

Infoblatt
Sachanalyse, didaktische Reduktion und Entscheidung:

Satz: Es gilt $\sum_{k=1}^n k = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

Beweis: Durch vollständige Induktion oder mithilfe der Summation der beiden folgenden Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & k & + & \dots & + & (n-2) & + & (n-1) & + & n \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & (n-(k-1)) & + & \dots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \end{array} \quad \blacksquare$$

Um diesen Satz rankt sich die Geschichte¹ des „kleinen GAUß“:

CARL FRIEDRICH GAUß, 1777 bis 1855, einer der bedeutendsten Mathematiker. Die Schule, in die GAUß im Alter von neun Jahren ging, hatte nur ein Klassenzimmer. Der Lehrer wollte die älteren Schüler unterrichten und stellte den jüngeren Schülern die Aufgabe, die Zahlen von 1 bis 99 zu addieren. Er hatte dabei die Absicht, sie mindestens eine Stunde lang still zu beschäftigen. Der kleine GAUß hatte die Lösung (4950) nach drei Minuten mithilfe eines Tricks errechnet. Wie hat er das gemacht?

Schreibt man die Aufgabe $1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 = ?$ wie vorstehend auf (die ersten drei Summanden und die letzten drei Summanden), können Sechstklässlerinnen bzw. Sechstklässler sehr gut auf den Trick des Zusammenfassens geeigneter Summanden und das Ergebnis 4950 kommen:

$1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 = (1 + 99) + (2 + 98) + (3 + 97) + \dots + (49 + 51) + 50 = 49 \cdot 100 + 50 = 4900 + 50$
 Kommentar zur Rechnung: Es sind 99 Zahlen, und zwar 49 Zahlenpaare („Pärchen“) mit der Summe 100 und die mittlere Zahl $(1 + 99) : 2 = 50$ (allgemein: die Mitte zweier Zahlen a und b ist $(a + b) : 2$).

Diese Version hat den Vorteil, dass die Schülerinnen bzw. Schüler dies selbst entdecken können. Die Herleitung über zwei Zeilen (s.o.) ist eleganter, die Formel ergibt sich direkt ohne weitere Überlegungen zur Anzahl der Paare und der „übrigen“ Summanden. Dieser Kniff liegt aber eher nicht auf der Hand.

Eine didaktische Entscheidung: Aus Gründen der Nachhaltigkeit, der Einsicht und des Transfer-Spektrums halten wir es für sinnvoll, hier nicht auf die Formel oder den Zwei-Zeilen-Trick (s.o.) abzuheben. Die Berechnung von variierten Aufgaben „zu Fuß“ ist zwar nicht ganz so elegant, dafür ist die „Bodenhaftung“ gewährleistet. Der Fokus liegt auf dem Prozess der Erkundung von „+ ... +“:

- Bestimme die Summanden-Anzahl.
- Bestimme die Pärchen-Anzahl und die Pärchen-Summe.
- Bestimme das „äußere“ und das „innere“ Pärchen.
- Bestimme bei ungerader Summanden-Anzahl die mittlere Zahl („Mitte“).

Bei der Bestimmung dieser Einzelelemente treten Redundanzen auf. Die Angabe des äußeren und inneren Pärchens dient der Durchdringung des Sachverhalts. Man wird sich schließlich auf die Bestimmung der Pärchen-Anzahl, der Pärchen-Summe und ggf. der Mitte beschränken.

Die Aufgaben beschäftigen sich mit den beiden Typen $1 + 2 + 3 + \dots + n = ?$ (Typ 1) und

$m + (m+1) + (m+2) + \dots + n = ?$ (Typ 2)

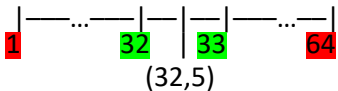
mit dem Lösungsansatz $= (1 + 2 + 3 + \dots + n) - (1 + 2 + 3 + \dots + (m-1))$

Ziele:

- Die Problemlösestrategie „geschicktes Rechnen bei strukturierten Summen“ kennenlernen bzw. erproben; dabei ist der Lösungsprozess, insbesondere die Identifizierung der beteiligten einzelnen Elemente, wichtiger als das Ergebnis (!).
- Die Problemlösestrategie „Aufspalten in Teilprobleme“ kennenlernen bzw. erproben.
- Die Bedeutung der beteiligten Zahlen (Anzahl der Summanden, Anzahl der Pärchen, Pärchensumme, Mitte) klar benennen und unterscheiden.

¹ Die Geschichte ist nicht verbürgt. Aus didaktischen Gründen wird hier als letzter Summand die Zahl 99, und nicht – wie man oft liest – die Zahl 100 verwendet.

Tafelanschrieb und Aufgaben

Der Summentrick des kleinen GAUß ... 1.) $1+2+3+ \dots +97+98+99 = ?$ $1+2+ \dots +49+50+51+ \dots +98+99 = ?$... heißt „Pärchen bilden“ Summanden-Anzahl: 99 äußeres Pärchen: $1+99$	inneres Pärchen: $49+51$ Pärchen-Summe: 100 Pärchen-Anzahl: 49 Mitte: 50 $\dots = 49 \cdot 100 + 50 =$ $= 4900 + 50 = \underline{4950}$	2.) $1+2+3+ \dots +43+44+45 = ?$ Summanden-Anzahl: 45 äußeres Pärchen: $1+45$ Pärchen-Summe: 46 Mitte: $(1+45):2 = 23$ inneres Pärchen: $22+24$	Pärchen-Anzahl: 22 $1+2+ \dots +22+23+24+ \dots +44+45 =$ $22 \cdot 46 + 23 = 1012 + 23 = \underline{1035}$
3.) $1+2+3+ \dots +62+63+64 = ?$ 64 Summanden: 64 ist eine gerade Zahl, die Pärchenbildung geht auf! Pärchen-Summe: 65  $(32,5)$ Pärchen-Anzahl: 32 $\dots = 32 \cdot 65 =$ $\underline{2080}$	4.) $10+11+12+ \dots +78+79+80 = ?$ Unbekanntes auf Bekanntes zurückführen (!): $= (1+2+3+ \dots +78+79+80) -$ $(1+2+3+ \dots +7+8+9) =$ $(40 \text{ Pärchen mit Summe } 81) -$ $(4 \text{ Pärchen mit Summe } 10 + \text{Mitte } 5) =$ $(40 \cdot 81) - (4 \cdot 10 + 5) = \dots = \underline{3195}$	Weitere Aufgaben vom Typ 1: $1+2+3+ \dots +42+43+44 = 22 \cdot 45 = \underline{990}$ $1+2+3+ \dots +57+58+59 = 29 \cdot 60 + 30 = \underline{1770}$ $1+2+3+ \dots +198+199+200 = 100 \cdot 201 = \underline{20100}$... Weitere Aufgaben vom Typ 2: $20+21+22+ \dots +42+43+44 = \dots = \underline{800}$ $36+37+38+ \dots +62+63+64 = \dots = \underline{1450}$... Weitere Aufgaben mit „schönem“ Ergebnis mithilfe der Tabelle erstellen ☺	

n=	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43
n*(n+1)/2=	55	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210	231	253	276	300	325	351	378	406	435	465	496	528	561	595	630	666	703	741	780	820	861	903	946
44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73					
990	1035	1081	1128	1176	1225	1275	1326	1378	1431	1485	1540	1596	1653	1711	1770	1830	1891	1953	2016	2080	2145	2211	2278	2346	2415	2485	2556	2628	2701					
74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100								
2775	2850	2926	3003	3081	3160	3240	3321	3403	3486	3570	3655	3741	3828	3916	4005	4095	4186	4278	4371	4465	4560	4656	4753	4851	4950	5050								

Verlaufsplan

SuS ... Schülerinnen und Schüler L ... Lehrerin bzw. Lehrer

EA ... Einzelarbeit PA ... Partnerinnen- bzw. Partnerarbeit FEU ... fragendentwickelnder Unterricht

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird die Lehrkraft mehr oder weniger lenken bzw. sich auf den Aufgabentyp 1 beschränken und die Phase Erarbeitung II weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU 5 Min.	L erzählt die Geschichte vom „kleinen GAUß“ und schreibt die Überschrift und die Initialaufgabe in geeignet suggestiver Form wie folgt an die Tafel: 1.) $1 + 2 + 3 + \dots + 97 + 98 + 99 = ?$	Tafel
2. Erarbeitung I EA/PA 20 Min.	SuS - suchen nach dem Trick und dem Ergebnis L stellt ggf. weitere Aufgaben vom Typ $1 + 2 + \dots + (n-1) + n = ?$ (z.B. $n=11 \rightarrow$ Probe durch Aufsummieren) als Puffer, bis alle SuS die Initialaufgabe gelöst haben. L lobt, aber beobachtet und berät sehr zurückhaltend.	Heft
3. Plenum I Aufgabentyp 1: $1+2+ \dots +n = ?$ FEU 20 Min.	L sammelt die Erkenntnisse und schreibt an die Tafel $1 + 2 + \dots + 49 + 50 + 51 + \dots + 98 + 99 = ?$ (Zahlen der betreffenden Paare gleich färben bzw. mit Bögen verbinden). weiter: vgl. Tafelanschrieb L macht die Probe mit der Anzahl der Summanden mündlich. L und SuS lösen zusammen nach diesem Muster die Aufgaben 2.) und 3.) (Dokumentation bei 3.) verkürzt und unter Verwendung einer Skizze – vgl. Tafelanschrieb) und erkennen - die Fallunterscheidung nach n ungerade / gerade (die Mitte kommt als Summand vor / nicht vor) - die Mitte von zwei Zahlen als ihren Durchschnitt.	Tafel / Heft
4. Erarbeitung II Aufgabentyp 2: $m+(m+1) + \dots + n = ?$ FEU/EA/PA 15 Min.	L stellt die Aufgabe 4.) : $10 + 11 + 12 + \dots + 78 + 79 + 80 = ?$ SuS sollen erkennen, dass man diese (neue) Aufgabe auf bereits bekannte Aufgaben zurückführen kann (Strategie!).	Tafel / Heft
5. Übung EA / PA 30 Min.	L stellt je nach Situation weitere Aufgaben (vgl. Blatt Tafelanschrieb und Aufgaben). SuS bearbeiten diese selbständig, die Dokumentation kann jetzt knapp sein (vgl. Tafelanschrieb zu 4.)). L lobt, aber beobachtet und berät zurückhaltend.	Tafel / Heft