüber liegenden Seiten eines Vierecks sind parallel, es ist aber kein Rechteck. Kann das sein?

Viereck 2 - Lösung:

Ja, es ist ein Parallelogramm.

***Vier Töchter:**

Eine Mutter hat 4 Töchter. Jede Tochter hat einen Bruder. Wie viele Kinder hat die Mutter insgesamt?

Vier Töchter - Lösung:

Die Mutter hat fünf Kinder, nämlich vier Töchter und einen(!) Sohn.

****Waageproblem 1:**

Auf einem Tisch liegen 10 Stapel zu jeweils 10 Schokoladentafeln. Alle Tafeln wiegen 100g mit Ausnahme der Tafeln eines einzigen Stapels, die jeweils 110g wiegen.

Wie kann man durch eine einzige Wägung mit einer Anzeigen-Waage den Stapel mit den besonderen Tafeln sicher herausfinden?

Waageproblem 1 – Lösung:

Man nimmt vom 1. Stapel 1 Tafel, vom 2. Stapel 2 Tafeln usw. und legt alle 55 Tafeln zusammen auf die Waage. Würden alle Tafeln 100 g wiegen, wäre die Anzeige 5500 g.

Wenn die Anzeige 5510 g lautet, dann sind die 110 g- Tafeln im 1. Stapel, denn auf der Waage liegt eine davon.

Wenn die Anzeige 5520 g lautet, dann sind die 110 g-Tafeln im 2. Stapel, denn auf der Waage liegen zwei davon usw.

****Waageproblem 2:**

Von neun äußerlich gleichen Kugeln K1, K2 ... K9 ist genau eine schwerer als die acht andern. Diese soll sicher durch zwei Wägungen mit einer Balkenwaage gefunden werden.

Waageproblem 2 – Lösung:

Lege K1, K2 und K3 auf die linke Seite der Balkenwaage, lege K4, K5 und K6 auf die rechte Seite. Jetzt gibt es drei Möglichkeiten:

- Links schwerer: die gesuchte Kugel ist K1, K2 oder K3 → zweite Wägung: links K1, rechts K2 → bei Gleichgewicht ist K3 die gesuchte Kugel
- Rechts schwerer: die gesuchte Kugel ist K4, K5 oder K6 → zweite Wägung: links K4, rechts K5 → bei Gleichgewicht ist K6 die gesuchte Kugel
- Gleichgewicht: die gesuchte Kugel ist K7, K8 oder K9 → zweite Wägung: links K7, rechts K8 → bei Gleichgewicht ist K9 die gesuchte Kugel

Waageproblem 2 – Kommentar:

Man muss sich von der Idee verabschieden, die gesuchte Kugel eventuell schon nach der ersten Wägung benennen zu können. Hier geht es strategisch gesehen um ein schrittweises Eingrenzen der Lösung. Ideal wäre, wenn man das mit einer Balkenwaage real durchspielen könnte.

****Wie viele Dreiecke?**

Ein Rätselklassiker lautet:

Wie viele Dreiecke stecken in dieser Figur?

Im Internet wird die Schwierigkeit dieser Aufgabe beschworen:

„Nur Personen mit einem IQ über 120 finden mehr als 20 Dreiecke.“ Usw.

Wie viele Dreiecke? – Lösungen:

Wir notieren jeweils die drei Eckpunkte und sortieren – wegen des leichteren Abgleichens – immer alphabetisch.

ABC ABD ABE ACD ACE ADE (Dreieck ABE)

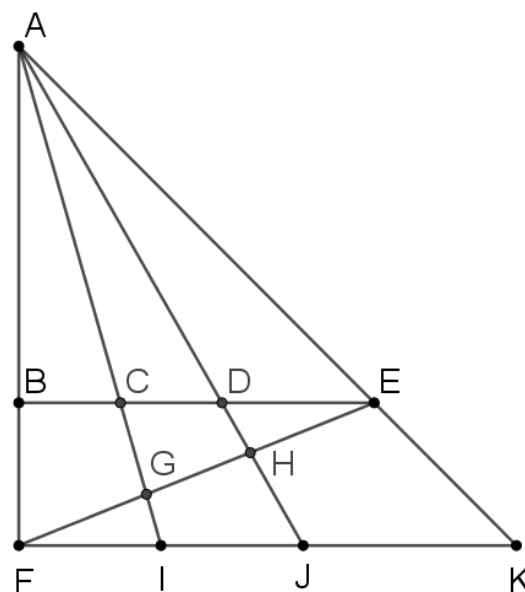
AFG AFH AFE AGH AGE AHE (Dreieck AFE)

AFI AFJ AFK AIJ AIK AJK (Dreieck AFK)

BEF CEG DEH (Dreieck EFB)

EFK FGI FHJ (Dreieck FKE)

Es sind 24 Dreiecke.

**Wie viele Dreiecke? – Kommentar:**

Man kann ein Wettspiel (Wer findet am meisten Dreiecke?) oder eine Teamarbeit daraus machen (Finden wir gemeinsam alle Dreiecke?). Für die Kommunikation über gefundene Dreiecke ist die vereinbarte Bezeichnung der Punkte (vgl. Abbildung) und die Notation (je drei Punkte – alphabetisch sortiert) unabdingbar.

***Würfel: (Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)**

27 gleiche Würfel werden zu einem großen Würfel zusammengesetzt. Der große Würfel wird außen rot angemalt.

- a) Wie viele der 27 kleinen Würfel sind zur Hälfte rot angemalt?
- b) Wie viele der Würfel haben zwei rote Quadrate?
- c) Gibt einen gänzlich unbemalten Würfel?

Würfel – Lösungen:

- a) 8 Würfel
 b) 12 Würfel
 c) Ja, einen, den in der Mitte.

Würfel – Kommentar:

Schülerinnen und Schüler können weitere solche Aufgaben erfinden, ggf. auch an einem 4x4x4-Würfel.

***Würfelnetze:**

Bei Spielwürfeln müssen gegenüberliegenden Augenzahlen zusammen immer 7 ergeben. Prüfe, ob die Würfelnetze korrekt beschriftet sind.

4	2	3		3	2			1	2			5	6			2			3	
	1				1	4			3				2			4	6	3	1	5
	5				5				5	6			1				5		4	6
a)	6			b)	6			c)	4			d)	4	3		e)	1		f)	2
1																				
2				5				2				3							1	
6	4			4	6	3		6	3			4	5					2	3	
	5				2				5	1			1						5	4
g)	3			h)	1			i)	4			j)	2	6				k)		6

***Würfelnetze – Lösungen:**

a); b); c); e); f); g); h) und i) sind korrekt beschriftet, d); j) und k) nicht.

**** Würfelturm:**

Susanne kennt einen Zaubertrick mit Spielwürfeln. Bei Spielwürfeln liegt die „1“ gegenüber der „6“, die „2“ gegenüber der „5“ und die „3“ gegenüber der „4“.

Sie sagt zu Peter: „Lege drei Spielwürfel aufeinander, und zwar so, dass die aufeinander liegenden Würfelflächen die gleichen Augenzahlen haben. Dann addierst du alle andern 14 Augenzahlen.“

Susanne schließt die Augen, Peter legt die drei Spielwürfel aufeinander und addiert. Als er fertig ist, sagt Susanne: „Simsalabim, die Summe heißt ...“ Wie heißt die Summe? Wie „funktioniert“ der Trick?

Würfelturm – Lösungen:

Die Summe heißt 49, denn $3 \cdot (1+2+3+4+5+6) - 14 = 3 \cdot 21 - 14 = 49$. Jeder der drei Würfel hat die Augensumme $1+2+3+4+5+6 = 21$. Der Trick ist, dass die vier nicht mitgezählten Flächen immer die Summe 14 haben, denn $(4+4)+(3+3) = (5+5)+(2+2) = (6+6)+(1+1) = 14$.

Würfelturm – Kommentar:

Man kann zum Einstieg den Zaubertrick mit den Schülerinnen und Schülern durchspielen.

Man kommt dem Trick beim Ausprobieren auf die Spur.

Strategie: Beginne einfach mit einem Beispiel.

Allgemein: Für eine ungerade Anzahl von Würfeln n ist die Augensumme $n \cdot 21 - (n - 1) \cdot 7 = 14 \cdot n + 7$.

Für eine gerade Anzahl von Würfeln n muss man – je nach Augenzahl der aufeinander liegenden Flächen – eine Fallunterscheidung treffen.

****Zeichnerisches Multiplizieren:**

Wie löst man die Multiplikationsaufgabe $32 \cdot 14$ durch eine Zeichnung ohne das „kleine Einmal-Eins“?

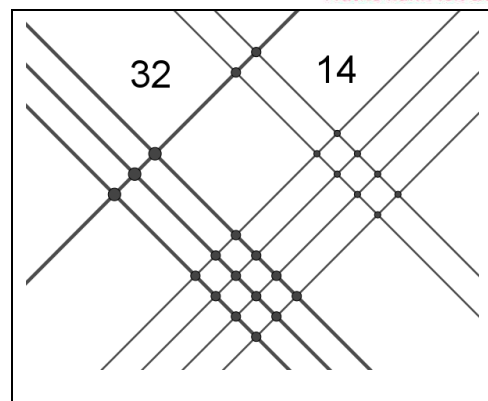
Wir betrachten die Abbildung rechts.

Man zeichnet die Zahl 32 so:

3 „dicke“ Parallelen und 2 „dünne“ Parallelen in einigem Abstand davon von links oben nach rechts unten.

Man zeichnet die Zahl 14 so:

1 „dicke“ Gerade und 4 „dünne“ Parallelen in einigem Abstand davon von rechts oben nach links unten.



Jetzt zählt man die Schnittpunkte:

8 Schnittpunkte bei „dünn-dünn“ → **8 Einer**

$12 + 2 = 14 = 10 + 4$ Schnittpunkte bei „dünn-dick“ bzw. „dick-dünn“ → **4 Zehner** und 1 Übertrag

3 Schnittpunkte bei „dick-dick“ + 1 Übertrag → **4 Hunderter**

Ergebnis: $32 \cdot 14 = 448$

a) Führe dieses Verfahren durch für $45 \cdot 23$.

b) Gelingt dies auch für $123 \cdot 45$?

c) Oder sogar für $234 \cdot 345$?

d) Vergleiche mit dem Verfahren der schriftlichen Multiplikation.

Zeichnerisches Multiplizieren – Lösung:

a) 1035 b) 5535 c) 80730

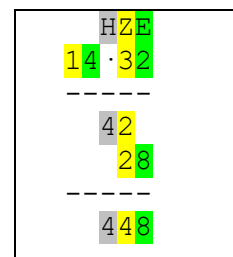
d) Es ist genau dasselbe wie bei der schriftlichen Staffeldrechnung

3 Zehner mal 4 Einer ergibt 12 Zehner, das sind 2 Zehner und 1 Hunderter,

3 Zehner mal 1 Zehner ergibt 3 Hunderter, zusammen sind es also **4 Hunderter**,

2 Einer mal 4 Einer ergibt **8 Einer** und 2 Einer mal 1 Zehner ergibt 2 Zehner, zusammen also **4 Zehner**.

Anstelle des Abzählens, wie viele Punkte die „Rechtecke“ enthalten, kann man natürlich das „Kleine Einmal-Eins“ verwenden.

**Zeichnerisches Multiplizieren – Kommentar:**

Man kann (mit weiteren Beispielen, bitte nicht mehr als dreistellige Faktoren) eine Doppelstunde mit diesem Thema füllen, wenn man möchte ☺. Anstelle von dünnen und dicken Strichen wird man – insbesondere bei dreistelligen Faktoren – mit Farben arbeiten. Hier muss man schauen, dass man den Überblick über die Bedeutung der einzelnen „Rechtecke“ (Einer? Zehner? Hunderter? usw.) nicht verliert.

Wenn der Überblick gesichert ist, dann ist es unerheblich, ob man auf kariertem Papier und mit dem Geodreieck arbeitet oder auch auf Konzeptpapier frei Hand.

****Zwei Liter:**

Ein Würfel mit der Kantenlänge 10 cm hat das Volumen von genau 1 Liter (= 1000 cm^3).

Welches Volumen bekommt man bei der doppelten Kantenlänge (= 20 cm)?

Zwei Liter – Lösung:

Damit bekommt man nicht das doppelte Volumen von 2 Liter, sondern 8 Liter (= 8000 cm^3).

Zwei Liter – Kommentar:

Oder in der Veranschaulichung („Kopfgeometrie“): Wie viele 10 cm-Würfel passen in einen 20 cm-Würfel? Einer links vorne unten, einer rechts vorne unten, ...