

Infoblatt

Die Knobelaufgaben-Sammlung umfasst etwa **100 Aufgaben** (Teilaufgaben sind einzeln gezählt) – samt Lösungen, ggf. Differenzierungsvorschlägen und Kommentaren. Bisweilen wird auch der mathematische Hintergrund beleuchtet. Die Lehrkraft darf / kann / soll / muss mehr wissen als seine Schülerinnen und Schüler (SuS) ☺.

Man darf den Begriff Knobelaufgabe hier gerne im weiteren Sinn verstehen. Trotzdem haben nicht wenige Aufgaben dieser Sammlung den typischen Knobelaufgaben-Clou.

Einige der Knobelaufgaben haben auch die immanente Wiederholung von Stoffen aus Klasse 5 zum Inhalt.

Die Aufgaben können bei Mkid-Stunden als **Puffer** eingesetzt werden. Man kann auch eigene Knobelaufgaben-Stunden erfinden.

Der **Zeitbedarf** erstreckt sich mit allen Abstufungen von einer Minute (*Balken, Cola, Dörtes Mutter*) bis zu einer ganzen Sitzung (*zeichnerisches Multiplizieren*), wenn man das ausdehnen möchte.

Manche Aufgabentypen (*Stimmt's, Schätzfragen*) eignen sich für ein kleines **Gewinnspiel**.

Eine Knobelaufgabe oder ein „Dreierpack“ einer geeigneten Mischung von Knobelaufgaben zum Abschluss der Mkid-Stunde könnte zu einem **Ritual** werden.

Manche Aufgaben eignen sich gut zur **selbständigen Variation** durch die SuS (*Buchstaben-Rätsel, Durchschnitte, Würfel*).

Es ist nicht daran gedacht, dass die Lehrkraft die Aufgaben gedruckt austeilte, sondern dass die **Aufgaben vorgelesen** und ggf. im Unterrichtsgespräch **erläutert** werden. Ggf. werden wichtige Informationen an die Tafel (o.ä.) geschrieben oder gezeichnet bzw. auf irgendeine Art projiziert.

Für die Aufgaben *Punktsymmetrisch* und *Vier gleiche Teile* kann man auf das Arbeitsblatt *4-4-Quadrate* zurückgreifen, wenn man das möchte.

Bei Aufgaben, die Figuren enthalten, kann man auf das Arbeitsblatt *Figuren* zurückgreifen oder sich selbst ein Arbeitsblatt mit den jeweils benötigten Figuren zusammenstellen.

Bei **schwierigen Aufgaben** ist es schon gut, wenn die SuS

- das Problem erfassen und sich Gedanken machen
- von der Lehrkraft gesagt bekommen, dass dieses Problem ganz schwierig ist
- selbständig erste Lösungsansätze fassen (loben, loben, loben!)
- mit einem Tipp auf die richtige Lösung kommen
- die Auflösung verstehen und deren intellektuellen Charme erkennen (*Schachbrett*)
- erkennen, dass auch in aussichtslos scheinenden Situationen eine Lösung möglich ist.

An geeigneten Stellen wird die Lehrkraft auf eine der **Problemlöse-Strategien**

(„Leben ist Problemlösen“ – CARL POPPER, Philosoph, 1902-1994) hinweisen:

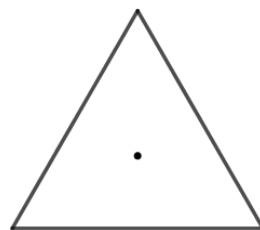
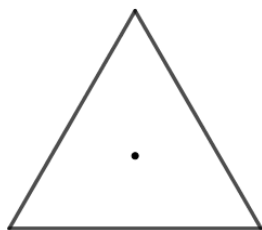
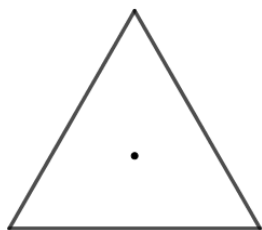
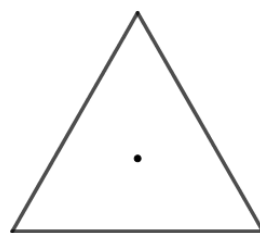
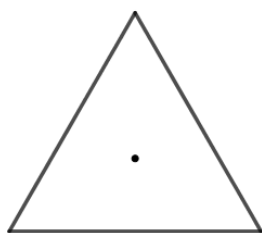
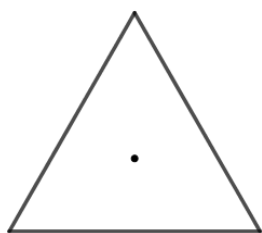
- *mache eine Skizze oder lege eine Tabelle an*
- *mache ein Beispiel*
- *probiere systematisch*
- *teile das Problem in Teilprobleme auf*
- *betrachte den ungünstigsten Fall („worst case“)*
- *arbeite alle Fälle der Reihe nach systematisch, sorgfältig und konzentriert ab*
- *Vorwärtsarbeiten bzw.: kann man etwas Einschränkendes über die Lösung sagen?*

Die **Selbsterfahrung der Lehrkraft** ist wichtig beim Knobeln. Also: nicht immer gleich die Lösung anschauen ☺. Im Idealfall überträgt sich die Begeisterung der Lehrkraft beim Knobeln auf die SuS.

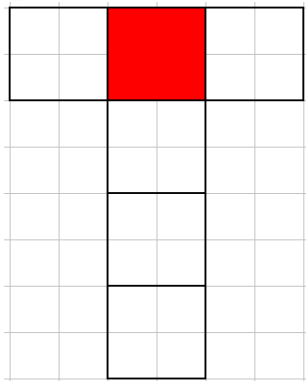
X	X	X	X	X	X
X					X
X					X
X					X
X					X
X	X	X	X	X	X

X	X	X	X	X	X
X					X
X					X
X					X
X					X
X	X	X	X	X	X

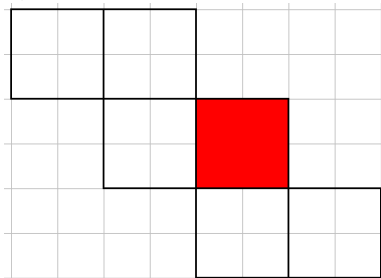
X	X	X	X	X	X
X					X
X					X
X					X
X					X
X	X	X	X	X	X



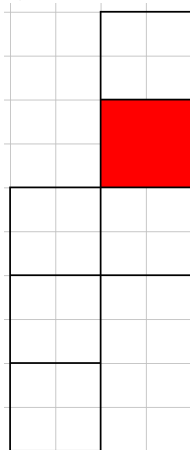
a)



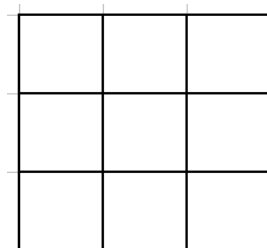
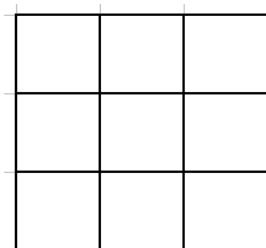
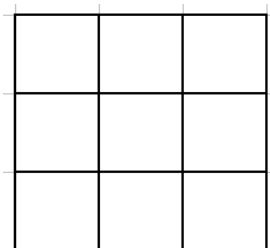
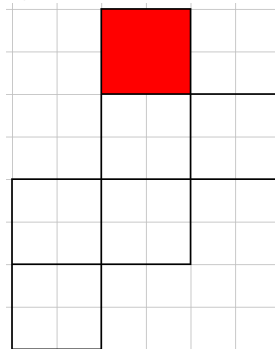
b)

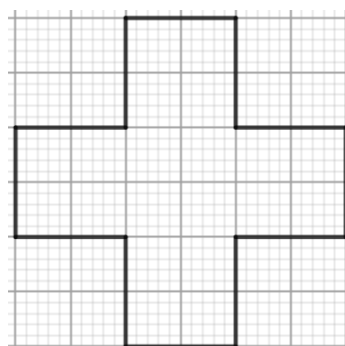
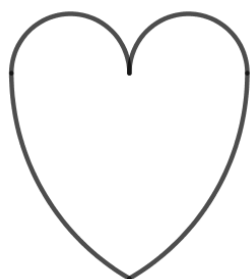
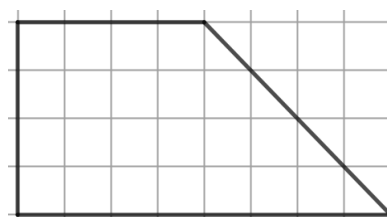
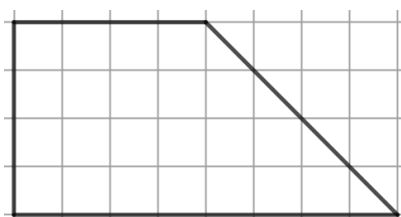
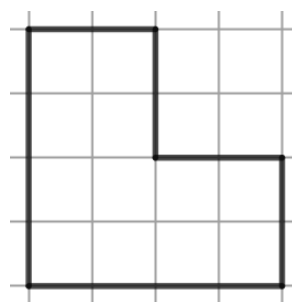
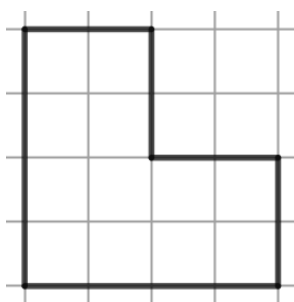
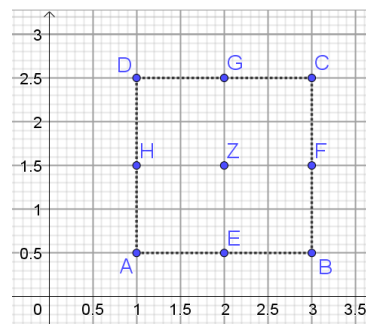
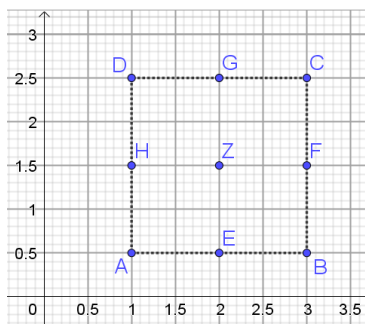
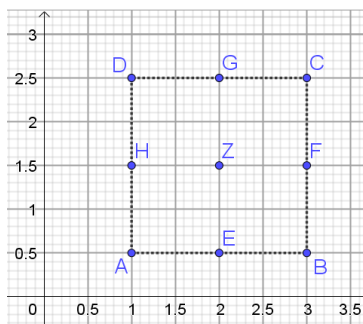
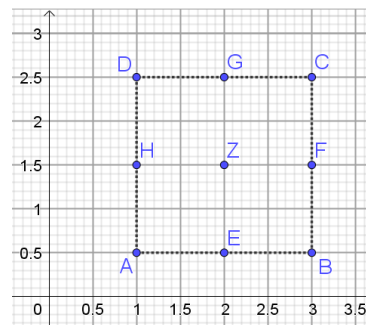
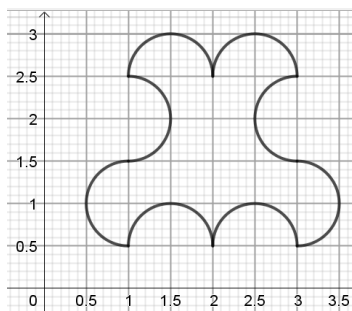
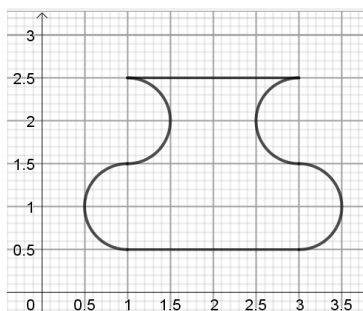


c)



d)

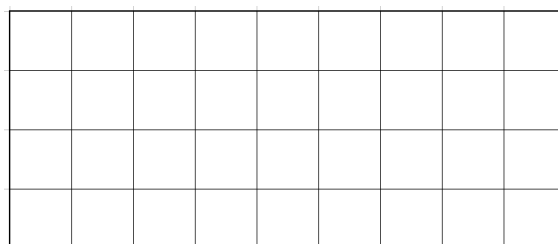
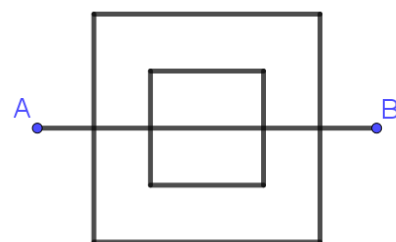
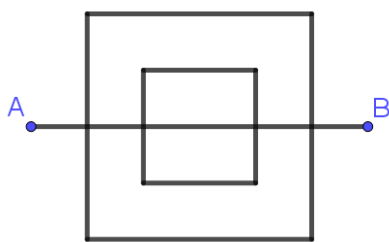
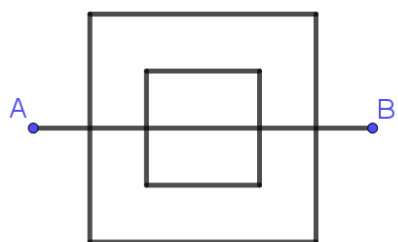
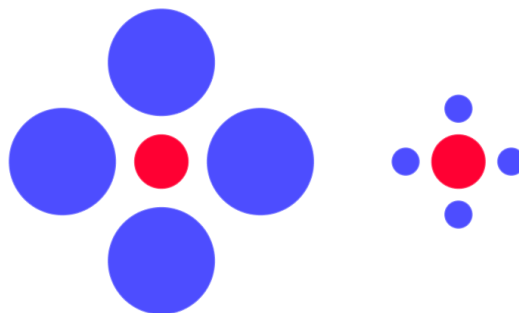
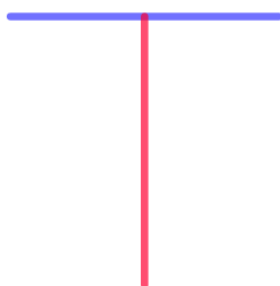
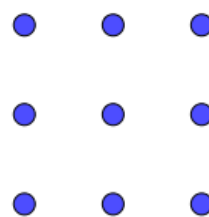
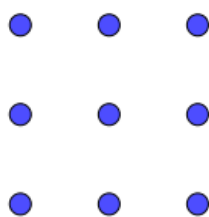
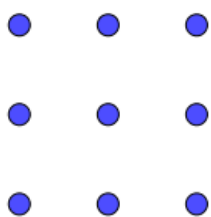




	9	
	5	
8		

16			
	10	11	
9	6		
4	15		1

11	24	7	20	
4			8	16
		13	21	9
	18	1	14	
		19		



a)

$$XI - II = XII$$

d)

$$VI + VIII = XII$$

b)

$$X + IV = V$$

e)

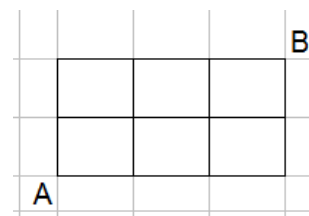
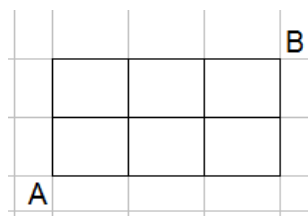
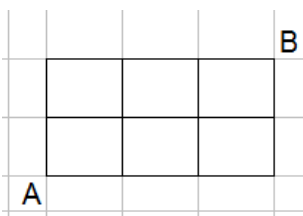
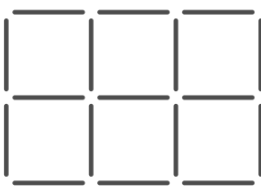
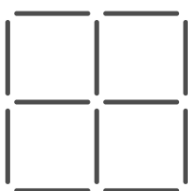
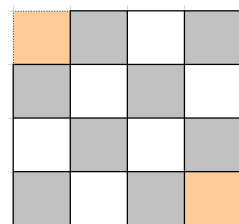
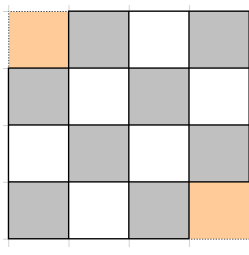
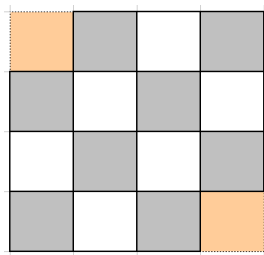
$$XII - II = XV + VI$$

c)

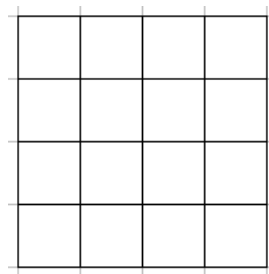
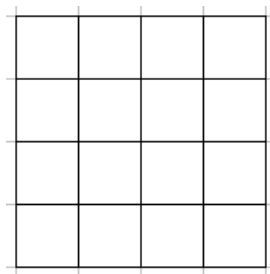
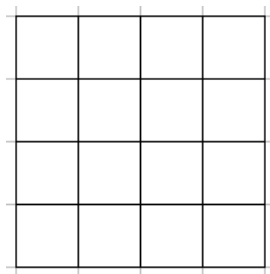
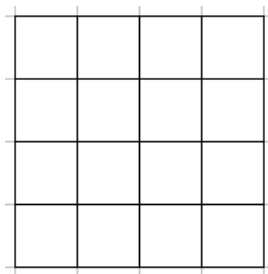
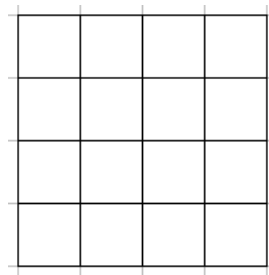
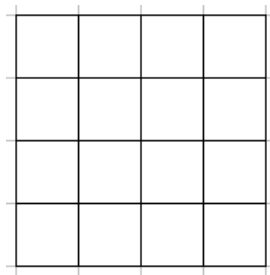
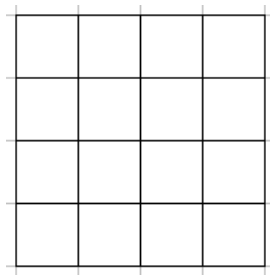
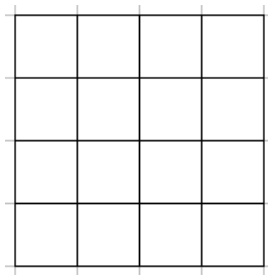
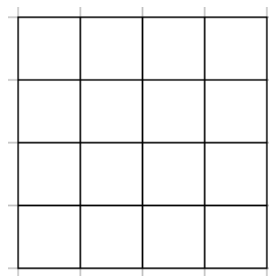
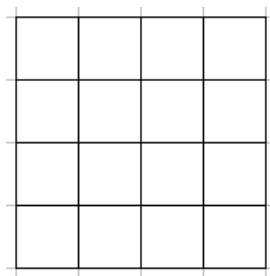
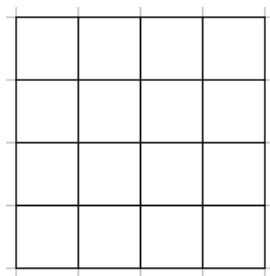
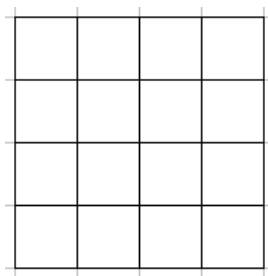
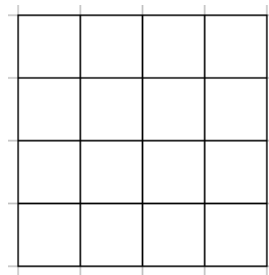
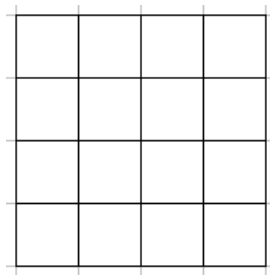
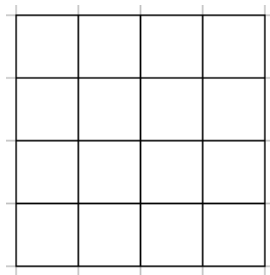
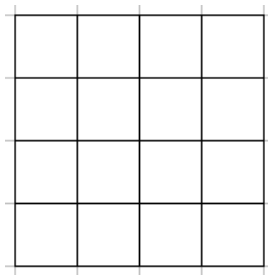
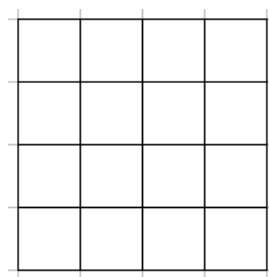
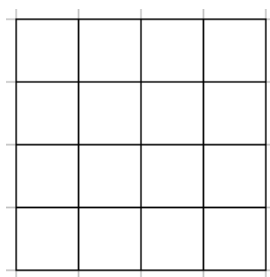
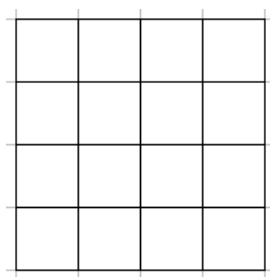
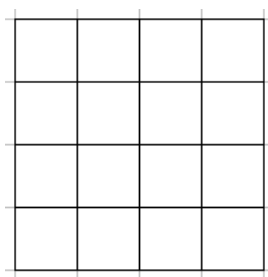
$$X + V - II = VII$$

f)

$$X - II = XV + VI$$



4	2	3			3	2				1	2				5	6				2							3
	1					1	4				3					2				4	6	3			1	5	
	5					5					5	6				1					5					4	6
a)	6				b)	6				c)	4				d)	4	3			e)	1					f)	2
1																											
2					5					2					3											1	
6	4				4	6	3			6	3				4	5									2	3	
	5					2					5	1				1										5	4
g)	3				h)	1				i)	4				j)	2	6								k)		6



Knobelaufgaben-Sammlung

Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen; und jeder geht zufrieden aus dem Haus. (Goethe)

Ankreuzen:

Kreuze im Innern des Quadrates (linke Abbildung) noch 10 Felder an, so dass die Anzahl der Kreuze in jeder Zeile und jeder Spalte eine gerade Zahl ist.

X	X	X	X	X	X
X					X
X					X
X					X
X					X
X	X	X	X	X	X

X	X	X	X	X	X
X	X	X			X
X	X		X		X
X	X			X	X
X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X

Ankreuzen – Lösung:

Z.B.: rechte Abbildung

Ankreuzen – Kommentar:

Strategie: Frage vorab – Gibt es irgendwelche Einschränkungen für die Vielfalt der Lösungen, die aus der Aufgabenstellung folgen?

Antwort hier: Man kann in die 2. Zeile, 3. Zeile, 4. Zeile und 5. Zeile nur 0 oder 2 oder 4 Kreuze eintragen – wegen der in der Aufgabenstellung geforderten Geradzahligkeit der Kreuze in allen Zeilen.

Strategie: Probiere systematisch und lerne dabei.

Die nachfolgenden Zeilen zeigen eine mögliche Abfolge von Versuchen und Überlegungen.

1. Versuch: keine Kreuze eintragen in der 2. Zeile → zweimal 4 Kreuze und einmal 2 Kreuze eintragen in den drei anderen Zeilen → führt nicht zu einer Lösung.

2. Versuch: keine Kreuze eintragen in der 3. Zeile → zweimal 4 Kreuze und einmal 2 Kreuze eintragen in den drei anderen Zeilen → führt nicht zu einer Lösung; usw.

Was haben wir bisher gelernt? Sind in einer Zeile keine Kreuze eingetragen, führt das nicht zu einer Lösung.

Also: In drei Zeilen müssen 2 Kreuze und in einer Zeile 4 Kreuze eingetragen werden.

3. Versuch: Dieser Ansatz führt zu einer Lösung, wenn man in den drei Zeilen, in die man 2 Kreuze einträgt, diese geeignet verteilt. Die anderen Lösungen entstehen aus der gezeigten Lösung durch Vertauschung von Zeilen bzw. Spalten.

Ankreuzen – Differenzierung:

Einfachere Aufgabenstellungen machen mehr Vorgaben.

Zum Beispiel so:

Kreuze im Innern des Quadrates in jeder Zeile noch zwei oder vier Felder an, und zwar so, dass die Anzahl der Kreuze in jeder Zeile und jeder Spalte eine gerade Zahl ergeben. Mache insgesamt 10 Kreuze.

Oder so:

Kreuze im Innern des Quadrates (Abbildung) noch 6 Felder an, so dass die Anzahl der Kreuze in jeder Zeile und jeder Spalte eine gerade Zahl ergeben.

X	X	X	X	X	X
X	X	X	X	X	X
X					X
X					X
X					X
X	X	X	X	X	X

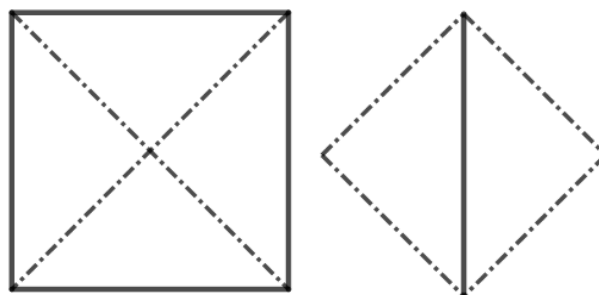
Aus eins mach zwei:

Zerschneide ein Quadrat in vier gleiche Teile, die du zu zwei Quadraten zusammenlegen kannst.

Aus eins mach zwei – Lösungen:

Zerschneide das Quadrat entlang der Diagonalen in vier gleiche rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke (linke Abbildung).

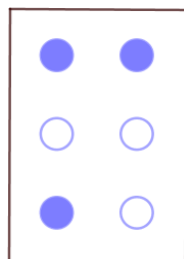
Setze je zwei davon zu einem Quadrat zusammen (rechte Abbildung).

**Blindenschrift:**

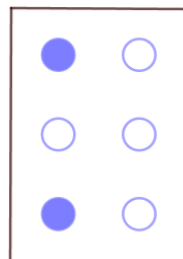
Die so genannte BRAILLE-Schrift verwendet für Buchstaben und andere Zeichen sechs Punkte, die in unterschiedlichen Kombinationen hervorstehen und mit dem Finger als Erhöhungen ertastet werden können (vgl. Abbildungen unten – ausgefüllte Kreise).

So steht also zum Beispiel für den Buchstaben M die folgende Kombination (linke Abbildung, weitere Beispiele in den drei anderen Abbildungen)

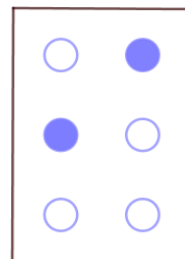
oben links: erhöht
oben rechts: erhöht
Mitte links: glatt
Mitte rechts: glatt
unten links: erhöht
unten rechts: glatt



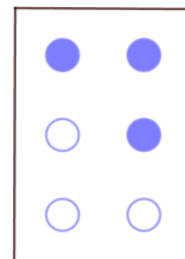
M



K



I



D

Wie viele Zeichen
sind in der BRAILLE-
Schrift möglich?

Blindenschrift – Lösung:

Es sind $2^6 = 64$ Zeichen möglich.

Für die Position oben links hat man 2 Möglichkeiten (erhöht oder nicht). Für jede dieser beiden Möglichkeiten hat man für die Position oben rechts wieder zwei Möglichkeiten. Das sind insgesamt jetzt schon $2 \cdot 2 = 4$ Möglichkeiten. Für jede dieser 4 Möglichkeiten hat man für die Position Mitte links 2 Möglichkeiten. Bis hierher also $2 \cdot 4 = 8$ Möglichkeiten usw.

Blindenschrift – Kommentar:

Diese Denkrichtung – vielleicht sogar den Anfang eines Baumdiagramms – sollte die Lehrkraft als **Tipp** vorgeben.

Man könnte gemäß der **Strategie Teile das Problem in Teilprobleme** auf nämlich auch so vorgehen:

- Wie viele Zeichen mit 0 erhöhten Punkten gibt es? Antwort: 1 (das ist offensichtlich)
- Wie viele Zeichen mit 1 erhöhtem Punkt gibt es? Antwort: 6 (das ist offensichtlich)
- Wie viele Zeichen mit 2 erhöhten Punkten gibt es? Antwort: 15 (das ist schon schwierig)
- Wie viele Zeichen mit 3 erhöhten Punkten gibt es? Antwort: 20

Ab hier kommt man aber leider ohne die Kenntnis von Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} = \text{Anzahl der Möglichkeiten aus } n \text{ Objekten } k \text{ auszuwählen, nicht mehr aus.}$$

Entre nous: – damit gilt dann: $\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6} = 2^6$.

Brett:

Ein Brett ist 250 cm lang. Es soll in gleiche Stücke zu je 50 cm Länge zersägt werden. Wie oft muss man sägen?

Brett – Lösung:

Man muss 4-mal sägen, nicht 5-mal – wer's nicht glaubt, macht eine Skizze (**Strategie!**).

Brüder und Schwestern:

Max Meier hat genau so viele Brüder wie Schwestern. Seine Schwestern haben halb so viele Schwestern wie Brüder. Wie viele Jungen und wie viele Mädchen gibt es bei der Familie Meier?

Brüder und Schwestern – Lösungen:

Man wird zu Beginn einfach einmal ein Beispiel machen, um den Sachverhalt mit den vielleicht verwirrenden Formulierungen zu verstehen und dann daran zu lernen.

Strategie: Mache einfach einmal irgendein Beispiel, dass du den Sachverhalt zunächst überhaupt verstehst und lerne dann daraus.

1. Versuch: Familie Meier hat 4 Jungen und 4 Mädchen, dann hätte Max, er ist ja ein Junge, aber nur 3 Brüder. Erkenntnis: Es muss ein Junge mehr sein.

2. Versuch: Familie Meier hat 5 Jungen und 4 Mädchen. Jedes Mädchen hat dann 3 Schwestern und 5 Brüder. Das passt noch nicht ganz, es fehlt noch 1 Junge zum Doppelten.

3. Versuch: Familie Meier hat 6 Jungen und 5 Mädchen. Jedes Mädchen hat dann 4 Schwestern und 6 Brüder. Das passt noch weniger, jetzt fehlen schon 2 Jungen zum Doppelten. Erkenntnis: Vielleicht also weniger Kinder?

4. Versuch: Familie Meier hat 4 Jungen und 3 Mädchen. Jedes Mädchen hat dann 2 Schwestern und 4 Brüder. Jetzt passt es.

Brüder und Schwestern – Kommentar:

An die Lösung eines linearen Gleichungssystems (LGS) ist dabei nicht gedacht.

J ... Anzahl der Jungen; M ... Anzahl der Mädchen

$$\text{LGS: } J - 1 = M \quad \wedge \quad 2 \cdot (M - 1) = J \quad \Leftrightarrow \quad J = 4 \quad \wedge \quad M = 3$$

Buchstaben-Rätsel mit Lösungen:

Zu einer „Abkürzung“ in einer abenteuerlichen Schreibweise ist eine Bedeutung zu finden.

Beispiel: 60 = M hat eine S → Bedeutung: 60 Minuten hat eine Stunde

24 = S hat ein T → 24 Stunden hat ein Tag

366 = T hat ein S → 366 Tage hat ein Schaltjahr

500 = G hat ein P → Bedeutung: 500 Gramm hat ein Pfund

100 = L hat ein HL → Bedeutung: 100 Liter hat ein Hektoliter

4 = E hat ein Q → Bedeutung: 4 Ecken hat ein Quadrat

1000 = KCM hat ein L → Bedeutung: 1000 Kubikzentimeter hat ein Liter

6 = Q hat ein W → Bedeutung: 6 Quadrate hat ein Würfel

31 = T hat der J → Bedeutung: 31 Tage hat der Januar

1000 = F hat der TF → 1000 Füße hat der Tausendfüßler (stimmt ja eigentlich gar nicht: Nach Wikipedia sind es im Extremfall 750)

Man wird den Schwierigkeitsgrad ausloten müssen und ggf. sogar jeweils die beiden Anfangsbuchstaben (**Tipp**) vorgeben, z.B.: 6 = QU hat ein WÜ → Bedeutung: 6 Quadrate hat ein Würfel.

Buchstaben-Rätsel – Kommentar:

Mit den Schülerinnen und Schülern zusammen selbst Beispiele finden macht Spaß!

Gerne wird man auch weitere außermathematische Beispiele verwenden:

4 Blätter hat ein Glücks-Kleeblatt

die 4 Himmelsrichtungen heißen Nord, Ost, Süd und West

5 Finger hat eine Hand

7 Häute hat eine Zwiebel

11 Spieler hat eine Fußballmannschaft

16 Bundesländer hat die Bundesrepublik Deutschland

18 Mannschaften hat die Bundesliga

usw.

Cola:

Eine Dose Cola kostet 1 €. Das Cola selbst kostet 0,60 € mehr als die leere Dose. Was kostet die leere Dose?

Cola - Lösung:

Die spontane Idee, dass die leere Dose $1,00 \text{ €} - 0,60 \text{ €} = 0,40 \text{ €}$ kostet, ist falsch. Das offenbart eine Probe (!): $0,40 \text{ €} + (0,40 \text{ €} + 0,60 \text{ €}) = 1,40 \text{ €}$. Die Dose kostet 0,20 €. Das Cola kostet dann 0,80 €, das sind tatsächlich 0,60 € mehr als 0,20 €.

Die Lösung kann und soll durch Probieren gefunden werden, an die Verwendung eines linearen Gleichungssystems ist hier nicht gedacht.

Dörtes Mutter:

Die Mutter von Dörte hat 4 Kinder. Das erste Kind heißt Mara. Das zweite Kind hat heißt Mere. Das dritte Kind heißt Mimi. Wie heißt das vierte Kind?

Dörtes Mutter - Lösung:

Nein, es heißt nicht Momo. Das vierte Kind von Dörtes Mutter muss Dörte heißen, wenn die anderen drei Kinder offenbar nicht Dörte heißen.

Dreiecke:

Ordne sechs gleichlange Stäbe so an, dass vier gleichseitige Dreiecke entstehen – genau vier, nicht mehr und nicht weniger.

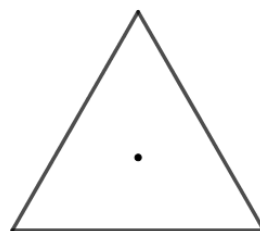
Dreiecke – Lösung:

Man bilde eine Dreieckspyramide, das sogenannte Tetraeder.

Dreiteilung:

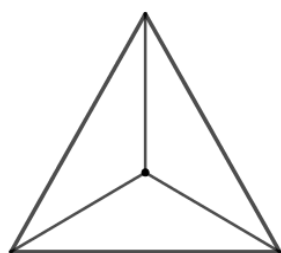
Teile ein gleichseitiges Dreieck (vgl. Abbildung rechts mit eingetragenem Mittelpunkt) in deckungsgleiche Teile (gleiche Form und gleiche Größe) auf, und zwar:

- a) in drei Dreiecke
- b) in drei Drachen
- c) in drei Trapeze

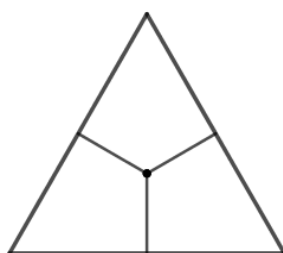


Dreiteilung – Lösungen:

a) Verbinde den Mittelpunkt mit den Eckpunkten.



b) Fülle das Lot vom Mittelpunkt auf die Seiten.



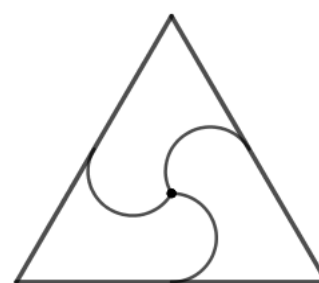
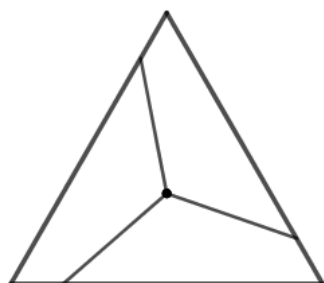
c) Zeichne Parallelen zu den Seiten durch den Mittelpunkt.

**Dreiteilung – Kommentar:**

Entre nous: Vom Mittelpunkt eines Dreiecks zu sprechen verbietet sich im Allgemeinen, weil dabei unklar ist, welche „Mitte“ gemeint ist. In Frage kommen z.B. der Umkreismittelpunkt, der Inkreismittelpunkt und der Schwerpunkt. Beim gleichseitigen Dreieck fallen alle diese Punkte (und noch weitere wie der Höhenschnittpunkt oder der FERMAT-TORRICELLI-Punkt, das ist der Punkt mit der minimalen Entfernungssumme zu den Eckpunkten) zusammen, so dass man wohl von „dem“ Mittelpunkt sprechen kann.

Dreiteilung – noch ein Kommentar:

Diese geometrische Situation ist stark verallgemeinerungsfähig. Man kann vom Mittelpunkt des gleichseitigen Dreiecks aus eine beliebige Strecke – ja sogar irgendeinen Streckenzug oder eine beliebige Kurve – zum Rand zeichnen und diese dann zweimal um 120° drehen. Auf diese Weise erhält man stets eine drehsymmetrische Figur zum Drehmaß 120° bzw. eine Aufteilung in drei deckungsgleiche Flächen.

**Durchschnitte:**

- Wie lautet der Durchschnitt der Zahlen 3; 4 und 8?
- Wie lautet der Durchschnitt der Zahlen 3; 4; 7; 10 und 16?
- Finde drei unterschiedliche Zahlen mit dem Durchschnitt 10.
- Finde fünf unterschiedliche Zahlen mit dem Durchschnitt 20.
- Zu den Zahlen 3 und 8 ist eine dritte Zahl gesucht, so dass der Durchschnitt der drei Zahlen 10 ist.
- Zu den Zahlen 2; 5 und 11 ist eine vierte Zahl gesucht, so dass der Durchschnitt der vier Zahlen 10 ist.
- Es sind vier unterschiedliche Zahlen gesucht, deren Durchschnitt größer als die zweitgrößte Zahl ist.
- Es sind drei unterschiedliche Zahlen gesucht, deren Durchschnitt größer als die größte der drei Zahlen ist.
- Bilde mit den Ziffern 1; 2; 3; 4; 5 und 6 (jede der sechs Ziffern soll genau einmal verwendet werden) drei Zahlen, deren Durchschnitt 37 ist.
- Felix hat von drei Zahlen den Durchschnitt berechnet. Er vergrößert eine der drei Zahlen um 6. Um wie viel vergrößert sich der Durchschnitt?

Durchschnitte – Lösungen:

a) $(3 + 4 + 8) : 3 = 15 : 3 = 5$

b) $(3 + 4 + 7 + 10 + 16) : 5 = 40 : 5 = 8$

c) z.B.: 9; 10; 11

d) z.B.: 18; 19; 20; 21; 22

e) Dritte Zahl: 19, die Summe der drei Zahlen muss $3 \cdot 10 = 30$ sein.

f) Vierte Zahl: 22, die Summe der vier Zahlen muss $4 \cdot 10 = 40$ sein.

g) z.B.: 1; 2; 3 und 10 mit Durchschnitt 4

h) Das ist nicht möglich.

i) $(14 + 62 + 35) : 3 = 111 : 3 = 37$

j) Der Durchschnitt vergrößert sich um 2.

Formal: $(a + b + c) : 3 = m$; $(a + b + c + 6) : 3 = m + 2$.

Man ist hier mit beispielgebundenen Argumentationen der Schülerinnen und Schüler (SuS) zufrieden.

Durchschnitte – Kommentar:

SuS können in aller Regel Durchschnitte (arithmetische Mittel) berechnen, auch schon vor einer Behandlung dieses Themas im Unterricht. Für diesen Fall würde man ausloten, was von den Aufgabenteilen a) bis j) möglich ist.

SuS können ggf. selbst solche Aufgaben erfinden.

Durchschnitte – noch ein Kommentar:

Die sogenannte *Ausgleichseigenschaft* ist für den Durchschnitt charakteristisch. Sie besagt, dass eine Zahl d genau dann Durchschnitt der n Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n ist, wenn sich die Abweichungen der x_i von d nach oben und die Abweichungen nach unten ausgleichen, also die vorzeichenbehaftete Abweichungssumme gleich 0 ist.

Beweis:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) : n = d \Leftrightarrow (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = n \cdot d \Leftrightarrow (x_1 - d) + (x_2 - d) + \dots + (x_n - d) = 0.$$

Beispiel:

$$x_1 = 3; x_2 = 4; x_3 = 8; d = 5$$

$$x_1 = 3: \text{ Abweichung nach unten} = 2, \text{ vorzeichenbehaftete Abweichung} = -2$$

$$x_2 = 4: \text{ Abweichung nach unten} = 1, \text{ vorzeichenbehaftete Abweichung} = -1$$

$$x_3 = 8: \text{ Abweichung nach oben} = 3, \text{ vorzeichenbehaftete Abweichung} = 3$$

$$\text{Es ist in der Tat } 3 = 2 + 1 \text{ bzw. } 3 + (-2) + (-1) = 0.$$

Bei der Aufgabe e) (*Der Durchschnitt der drei Zahlen 3 und 8 und ??? soll 10 sein.*)

kann man also auch vorgehen:

Man bestimmt zunächst die Summe der Abweichungen nach unten, diese beträgt $7 + 2 = 9$. Die dritte Zahl muss also $10 + 9 = 19$ lauten.

Elf:

Welche Zahl ist gemeint mit „elf Tausend elf Hundert elf“?

Elf – Lösungen:

$$11 \cdot 1000 + 11 \cdot 100 + 11 = 12.111$$

Elf – Kommentar:

Desgleichen: „zwölf Tausend zwölf Hundert zwölf“ ist dann $12 \cdot 1000 + 12 \cdot 100 + 12 = 13.212$

Extreme Körper:

Was für ein Körper ist das?

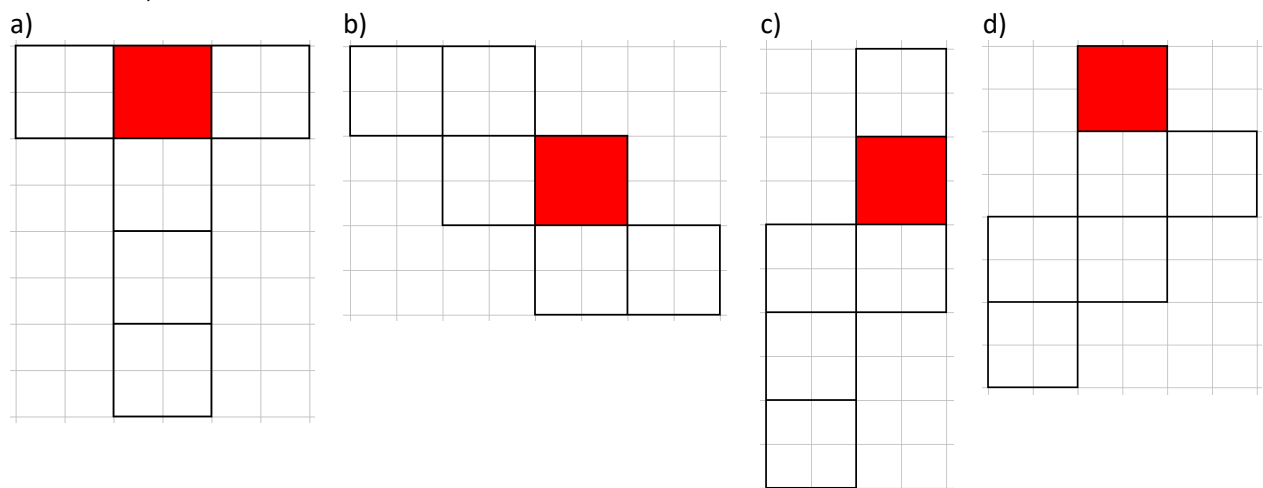
- a) eine einzelne Spaghetti-Nudel
- b) ein Blatt Papier DIN A4
- c) ein Sandkorn
- d) eine Büroklammer
- e) die Spitze eines gespitzten Bleistifts
- f) ein Bleistift ohne Spitze
- g) ein Haar
- h) ein Trinkhalm
- i) eine DVD

Extreme Körper - Lösung:

- a) ein Zylinder
- b) ein Quader (bei „normalem“ Papier beträgt die Höhe dieses Quaders etwa 0,1 mm)
- c) eine Kugel (in guter Näherung)
- d) ein gebogener Zylinder
- e) ein Kegel
- f) In aller Regel ist das ein Prisma, oft ist es sechseckig.
Zylinderförmige Bleistifte sind eher selten, weil sie nicht so praktisch sind, sie rollen von schrägen Tischflächen.
- g) ein Zylinder
- h) ein Hohlzylinder (das ist ein Zylinder bei dem innen ein kleinerer Zylinder „fehlt“)
- i) ein Hohlzylinder

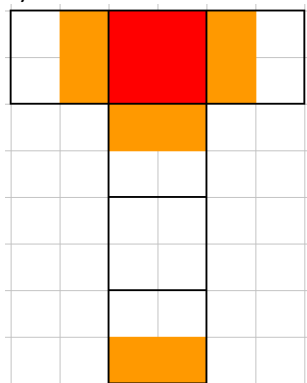
Farbe:

Robert hat einen Würfel mit der unteren Hälfte in rote Farbe getaucht. Die Abbildungen zeigen Netze dieses Würfels. Die untere Seitenfläche ist schon rot gefärbt. Zeichne ein, an welchen Stellen noch rote Farbe ist.

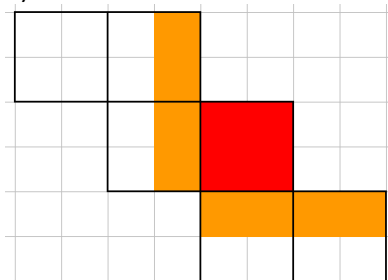


Farbe – Lösungen:

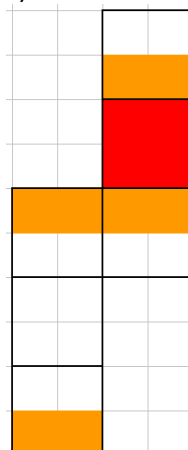
a)



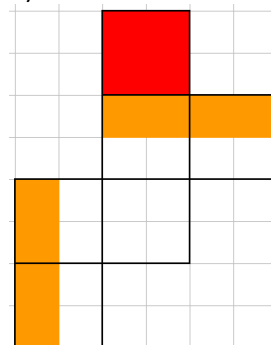
b)



c)



d)

**Farbige Socken:**

Leander hat insgesamt zwei Paar dunkelblaue, drei Paar dunkelbraune und vier Paar dunkelgrüne Socken. Diese insgesamt Paar 18 Socken liegen gewaschen und getrocknet in einer Schublade, aber einzeln und durcheinander.

Er bittet Linda ihm ein Paar gleichfarbige zu holen. Linda ist leicht farbenblind und kann diese dunklen Socken nicht unterscheiden.

Wie viele Socken muss sie mindestens mitnehmen, damit sicher zwei gleichfarbige darunter sind?

Wir gehen hierbei davon aus, dass es keine linken oder rechten Socken gibt.

Farbige Socken – Lösung:

Sie muss mindestens vier Socken mitnehmen. Bei dreien sind es im ungünstigsten Fall drei verschiedene, bei vierten sind dann sicher zwei gleiche Farben dabei.

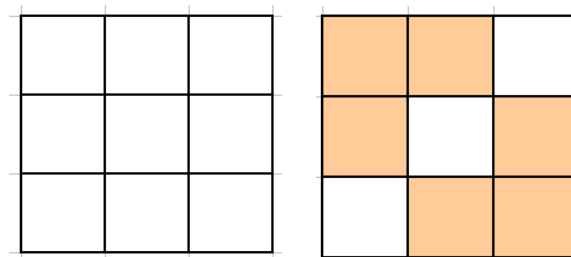
Farbige Socken – Kommentar:

Strategien hierbei sind:

- Den ungünstigsten Fall („worst case“) betrachten.
- Das sogenannte Schubfachprinzip anwenden. Wenn $n+1$ Kugeln in n Schubfächern verteilt werden sollen, dann liegt in mindestens einem Schubfach mehr als eine Kugel.

Felder:

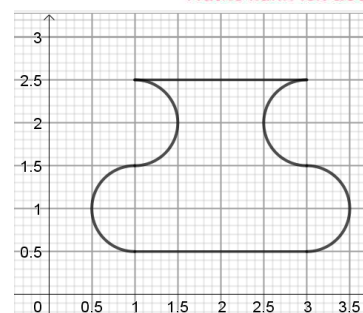
Färbe möglichst viele Felder (linke Abbildung), aber in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder Diagonalen sollen höchstens zwei Felder gefärbt sein.

**Felder – Lösung:**

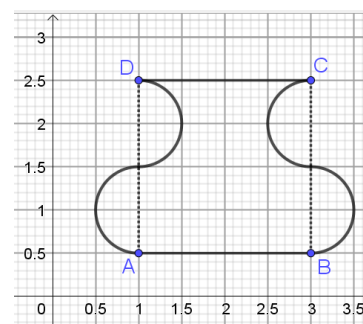
Rechte Abbildung – mehr als sechs Felder sind nicht möglich

Figur 1:

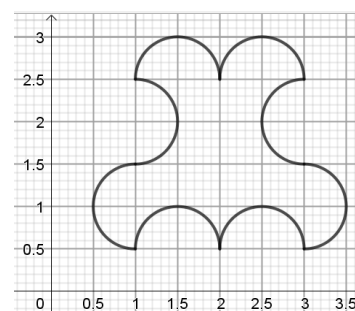
- a) Wie ist die Figur (Abbildung rechts) entstanden?
 b) Bestimme ihren Flächeninhalt – fast ohne etwas zu rechnen.

**Figur 1 – Lösung:**

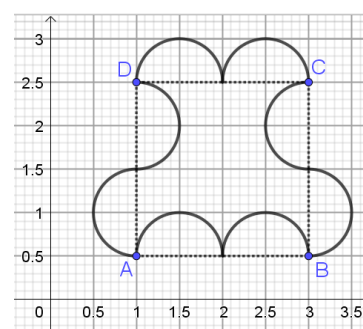
- a) Es wurden die beiden Strecken AB und DC (Abbildung rechts), sowie vier Halbkreise gezeichnet, zugehörige Mittelpunkte: (1|1); (3|1); (3|2); (1|2).
 b) Die Figur hat denselben Flächeninhalt wie das Quadrat ABCD der Kantenlänge 2. Die beiden überstehenden Halbreise „passen“ in die beiden Halbkreislücken.
 Der Flächeninhalt beträgt $2 \cdot 2 = 4 \text{ [cm}^2\text{]}$.

**Figur 2:**

- a) Wie ist die Figur (Abbildung rechts) entstanden?
 b) Bestimme ihren Flächeninhalt – fast ohne etwas zu rechnen.

**Figur 2 – Lösung:**

- a) Es wurden insgesamt acht Halbkreise gezeichnet. Zugehörige Mittelpunkte: (1,5|0,5); (2,5|0,5); (3|1) usw. (Abbildung rechts)
 b) Die Figur hat denselben Flächeninhalt wie das Quadrat ABCD der Kantenlänge 2. Geht man gedanklich von Quadrat ABCD aus, erkennt man, dass die überstehenden vier Halbreise in die vier Halbkreislücken „passen“.
 Der Flächeninhalt beträgt $2 \cdot 2 = 4 \text{ [cm}^2\text{]}$.

**Figur 2 – Kommentar:**

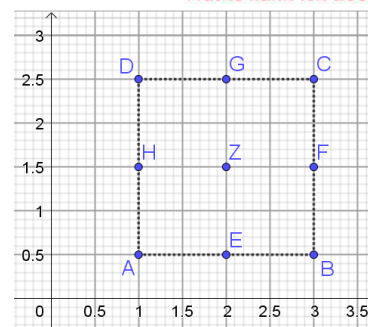
Der Charme der Figur der Aufgabe Flächeninhalt 2 liegt darin, dass diese keine einzige Strecke enthält. Die beiden Figuren der Aufgaben Flächeninhalt 1 und 2 sind formal-geometrisch stark verwandt. Die zweite entsteht aus der ersten durch das Ansetzen von jeweils zwei Halbkreisen oben und unten. Dies fällt möglicherweise zunächst nicht so stark auf, weil sich inhaltlichen Assoziationen wie z.B. „Vase“ und „Wappen“ gedanklich in den Vordergrund drängen.

Figur 3:

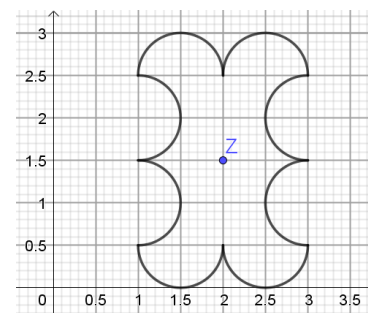
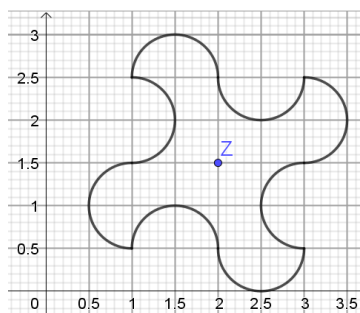
Gesucht ist eine zum Mittelpunkt Z des Quadrates ABCD punktsymmetrische Figur (Abbildung rechts).

Zeichne dazu acht Halbkreise zu den Strecken AE, EB, BF, usw., und zwar vier ins Quadrat ABCD hinein, vier außerhalb.

Die Halbkreise innerhalb des Quadrates sollen sich nicht überschneiden.

**Figur 3 – Lösung:**

Es gibt bis auf Übereinstimmung durch Spiegelung und Drehung (Kongruenz) zwei Lösungen, vgl. die beiden Abbildungen rechts.

**Figur 3 – Kommentar:**

Die Figur links (Assoziationen „Tauben“, „Windrad“) ist sogar drehsymmetrisch zum Drehmaß 90° , die rechts (Assoziation „3-3-Zwillinge“) zweifach achsensymmetrisch.

Mehrfach symmetrische Figuren können einen ästhetischen Reiz ausstrahlen.

Figur 3 – Differenzierung:

Die Schülerinnen und Schüler können

- eine Lösung finden
- beide Lösungen finden
- begründen, warum es keine weiteren Lösungen geben kann (Beginne mit einem Halbkreis innerhalb des Quadrates. Für den benachbarten Halbkreis zur selben Strecke gibt es noch zwei Möglichkeiten: außen oder innen. Danach ist durch die Punktsymmetrie und die weiteren Vorgaben alles festgelegt.).

Fünferkette:

Eine Fünferkette besteht aus fünf Zahlen, die man auf die folgende Weise erhält:

Die ersten beiden Zahlen denkt man sich aus. Die dritte Zahl ergibt sich, indem man die ersten beiden Zahlen addiert. Die vierte Zahl ergibt sich, indem man die zweite und die dritte Zahl addiert. Die fünfte Zahl ergibt sich, indem man die dritte und die vierte Zahl addiert. Man bildet also immer die Summe der beiden Vorgänger.

Ein Beispiel:

- 1. Zahl: **4** | 2. Zahl: **7** | 3. Zahl: $4 + 7 = 11$ | 4. Zahl: $7 + 11 = 18$ | 5. Zahl: $11 + 18 = 29$.

Fridolin hat einen Trick entdeckt, wie er aus der 1. Zahl und der 2. Zahl einer Fünferkette die 5. Zahl direkt ausrechnen kann, ohne die 3. Zahl und die 4. Zahl zu berechnen.

Findest du den Trick auch?

Fünferkette – Lösung:

Die 5. Zahl ist das Doppelte der 1. Zahl plus das Dreifache der 2. Zahl.

Die Lösung erhält man ohne Zuhilfenahme von Variablen verallgemeinerungsfähig am Beispiel, indem man die Zahlterme der 3. Zahl, der 4. Zahl und der 5. Zahl nicht ausrechnet, sondern zusammenfasst.

1. Zahl: **4** | 2. Zahl: **7** | 3. Zahl: **4 + 7** | 4. Zahl: **7 + 4 + 7** | 5. Zahl: **4 + 7 + 7 + 4 + 7** = $2 \cdot 4 + 3 \cdot 7$

Fünferkette – Kommentar:

Mithilfe anderer Beispiele kann man die Lösung vermuten, die Begründung steht dann natürlich noch aus.

1. Zahl: 1 | 2. Zahl: 10 | 3. Zahl: $1 + 10 = 11$ | 4. Zahl: $10 + 11 = 21$ | 5. Zahl: $11 + 21 = 32$
 1. Zahl: 1 | 2. Zahl: 100 | 3. Zahl: $1 + 100 = 101$ | 4. Zahl: $100 + 101 = 201$ | 5. Zahl: $101 + 201 = 302$

Fußball-Turnier:

Zu einem kleinen Fußball-Turnier sind vier Mannschaften gemeldet. Jede Mannschaft spielt gegen jede andere.

a) Wie viele Spiele finden statt?

b) Kurz vor Turnierbeginn meldet sich noch eine fünfte Mannschaft. Der Turnierleiter überlegt, ob er sie zulassen soll. Wie viele Spiele würden hinzukommen?

Fußball-Turnier – Lösungen:

a) Wir nennen die vier Mannschaften A, B, C, und D und schreiben die möglichen Spiele systematisch auf:

AB AC AD
 BC BD
 CD

Es sind also 6 Spiele.

b) Mit der fünften Mannschaft E würden vier Spiele dazu kommen: AE, BE, CE, und DE.

Fußball-Turnier – Kommentar:

Strategie: alle Fälle der Reihe nach systematisch, sorgfältig und konzentriert „abarbeiten“ und dabei beachten, dass AB und BA dasselbe Spiel ist.

Entre nous – allgemein: Wie viele Spiele sind es bei n Mannschaften?

Bzw. in der kombinatorischen Übersetzung:

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus n Objekten 2 auszuwählen?

Bei n Mannschaften gibt es $\binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$ Spiele.

Fußball-Turnier – Differenzierung:

Neben dem systematischen Abzählen kann man je nach Leistungsfähigkeit und -bereitschaft der Lerngruppe auch noch weitere Teilaufgaben stellen und den Sachverhalt weiter strukturiert angehen:

c) Gesucht ist ein Zahlterm, mit dem man die Anzahl der Spiele bei 4 Mannschaften berechnen kann.

Die folgenden Überlegungen helfen dabei.

Die Tabelle (Abbildung rechts) zeigt alle möglichen Zweier-Kombinationen der Buchstaben von A bis D.

- Wie viele sind es?

- Wie viele muss man streichen, da eine Mannschaft nicht gegen sich selbst spielen kann?

- Wie viele der Zweierkombinationen bezeichnen dasselbe Spiel?

	A	B	C	D
A	AA	AB	AC	AD
B	BA	BB	BC	BD
C	CA	CB	CC	CD
D	DA	DB	DC	DD

Lösung:

Es sind $4 \cdot 4$ Zweierkombinationen.

Die vier Kombinationen in der Diagonale von links oben nach rechts unten (Abbildung rechts) muss man streichen, es bleiben $4 \cdot 4 - 4$ übrig.

Je zwei Kombinationen bezeichnen dasselbe Spiel, also gibt es $(4 \cdot 4 - 4) : 2 = 6$ Spiele.

	A	B	C	D
A	AA	AB	AC	AD
B	BA	BB	BC	BD
C	CA	CB	CC	CD
D	DA	DB	DC	DD

d) Wie lautet der Zahlterm mit dem man die Anzahl der Spiele bei 5; 6; 18 Mannschaften (= Bundesliga Vorrunde) berechnen kann?

Lösung:

Der Dreischritt der Überlegungen zum Aufbau des Zahlterms verläuft analog zu denen bei der Teilaufgabe c).

Bei 5 Mannschaften sind es $(5 \cdot 5 - 5) : 2 = 10$ Spiele.

Bei 6 Mannschaften sind es $(6 \cdot 6 - 6) : 2 = 15$ Spiele.

Bei 18 Mannschaften sind es $(18 \cdot 18 - 18) : 2 = 153$ Spiele.

Gänse und Schafe:

Auf einer Wiese sind Gänse und Schafe. Es sind insgesamt 30 Köpfe und 94 Beine. Wie viele Gänse und wie viele Schafe sind es?

Gänse und Schafe – Lösung:

Hier ist an eine Lösung durch „geschicktes“ (gemeint ist: systematisches) Probieren gedacht, nicht an eine Lösung mithilfe eines linearen Gleichungssystems (LGS).

1. Versuch: Wären es ausschließlich Schafe, also 30, kämen $30 \cdot 4 = 120$ Beine zusammen. Das sind zu viele Beine. Also sind es weniger Schafe.

2. Versuch: Wären es 15 Schafe und 15 Gänse, kämen $15 \cdot 4 + 15 \cdot 2 = 90$ Beine zusammen. Das sind zu wenige Beine. Also sind es mehr Schafe.

3. Versuch: ...

Ein fortgeschrittener Gedanke wäre: „Ersetzt“ man ein Schaf durch eine Gans (die Gesamtzahl der Tiere bleibt also gleich), erhält man zwei Beine weniger. So kann man sich von einem Versuch zur Lösung „vorwärtsarbeiten“.

Es sind 17 Schafe und 13 Gänse. Das sind 30 Tiere (Köpfe) und $17 \cdot 4 + 13 \cdot 2 = 94$ Beine.

G ... Anzahl der Gänse S ... Anzahl der Schafe

$$\text{LGS: } G + S = 30 \quad \wedge \quad 2 \cdot G + 4 \cdot S = 94 \quad \Leftrightarrow \quad G = 13 \quad \wedge \quad S = 17$$

Gänse und Schafe – Kommentar:

Das *systematische* – im Gegensatz zum planlosen – *Probieren* ist eine ganz wichtige **Strategie**.

Gewicht 1:

Mert sagt: „Ich wiege 28 kg und die Hälfte meines Gewichts.“ Wie viel wiegt Mert?

Gewicht 1 – Lösung:

Der fehlende Teil ist wieder eine Hälfte, also sind 28 kg die Hälfte des Gewichts von Mert. Mert wiegt also $2 \cdot 28 \text{ kg} = 56 \text{ kg}$.

Gewicht 1 – Kommentar:

Eine kleine Skizze (**Strategie!**) kann helfen.

Gewicht 2:

Daniel sagt: „Ich wiege 28 kg und ein Drittel meines Gewichts.“ Wie viel wiegt Daniel?

Gewicht 2 – Lösung:

Der fehlende Teil zu einem Drittel sind zwei Drittel, also sind 28 kg zwei Drittel des Gewichts von Daniel. Ein Drittel wären dann 14 kg. Daniel wiegt also $3 \cdot 14 \text{ kg} = 42 \text{ kg}$.
 Probe: Ein Drittel von 42 kg sind 14 kg, $28 \text{ kg} + 14 \text{ kg} = 42 \text{ kg}$.

Gewicht 2 – Kommentar:

Eine kleine Skizze (**Strategie!**) kann helfen.

Man kann auch *systematisch probieren* (**Strategie!**):

- Angenommen Daniel wiegt 60 kg. Ein Drittel davon sind 20 kg. $20 \text{ kg} + 28 \text{ kg} = 48 \text{ kg}$, das passt nicht.
 - Angenommen Daniel wiegt 45 kg. Ein Drittel davon sind 15 kg. $15 \text{ kg} + 28 \text{ kg} = 43 \text{ kg}$, das passt nicht.
- Jetzt ist die Lösung nahe.
- Angenommen Daniel wiegt 42 kg. Ein Drittel davon sind 14 kg. $14 \text{ kg} + 28 \text{ kg} = 42 \text{ kg}$, das passt.

Grabung:

Wenn Ingmar 1 Tag braucht, um ein Loch auszugraben, das 1 Meter lang, 1 Meter breit und 1 Meter tief ist, wie viele Tage braucht er dann für ein Loch, das 3 Meter lang, 3 Meter breit und 3 Meter tief ist?

Grabung – Lösung:

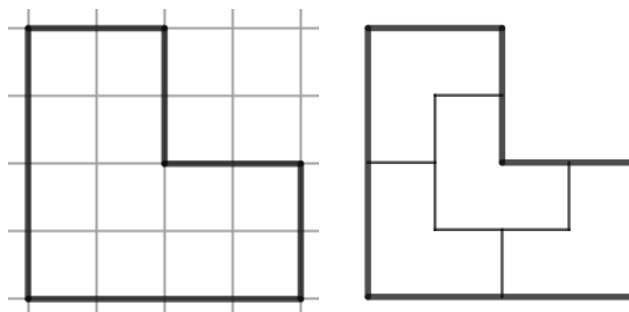
Nicht 3 Tage, sondern 27 Tage, wenn man hier von einer Proportionalität (1 m^3 pro Tag) ausgeht.

Grundstücke 1:

Ein hakenförmiges Grundstück – vgl. linke Abbildung – soll in vier deckungsgleiche Teile (gleiche Größe und gleiche Form) aufgeteilt werden.

Grundstücke 1 – Lösung:

Rechte Abbildung – ohne unterlegtes Karogitter

**Grundstücke 1 – Kommentar:**

Stellt man die Aufgabe ohne unterlegtes Karogitter (dafür mit den Angaben „nur rechte Winkel, die kürzeren Strecken sind alle gleich lang.“), fällt das Auffinden der Lösung erfahrungsgemäß deutlich schwerer.

Für beide Fälle gilt:

Wenn man sich einmal von der Hoffnung verabschiedet hat, dass man mit der Rechteckform hinkommt, liegt die Lösung „nahe“.

Mit Blick auf das Karogitter kann eine strukturelle Überlegung helfen (**Strategie: Kann ich irgendetwas über die einzelnen Stücke sagen?**):

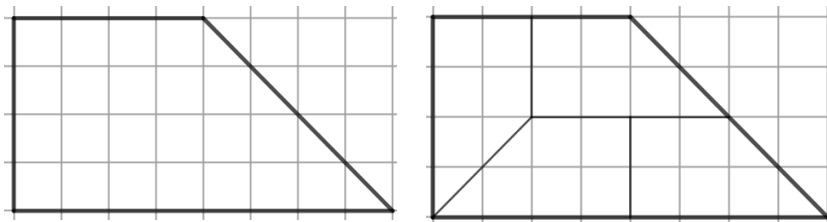
Insgesamt sind es 12 Karos, also muss jedes der vier Flächenstücke 3 Karos beinhalten. Wenn man keine Karos zerschneidet, gibt es nur zwei Möglichkeiten, das Rechteck und der „Haken“.

Grundstücke 2:

Ein trapezförmiges Grundstück – vgl. linke Abbildung – soll in vier deckungsgleiche Trapeze aufgeteilt werden.

Grundstücke 2 – Lösung:

Rechte Abbildung

**Grundstücke 2 – Kommentar:**

Stellt man die Aufgabe ohne die Angabe der Art der vier deckungsgleichen Stücke („Trapeze“), wird es wesentlich schwieriger. Man wird dann wohl zunächst mit Dreiecken experimentieren, was aber nicht zum Ziel führt.

Mit Blick auf das Karogitter kann auch hier eine strukturelle Überlegung helfen (**Strategie:** *Kann ich irgendetwas über die einzelnen Stücke sagen?*):

Insgesamt sind es 24 Karos, also muss jedes der vier Trapeze 6 Karos beinhalten.

Man kann auch sogar die Trapezform vorgeben, es bleibt immerhin noch die Frage nach der Lage der vier Trapeze.

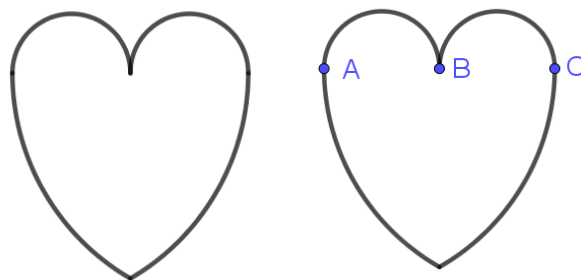
Herz:

Linke Abbildung: Wie wurde das „Herz“ gezeichnet?

Herz – Lösung:

Rechte Abbildung:

- Halbkreis um den Mittelpunkt der Strecke AB
- Halbkreis um den Mittelpunkt der Strecke BC
- Sechstel-Kreis um A mit dem Radius AC
- Sechstel-Kreis um C mit dem Radius AC

**Kamele:**

Ein alter Araber bestimmt vor seinem Tode, dass der erste Sohn die Hälfte, der zweite Sohn den dritten und der dritte Sohn den neunten Teil seiner Kamele erhalten soll. Da er 17 Kamele hinterließ, konnten sich die Söhne nicht einigen. Ein Derwisch, der mit einem alten Kamel vorbeikam, half ihnen und sagte: „Ich will euch mein Kamel leihen.“ Nun nahm jeder der Söhne von den 18 Kamelen seinen Teil, der erste Sohn 9 Kamele, der zweite Sohn 6 Kamele und der dritte Sohn 2 Kamele.

Damit waren 17 der 18 Kamele verteilt und der Derwisch zog mit seinem übrig gebliebenen Kamel weiter. Hier stimmt doch etwas nicht! Aber was?

Kamele – Lösung:

Die drei Teile, die der alte Araber seinen Söhnen bestimmt hat, geben zusammen kein Ganzes.

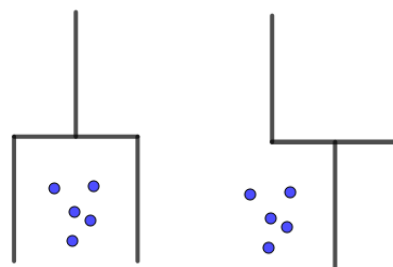
Es ist nämlich $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$. Damit bleibt beim Verteilen natürlich etwas übrig.

Kehrschaufel:

Vier Hölzer stellen eine Kehrschaufel dar. In der Schaufel liegt etwas Dreck – vgl. linke Abbildung. Lege zwei Hölzer so um, dass der Dreck außerhalb der Schaufel liegt.

Kehrschaufel – Lösung:

rechte Abbildung

**Kinder:**

Franjo und Gudrun sind zusammen 83 Jahre alt, Franjo ist 43 Jahre, Gudrun ist 40 Jahre alt. Ihre fünf Kinder sind zusammen 50 Jahre alt: Almut ist 3, Bert ist 7, Christine ist 11, Dora ist 13 und Emma ist 16 Jahre alt. In wie viel Jahren sind die Kinder zusammen genau so alt wie die Eltern zusammen?

Kinder – Lösung:

Das wird in 11 Jahren der Fall sein.

Zunächst ist vielleicht gar nicht klar, ob das irgendwann der Fall sein wird, denn die Kinder werden älter, die Eltern aber auch!

Ein erster Versuch mit z.B. „in 5 Jahren“ zeigt immerhin schon einmal, dass mit der Zeit der Abstand „schmilzt“:

Franjo: 48 Jahre, Gudrun 45 Jahre, zusammen 93 Jahre,

Almut 8, Bert 12, Christine 16, Dora 18 und Emma 21 Jahre, zusammen 75 Jahre.

Ein zweiter Versuch mit z.B. „in 10 Jahren“ zeigt dann, dass man sich schon in der Nähe der Lösung befinden muss.

Hier ist an die **Strategie** und Lösung durch „geschicktes“ (gemeint ist: systematisches) *Probieren* gedacht, nicht an eine Lösung mithilfe eines linearen Gleichungssystems (LGS).

A, B, C, D, E, F, G ... Alter von Almut, Bert, Christine, Dora, Emma, Franjo und Gudrun

J ... gesuchte Anzahl der Jahre

LGS: $A + B + C + D + E = 50$ $F + G = 83$ $A + B + C + D + E + 5 \cdot J = F + G + 2 \cdot J$ führt zu $J = 11$

Kinder – Differenzierung:

Die einzelnen Altersangaben der sieben Personen sind für das Probieren hilfreich, grundsätzlich aber überflüssig. Stellt man die Aufgabe ohne die einzelnen Altersangaben, wird sie deutlich abstrakter und damit schwieriger. Auch hier kann man *systematisch probieren*.

Zu einer analytischen Lösung führt die folgende Überlegung:

Pro Jahr werden die beiden Eltern zusammen 2 Jahre älter, die 5 Kinder zusammen aber 5 Jahre älter.

Pro Jahr verringert sich der Abstand also um 3 Jahre. Ein Abstand der beiden Summen von anfänglich 33 Jahren ist also in $33 : 3 = 11$ Jahren ausgeglichen.

Knöpfe:

In einer Familie sind sieben Söhne. Jeder Sohn hat sieben Hemden. Jedes Hemd hat sieben Knöpfe. Wie viele Knöpfe sind es insgesamt?

Knöpfe – Lösung:

Es sind $7 \cdot 7 \cdot 7$ Knöpfe = 343 Knöpfe.

Knöpfe – Kommentar:

Dahinter steckt die so genannte *Produktregel der Kombinatorik* (nicht addieren!).

Konfetti:

Konrad hat ein farbiges Stück Papier und produziert Konfetti mit seinem Locher.

Konstanze sagt: „Das ist aber mühsam.“

Konrad sagt: „Ich habe das farbiges Papier dreimal gefaltet. So erhalte ich die dreifache Menge.“

Konstanze sagt: „Nein, das Papier liegt doch dann immer doppelt. Es ist also die sechsfache Menge.“

Wer hat Recht?

Konfetti – Lösung:

Beide haben nicht Recht. Faltet man ein Papier dreimal, so erhält man acht Lagen übereinander. Man erhält also die achtfache Menge bei jedem Lochvorgang.

Körper: (Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)

- Ein geometrischer Körper hat acht Ecken und zwölf Kanten. Welcher könnte es sein?
- Ein geometrischer Körper hat fünf Ecken und acht Kanten. Welcher könnte es sein?
- Ein Rechteck rotiert schnell um eine seiner Seiten. Welcher Körper „entsteht“?

Körper – Lösung:

- Es könnte ein Quader sein.
- Es könnte eine quadratische Pyramide sein.
- Es „entsteht“ ein Zylinder.

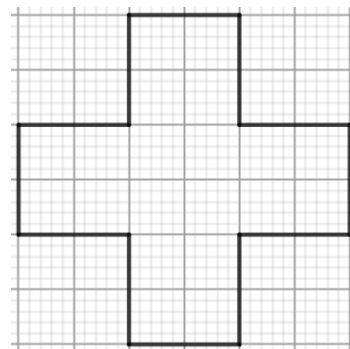
Körper – Kommentar:

Zu a) und b) Das kann man mit Prismen variieren.

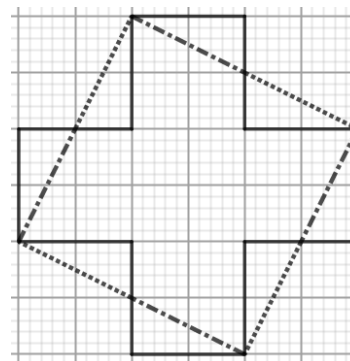
Zu c) Das kann man mit rechtwinkligen Dreiecken variieren.

Kreuz:

Schneide von dem Kreuz (linke Abbildung) vier gleiche Dreiecke ab und setze sie an anderer Stelle wieder so ein, so dass sich ein Quadrat ergibt.

**Kreuz – Lösung:**

Rechte Abbildung: schneide rechtwinklige Dreiecke ab (Schnittlinie: Strich-Punkt), diese passen genau in die „Einbuchtungen“. Die Schnittlinie ist jetzt Teil des Quadrat-Randes (gepunktete Linie).



Kreuz – Differenzierung:

Schwierigere Aufgabenstellung: Schneide von dem Kreuz vier gleiche Teile ab und setze sie an anderer Stelle wieder so ein, so dass sich ein Quadrat ergibt.

Noch schwieriger: Schneide von dem Kreuz vier Teile ab und setze sie an anderer Stelle wieder so ein, so dass sich ein Quadrat ergibt.

Ganz schwierig: Zerschneide das Kreuz mit vier geraden Schnitten in fünf Teile und setze diese zu einem Quadrat zusammen.

Magische Quadrate 1:

Bei einem magischen 3x3-Quadrat sind die Ziffern 1; 2; 3; ...; 9 so in die neun Felder einer 3x3-Matrix einzutragen, dass die Summe der drei Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch entlang der beiden Diagonalen immer dieselbe ist, wir nennen sie die *magische Summe*.

Die magische Summe bei einem magischen 3x3-Quadrat kann man so bestimmen:

$1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45$, zur Bestimmung der magischen Summe ist 45 also gleichmäßig auf drei Zeilen zu verteilen. Die magische Summe ist also $45 : 3 = 15$.

a) Linke Abbildung: Finde die restlichen Eintragungen des zugehörigen magischen 3x3-Quadrates.

b) Bestätige, dass sich tatsächlich ein magisches Quadrat ergeben hat.

Bemerkung: Es handelt sich hierbei um das so genannte Lo-Shu-Quadrat, das älteste bekannte magische Quadrat (2800 v. Chr., China).

	9		4	9	2
	5		3	5	7
8			8	1	6

Magische Quadrate 1 – Lösung:

a) Rechte Abbildung – ergänze Stück für Stück waagrecht, senkrecht oder diagonal zur magischen Summe 15 (**Strategie:** Vorwärtsarbeiten).

b) Zunächst ist zu bestätigen, dass tatsächlich die Ziffern von 1 bis 9 je einmal verwendet wurden.

Man kann dabei z.B. so verfahren, dass man von 1 bis 9 hochzählt und dann im magischen Quadrat die betreffende Ziffer einkringelt.

Schließlich ist zu bestätigen, dass sich bei allen Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen jeweils 15 ergibt. Das gelingt durch einfaches Nachrechnen.

Magische Quadrate 1 – Kommentar:

Beim Ausfüllen werden zur Bestimmung der sechs fehlenden Werte sechs der insgesamt acht Zeilen-, Spalten- bzw. Diagonalsummen verwendet. Dass sich bei einmaliger Verwendung aller vorgesehenen Ziffern die magische Summe dann auch für die restlichen beiden Summen einstellt, ist zunächst „offen“, man kann dies entweder im Beispiel nachrechnen oder im Falle je einer übrigen Zeilen- und Spaltensumme grundsätzlich direkt erkennen:

Wenn die Summe von zwei Zeilen jeweils 15 ist, muss die Summe der dritten ebenfalls 15 sein.

Wenn die Summe von zwei Spalten jeweils 15 ist, muss die Summe der dritten ebenfalls 15 sein.

Interessant ist in diesem Zusammenhang der folgende Sachverhalt:

Kommen die Ziffern von 1 bis 9 je einmal vor und haben alle drei Zeilen und Spalten die magische Summe, so folgt daraus nicht zwingend, dass sich auch bei den beiden Diagonalen die magische Summe einstellen muss, vgl. das Beispiel in der Abbildung rechts.

(Wie ist dieses nicht-magische 3x3-Quadrat entstanden? Ausgehend vom Lo-Shu-Quadrat wurden die Spalten zyklisch vertauscht.)

2	4	9
7	3	5
6	8	1

Magische Quadrate 1 – Differenzierung:

Dass es überhaupt magische Quadrate gibt, ist eigentlich eher erstaunlich. Wenn man jedenfalls „auf gut Glück“ zu suchen beginnt, wird man sich schon bei den 3x3-Quadraten schwertun. Zum Ziel kommt man allerdings mit den folgenden drei aufeinander aufbauenden strukturellen Vorüberlegungen.

- Bei jedem magischen 3x3-Quadrat muss die Ziffer 5 in der Mitte stehen.

Beweis – mit den Bezeichnungen aus der Abbildung rechts:

1. Diagonale: $a + m + h = 15$ und 2. Diagonale: $c + m + f = 15$

2. Zeile: $d + m + e = 15$

Summe dieser drei Gleichungen: $a + d + f + c + e + h + 3 \cdot m = 45$ (*)

1. Spalte: $a + d + f = 15$ und 3. Spalte: $c + e + h = 15$

Durch Einsetzen in die Summengleichung (*) ergibt sich $m = 5$.

- Dass die Ziffer 9 (und damit natürlich auch die Ziffer 1) dann nicht in einer Ecke stehen kann, ergibt sich direkt durch Ausprobieren.
- Dass die Ziffer 8 (und damit natürlich auch die Ziffer 2) dann immer in einer Ecke stehen muss, ergibt sich auch direkt durch Ausprobieren.

a	b	c
d	m	e
f	g	h

Alle weiteren magischen 3x3-Quadrate ergeben sich damit durch Positionierung der 9 und der 8. Man erhält diese auch aus dem Lo-Shu-Quadrat durch Spiegelung oder Drehung. Im Wesentlichen gibt es also nur ein magisches 3x3-Quadrat.

Eine mögliche weitere Teilaufgabe lautet:

c) Bei magischen 3x3-Quadraten steht die Ziffer 5 immer in der Mitte, die Ziffer 8 immer in einer Ecke und die Ziffer 9 nie in einer Ecke. Findest du damit noch weitere magische 3x3-Quadrate?

In der Abbildung unten sind alle acht magischen 3x3-Quadrate abgebildet.

4	9	2	2	9	4	8	1	6	6	1	8
3	5	7	7	5	3	3	5	7	7	5	3
8	1	6	6	1	8	4	9	2	2	9	4

8	3	4	6	7	2	2	7	6	4	3	8
1	5	9	1	5	9	9	5	1	9	5	1
6	7	2	8	3	4	4	3	8	2	7	6

Magische Quadrate 2:

Bei einem magischen 4x4-Quadrat sind die Ziffern 1; 2; 3; ... ; 16 so in die 16 Felder einzutragen, dass die Summe der vier Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch entlang der beiden Diagonalen immer dieselbe ist, wir nennen sie die *magische Summe*.

Es ist $1 + 2 + 3 + \dots + 16 = 136$, zur Bestimmung der magischen Summe ist 136 also gleichmäßig auf vier Zeilen zu verteilen. Die magische Summe bei einem 4x4-Quadrat ist also $136 : 4 = 34$.

a) Linke Abbildung:

Finde die restlichen Eintragungen des zugehörigen magischen 4x4-Quadrates.

b) Bestätige, dass sich tatsächlich ein magisches Quadrat ergeben hat.

16			
	10	11	
9	6		
4	15		1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Magische Quadrate 2 – Lösung:

a) Rechte Abbildung – mithilfe der magischen Summe kann man sich ohne weitere Überlegungen Stück für Stück zur Lösung vorwärtsarbeiten.

b) Es ist zu prüfen:

Kommen alle Zahlen von 1 bis 16 je einmal vor (von 1 bis 16 hochzählen und einkringeln)?

Ergibt sich bei allen Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen jeweils 34 (nachrechnen, zumindest bei den „noch nicht verwendeten“ Spalten, Zeilen und Diagonalen)?

Magische Quadrate 2 – Differenzierung:

Die Schülerinnen und Schüler könnten die magische Summe auch selbst bestimmen.

Auch auf die Eintragung der Ziffer 9 kann man verzichten. Sie lässt sich erschließen. Die Aufgabe wird dann allerdings ein bisschen schwieriger.

Lösung hierzu: Mithilfe der magischen Summe 34 füllt man das 4x4-Quadrat so lange aus, bis in der linken und in der rechten Spalte in der Mitte noch zwei Eintragungen fehlen. Man hat dann noch die Zahlen 5; 8; 9 und 12 übrig. In der linken Spalte fehlen zur magischen Summe noch 14, das ist nur mit der 5 und 9 zu bewerkstelligen. Die 9 kann nicht oben stehen, weil in der 2. Zeile dann noch eine 4 nötig wäre, die ist aber schon eingetragen.

Magische Quadrate 2 – Kommentar:

Das oben abgebildete magische 4x4-Quadrat findet sich in Melencolia 1, einem berühmten Kupferstich von ALBRECHT DÜRER (1514).

Unterscheidet man magische 4x4-Quadrate, die durch Spiegelung und Drehung auseinander hervorgehen nicht, so gibt es immerhin 880 (!) Stück.

Magische Quadrate 3:

Bei einem magischen 5x5-Quadrat sind die Ziffern 1; 2; 3; ... ; 25 so in die 25 Felder einzutragen, dass die Summe der fünf Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch entlang der beiden Diagonalen immer dieselbe ist, wir nennen sie die *magische Summe*.

Es ist $1 + 2 + 3 + \dots + 25 = 325$, zur Bestimmung der magischen Summe ist 325 also gleichmäßig auf fünf Zeilen zu verteilen. Die magische Summe bei einem 5x5-Quadrat ist also $325 : 5 = 65$.

a) Linke Abbildung: Finde die restlichen Eintragungen des zugehörigen magischen 5x5-Quadrates.

b) Bestätige, dass sich tatsächlich ein magisches Quadrat ergeben hat.

11	24	7	20	
4			8	16
		13	21	9
	18	1	14	
		19		

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Magische Quadrate 3 – Lösung:

a) Rechte Abbildung – mithilfe der magischen Summe kann man sich ohne weitere Überlegungen Stück für Stück zur Lösung vorwärtsarbeiten.

b) Es ist zu prüfen:

Kommen alle Zahlen von 1 bis 25 je einmal vor (von 1 bis 25 hochzählen und einkringeln)?

Ergibt sich bei allen Zeilen-, Spalten- und Diagonalsummen jeweils 65 (nachrechnen, zumindest bei den „noch nicht verwendeten“ Spalten, Zeilen und Diagonalen)?

MiniMax:

Verwende jede der angegebenen Ziffern je einmal.

a) Bilde aus den Ziffern 1; 2; 3 und 4 zwei zweistellige Zahlen, deren Summe möglichst klein ist.

b) Bilde aus den Ziffern 1; 2; 3 und 4 zwei zweistellige Zahlen, deren Differenz möglichst nahe bei 0 ist.

c) Bilde aus den Ziffern 1; 2; 4 und 8 zwei zweistellige Zahlen, deren Quotient möglichst groß ist.

d) Bilde aus den Ziffern 1; 2; 3 und 4 zwei zweistellige Zahlen, deren Produkt möglichst groß ist.

MiniMax – Lösungen:

a) $14 + 23 = 13 + 24 = 37$... Die beiden kleinen Ziffern sind als Zehnerziffern zu verwenden.

b) $31 - 24 = 7$... Dass die Zehnerziffern Nachbarzahlen sein sollten, ist wohl bald klar. Dass es aber optimalerweise die 2 und die 3 sein sollten, erkennt man eventuell erst nach einigem Ausprobieren.

c) $84 : 12 = 7$... Der Dividend muss möglichst groß sein, der Divisor möglichst klein.

d) $41 \cdot 32 = 1312$... Dass die beiden großen Ziffern als Zehnerziffer verwendet werden sollten, ist wohl bald klar. Dass aber $41 \cdot 32 (=1312)$ größer ist als $42 \cdot 31 (=1302)$, ist doch eine ziemlich erstaunliche Erkenntnis.

MiniMax – Kommentar:

zu d) Entre nous:

Wir beschränken uns zunächst auf natürliche Zahlen mit einer Differenz von mehr als 1:

Ein Produkt „wird größer“, wenn man den größeren Faktor um 1 verringert und den kleineren Faktor um 1 vergrößert. Ggf. kann man diesen Prozess mehrfach anwenden und damit sagen, dass das Produkt größer wird, wenn man die beiden Zahlen „gleichermaßen aufeinander zubewegt“.

Mit $a - b > 1$ ist also: $(a - 1) \cdot (b + 1) > a \cdot b$ und zwar wegen $(a - 1) \cdot (b + 1) = a \cdot b + a - b - 1$.

Ganz allgemein gilt für $x > 0$:

$$(a - x) \cdot (b + x) = a \cdot b + a \cdot x - b \cdot x - x^2 > a \cdot b \Leftrightarrow a \cdot x - b \cdot x - x^2 > 0 \Leftrightarrow a > b + x.$$

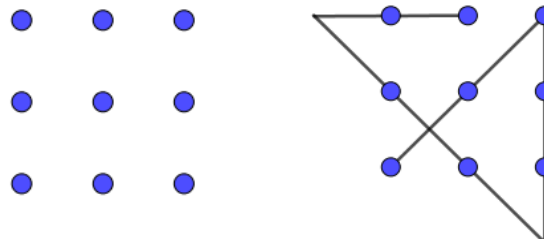
Geometrische Interpretation der Ungleichung

$(a - x) \cdot (b + x) > a \cdot b$ für positive a, b und x mit $a > b + x$:

Verkleinert man die größere Seite a und vergrößert die kleinere Seite b eines Rechtecks um denselben Betrag, so vergrößert sich sein Flächeninhalt. Man „bewegt“ sich damit zum Quadrat hin. Dies ist unter den Rechtecken mit gleichem Umfang (bei dieser Operation ist ja $a + b$ bzw. $2 \cdot a + 2 \cdot b$ konstant) bekanntermaßen das flächengrößte.

Neun Punkte: Neun Punkte – vgl. linke

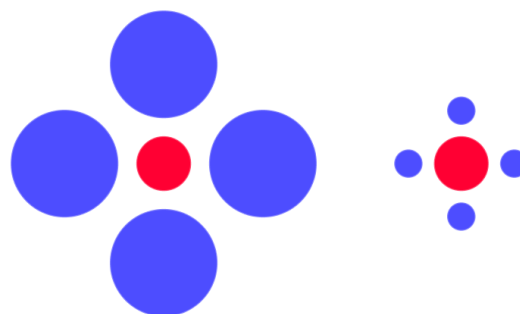
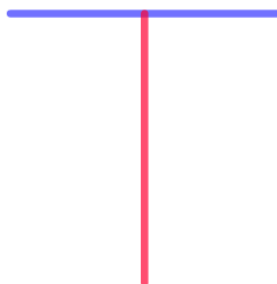
Abbildung – sollen mit einem zusammenhängenden, aus vier Teilen bestehenden Streckenzug verbunden werden. Kein Punkt darf zweimal von dem Streckenzug erfasst werden.

**Neun Punkte – Lösung:** rechte Abbildung

Neun Punkte – Kommentar: Man muss (!) über die Zeichnung (metaphorisch: über den Tellerrand!) hinausgehen.

Optische Täuschungen:

- a) Welche Strecke ist länger, die Strecke AB oder die Strecke BC?
- b) Welche Strecke ist länger, die rote (senkrecht) oder die blaue (waagrecht)?
- c) Welcher rote Kreis in der Mitte ist größer, der linke oder der rechte?

**Optische Täuschungen – Lösungen:**

- a) Die beiden Strecken sind gleich lang (nachmessen!). AB erscheint länger wegen der nach außen gerichteten Pfeilspitzen.
- b) Die beiden Strecken sind gleich lang (nachmessen!). Die waagerechte Strecke erscheint kürzer, weil Sie durch den Endpunkt der senkrechten Strecke geteilt wird.
- c) Die beiden Kreise in der Mitte sind gleich groß (nachmessen!). Der rechte Kreis erscheint größer, weil er von kleineren Kreisen umgeben ist.

Optische Täuschungen – Kommentar:

Schülerinnen und Schüler können über die Erklärungen, s.o., Vermutungen anstellen.

Im Internet findet sich eine Vielzahl von Beispielen für optische Täuschungen. Die Beschäftigung damit ist reizvoll, eröffnet aber auch den Weg zu einer tieferen Erkenntnis:

Nicht alles ist so, wie es auf den ersten Blick aussieht.

Für den Geometrieunterricht markiert diese Erkenntnis den Übergang von der propädeutischen in die deduktive Phase des Begründens und Beweisens.

Plus-Zeichen:

Setze zwischen die Ziffern der Zahl 987654321 Plus-Zeichen so, dass als Summe 99 entsteht.

Plus-Zeichen - Lösungen:

1. Lösung: $9 + 8 + 7 + 65 + 4 + 3 + 2 + 1 = 99$
2. Lösung: $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 43 + 21 = 99$

Plus-Zeichen - Kommentar:

Der Anfang muss $9 + 8 + 7$ lauten, sonst kommt man zwangsläufig über die 99 hinaus.

Als **Tipp** für die erste Lösung könnte man abgeben: Verwende sieben Plus-Zeichen, bei den Summanden ist also eine zweistellige Zahl dabei.

Als **Tipp** für die zweite Lösung könnte man abgeben: Verwende sechs Plus-Zeichen, bei den Summanden sind also zwei zweistellige Zahlen dabei.

Plus-Zeichen - Varianten:

Es gibt beliebig viele Varianten zu dieser Aufgabe, z.B.: Setze zwischen die Ziffern der Zahl 88.888.888 Plus-Zeichen so, dass als Summe 1000 entsteht (Lösung: $888 + 88 + 8 + 8 + 8$).

Vielleicht können Sie bzw. dann auch Ihre Schülerinnen und Schüler (SuS) selbst solche Aufgaben erfinden. Das ist nicht so schwer, wie es vielleicht scheint, denn Sie bestimmen die Regeln ☺ - welche Ziffern und wie viele, welche Zeichen, welches Ergebnis.

Weitere Beispiele:

- Setze zwischen die Ziffern der Zahl 5.555.555.555 Plus- oder Minus-Zeichen so, dass als Ergebnis 1000 entsteht (Lösung: $555 + 555 - 55 - 55$). Möglicher **Tipp**: ein Plus-, zwei Minuszeichen.
- Setze zwischen die Ziffern der Zahl 44.444.444 Plus- oder Mal-Zeichen so, dass als Ergebnis 100 entsteht (Lösung: $4 \cdot 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 4$). Möglicher **Tipp**: drei Plus-, vier Minuszeichen.
- Mit den Zeichen $+$ $-$ $*$ $:$: $222 = 6$ $333 = 6$ $555 = 6$ $666 = 6$ $777 = 6$
(Lösungen: $2 + 2 + 2 = 6$; $3 \cdot 3 - 3 = 6$; $5 + 5 : 5 = 6$; $6 + 6 - 6 = 6$; $7 - 7 : 7 = 6$)

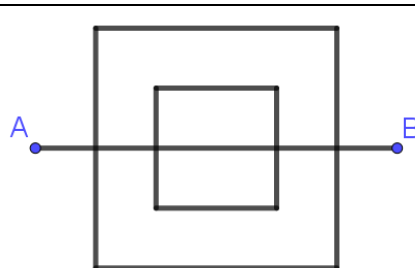
Postbote:

Der Postbote möchte seinen Bezirk (vgl. Abbildung) von A nach B in einem Zug durchlaufen und keine Strecke zweimal begehen.

Postbote – Lösung:

Hier wird jeweils beschrieben, wie der Postbote sich z. B. der Reihe nach an Kreuzungen entscheidet, es gibt mehrere Lösungen:

links / rechts / rechts / links / rechts / links / links / rechts

**Primzahlen:**

Von dem Hobby-Mathematiker CHRISTIAN GOLDBACH (1690 – 1764) stammt die Vermutung:

Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.

Bis heute weiß man nicht, ob diese Vermutung zutrifft. Gesichert ist sie mit Computerhilfe jedenfalls für die Zahlen bis $4 \cdot 10^{18}$.

a) Schreibe alle geraden Zahlen zwischen 30 und 50 als Summe zweier Primzahlen.

b) Schreibe 44 auf alle möglichen Arten als Summe zweier Primzahlen.

Primzahlen – Lösungen:

a) z.B. $30 = 11 + 19$ $32 = 3 + 29$ $34 = 11 + 23$ $36 = 17 + 19$

$38 = 7 + 31$ $40 = 3 + 37$ $42 = 5 + 37$ $44 = 13 + 31$

$46 = 17 + 29$ $48 = 11 + 37$ $50 = 19 + 31$

b) $3 + 41$; $7 + 37$; $13 + 31$

Primzahlen – Kommentar:

a) Die SuS sollten aus der Klasse 5 den Primzahlbegriff und die Primzahlen bis 40 kennen.

Man kann den Begriff wiederholen und die Liste zunächst aufschreiben lassen:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 39; 41; ...

b) **Strategie:** alle Möglichkeiten mit System durchgehen, das heißt hier, die Primzahlreihe einfach der Reihe nach durchgehen und prüfen, ob der ergänzende Summand wieder eine Primzahl ist.

Primzahlen – noch ein Kommentar:

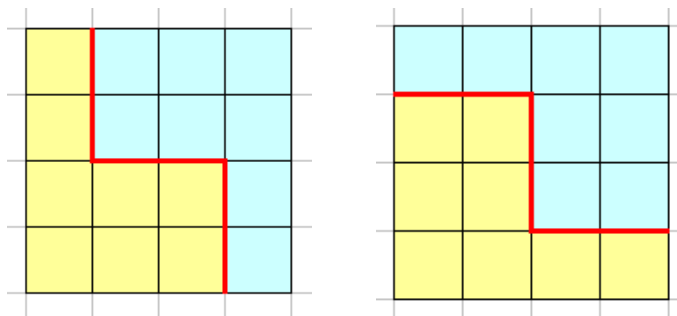
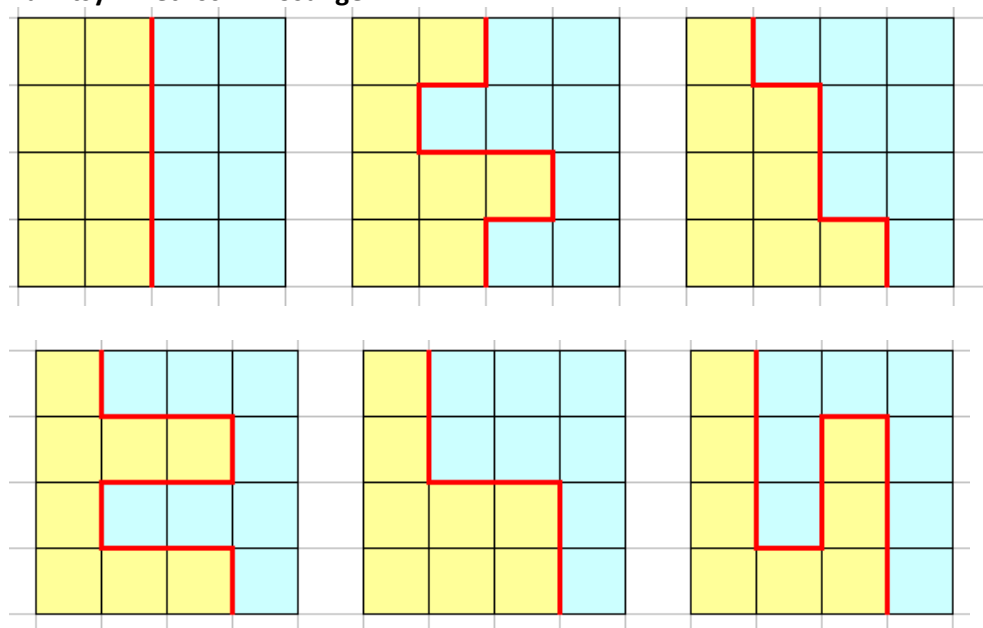
Wie sieht es mit den ungeraden Zahlen aus?

Der russische Mathematiker WINOGRADOW bewies 1937 den Satz:

Jede ungerade Zahl, die größer als 5 ist, kann als Summe dreier Primzahlen geschrieben werden.

Punktsymmetrisch:

Teile das Quadrat durch einen Streckenzug entlang der Gitterlinien in zwei Teile auf, die zum Mittelpunkt des Quadrates punktsymmetrisch sind. Färbe die beiden Teile unterschiedlich. Lösungen, die deckungsgleich sind (gleiche Form und Größe haben), sollen als gleich gelten – vgl. die beiden gezeigten Beispiele.

**Punktsymmetrisch – Lösungen:****Punktsymmetrisch – Differenzierung:**

Dies ist eine selbstdifferenzierende Knobelaufgabe. Jede(r) kann auf seinem eigenen Niveau ein Erfolgserlebnis erreichen – zum Zeichnen wird man sinnvollerweise das Arbeitsblatt mit vorgegebenen 4x4-Quadraten nutzen:

- eine Lösung finden
- mehrere Lösungen finden
- alle sechs Lösungen finden
- begründen, dass man alle gefunden hat.

Beim Probieren kann man erkennen, dass der teilende Streckenzug punktsymmetrisch zur Quadratmitte sein muss (das ist ein möglicher **Tipp** bzw. eine mögliche Vorgabe). Die Frage ist also: Wie kommt man also zur Quadratmitte, ohne den Rand oder den bisherigen Streckenzug zu berühren?

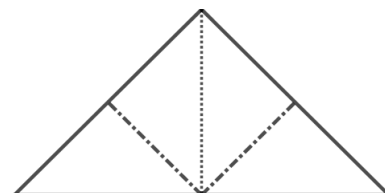
Ein darauf aufbauendes systematisches Vorgehen hängt jetzt nur noch vom Startpunkt ab. Hierfür gibt es zwei Möglichkeiten: eine Seitenmitte oder eine Mitte zwischen Seitenmitte und benachbartem Eckpunkt.

Quadrate:

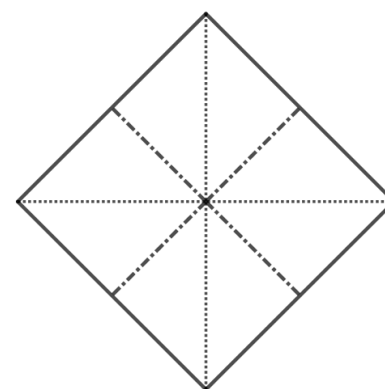
- a) Aus einem Papier in der Form eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks soll durch einen einzigen geraden Schnitt ein Quadrat des halben Flächeninhalts ausgeschnitten werden. Man darf das Papier vor dem Schnitt einmal falten.
- b) Ein quadratisches Stück Papier soll durch einen geraden Schnitt in vier gleich große Quadrate zerlegt werden. Man darf das Papier vor dem Schnitt zweimal falten.

Quadrate – Lösungen:

- a) Abbildung rechts: Das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck wird entlang seiner Symmetrieachse gefaltet. Das wiederum rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck wird entlang seiner Symmetrieachse geschnitten. Es ergeben sich ein Quadrat und zwei halbe Quadrate. (gepunktet ... Faltlinie; Strich-Punkt ... Schnitlinie)



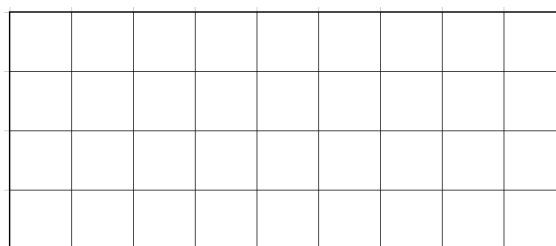
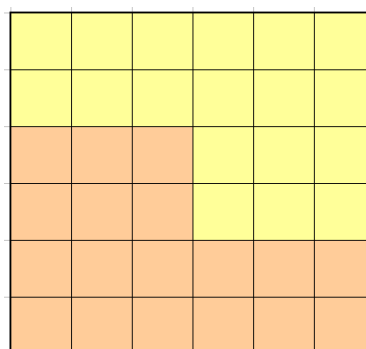
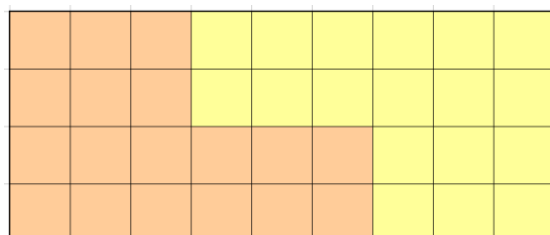
- b) Abbildung rechts: Das Quadrat wird entlang einer Diagonale gefaltet. Das entstandene rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck wird entlang seiner Symmetrieachse gefaltet. Das wiederum rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck wird entlang seiner Symmetrieachse geschnitten. Es ergeben sich vier gleich große Quadrate. (gepunktet ... Faltlinie; Strich-Punkt ... Schnitlinie)

**Quadrate – Kommentar:**

Die Aufgabe a) ist der „Steigbügelhalter“ für die Aufgabe b), deren Ergebnis schon erstaunlich ist.

Rechteck:

Das Rechteck – vgl. Abbildung rechts – soll entlang der Gitterlinien so in zwei deckungsgleiche Teile auseinandergeschnitten werden, dass diese beiden Teile zu einem Quadrat zusammengesetzt werden können.

**Rechteck – Lösung:**

Rechteck – Kommentar:

Diese Knobelaufgabe sieht vielleicht einfach aus, ist es aber nicht.

Die 36 Karos des Ausgangsrechtecks führen zu einem 6x6-Quadrat (**Strategie:** Sammle Informationen, die aus der Aufgabenstellung gefolgert werden können). Dies könnte ein Fingerzeig dafür sein, den Schnitt bei der unteren Seite des Rechtecks von links aus gesehen nach 6 Karos zu beginnen und wegen der Deckungsgleichheit der beiden Teile in der oberen Zeile von links aus gesehen nach 3 Karos zu beenden.

Rechteck – Differenzierung:

Die Formulierung der Aufgabe oben wählt einen mittleren Schwierigkeitsgrad. Lässt man die Informationen „entlang der Gitterlinien“ und „zwei deckungsgleiche Teile“ weg, wird es schwieriger. Fügt man noch Informationen über den Schnittverlauf hinzu, z.B. „Der Schnitt verläuft entlang von drei Strecken, die erste ist senkrecht zur zweiten, die zweite ist senkrecht zur dritten.“, wird es einfacher.

Richtig oder falsch? (Begründung oder Gegenbeispiel)

- a) Immer wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich lang sind, dann hat es einen rechten Winkel.
- b) Immer wenn ein Viereck vier rechte Winkel hat, dann ist es ein Quadrat.
- c) Bei jedem Rechteck halbieren die Diagonalen die Eckwinkel.
- d) Es gibt kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln.
- e) Für zwei natürliche Zahlen a und b ist a^b immer dasselbe wie b^a .

Richtig oder falsch? – Lösungen:

- a) offensichtlich falsch – geeignete Zeichnung
- b) falsch; es könnte auch ein Rechteck mit unterschiedlichen Seitenlängen sein.
- c) falsch; man denke sich ein sehr langes und wenig breites Rechteck.
- d) richtig; die beiden freien Schenkel wäre dann ja parallel, sie würden sich nicht in einem Dreieckspunkt schneiden.
- e) falsch; Gegenbeispiel $3^2 = 9$ ist nicht $2^3 = 8$.

Richtig oder falsch? – Kommentar:

Das ist ein beliebtes Format zur Durchdringung von Sachverhalten und auf viele Themen anwendbar.

Rollende Körper:

Ein Körper liegt auf einer Ebene und wird angestoßen.

- a) Er rollt gerade aus.
- b) Er rollt im Kreis.

Um welchen Körper könnte es sich handeln?

Rollende Körper – Lösungen:

- a) ein Zylinder, eine Kugel
- b) ein Kegel, ein Kegelstumpf

Römische Zahlzeichen:

Rechnungen mit römische Zahlzeichen kann man z.B. mit Streichhölzern „legen“ – jeder Strich in den Zeichen +, -, = oder I, V, X mit einem Holz.

Welches Holz muss man umlegen, damit die Rechnung stimmt?

a)

$$XI - II = XII$$

b)

$$X + IV = V$$

c)

$$X + V - II = VII$$

d)

$$VI + VIII = XII$$

e)

$$XII - II = XV + VI$$

f)

$$X - II = XV + VI$$

Römische Zahlzeichen – Lösungen:

a)

$$X + II = XII$$

b)

$$X - IV = VI$$

c)

$$X - V + II = VII$$

d) (mehrere Möglichkeiten)

$$IV + VIII = XII$$

e) (mehrere Möglichkeiten)

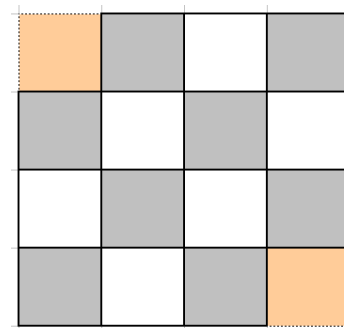
$$XII - III = XV - VI$$

f)

$$VI + IV = X$$

Schachbrett:

Aus einem kleinen 4x4-Schachbrett mit 16 Feldern sind das linke obere und das rechte untere Eck-Feld herausgesägt (vgl. Abbildung). Wie kann man dieses mit rechteckigen Dominosteinen (diese decken immer zwei benachbarte Felder ab) lückenlos und ohne Überhang abdecken?

**Schachbrett – Lösung:**

Nein, das geht nicht. Ein Dominostein deckt immer gleichzeitig ein weißes und ein graues Feld ab. Es gibt bei unserem ausgesägten Schachbrett aber acht graue und nur sechs weiße Felder.

Schachbrett – Kommentar:

Strategie: Einen Sachverhalt beim Ausprobieren erkennen.

Hier: es bleiben für den siebten Dominostein immer zwei schwarze Felder übrig.

Schachbrett – Differenzierung:

Die Lehrkraft kann einen **Tipp** abgeben oder die Aufgabe gleich zu Beginn so stellen:

... Kann man dieses mit rechteckigen Dominosteinen (diese decken immer *ein weißes und ein schwarzes Feld* ab) lückenlos und ohne Überhang abdecken?

Schaltjahre:

In einem Jahr dreht sich die Erde einmal um die Sonne. Diese Zeitdauer beträgt nicht genau 365 Tage, sondern etwas mehr, nämlich 365 Tage, 5 Stunden und etwa 48 Minuten. Deshalb wird alle 4 Jahre – nämlich wenn die Jahreszahl durch 4 teilbar ist – mit dem 29. Februar ein sogenannter Schalttag eingeschoben. Weil es nicht genau 6 Stunden mehr als 365 Tage sind, sondern nur 5 Stunden und etwa 48 Minuten, fällt das Schaltjahr manchmal aus, und zwar dann, wenn die Jahreszahl durch 100 teilbar ist. Um den Kalender noch genauer an die Umlaufdauer der Erde um die Sonne anzupassen, fällt das Schaltjahr doch nicht aus (!), wenn die Jahreszahl nicht nur durch 100, sondern auch durch 400 teilbar ist.

Welche Jahre sind Schaltjahre?

- a) 2019 b) 1984 c) 1762 d) 1900 e) 2000 f) 2200 g) 2400

Schaltjahre – Lösungen:

- a) 2019 – ist als ungerade Zahl nicht durch 4 teilbar, also kein Schaltjahr
 b) 1984 – ist durch 4 teilbar, da 84 durch 4 teilbar ist, also ein Schaltjahr
 c) 1762 – ist nicht durch 4 teilbar, da 62 nicht durch 4 teilbar ist, also kein Schaltjahr
 d) 1900 – ist durch 100, aber nicht durch 400 teilbar, also kein Schaltjahr (Ausnahme!)
 e) 2000 – ist durch 100 und durch 400 teilbar, also ein Schaltjahr (Ausnahme der Ausnahme!)
 f) 2200 – ist durch 100, aber nicht durch 400 teilbar, also kein Schaltjahr (Ausnahme!)
 g) 2400 – ist durch 100 und durch 400 teilbar, also ein Schaltjahr (Ausnahme der Ausnahme!)

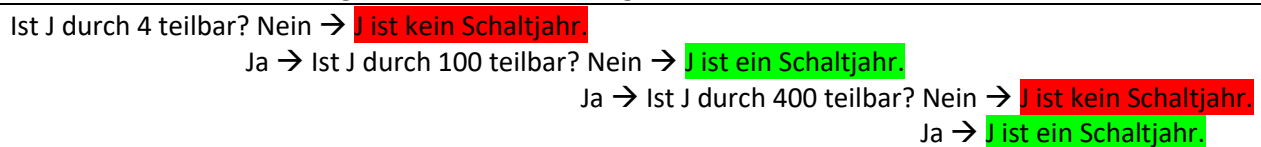
Schaltjahre – Kommentar:

Die Lösungen sind mit Hilfe des Begriffs „Ausnahme“ vermittelnd formuliert. Formal korrekt lautet die Schaltjahr-Bedingung wie folgt.

Ein Jahr J ist genau dann ein Schaltjahr, wenn gilt:

J ist durch 4, aber nicht durch 100 teilbar oder J ist durch 400 teilbar.

Der Sachverhalt lässt sich algorithmisch als Flussdiagramm darstellen:

**Schätzfragen:**

Wie viel wiegt das?

- a) Ein DIN-A4-Blatt normales Papier (= 80 g/m²)
 b) Das Schulbuch Lambacher Schweizer 6 (Klett 2016)
 c) Ein Päckchen Papiertaschentücher (10 Stück, normale Größe)
 d) Eine 2 € Münze
 e) Eine DVD

Schätzfragen – Lösungen:

- a) 5 g
 b) 616 g
 c) 26 g
 d) 8,5 g
 e) 15 g

Schätzfragen – Kommentar:

Schätzfragen eignen sich als Wettspiel zum Stundenabschluss: wer am besten geschätzt hat, bekommt einen (kleinen) Preis.

Weitere Anregungen:

- Welchen Flächeninhalt hat die Tafel?
- Wie hoch ist das Klassenzimmer?
- Wie hoch ist der Tisch? usw. (Ein Zollstock gehört sowieso zur Grundausrüstung jeder Mathematiklehrkraft ☺.)
- Wie viel Liter Wasser passen in einen (Erwachsenen-)Fußball?
Dieser soll laut FIFA einen Umfang zwischen 68,5 cm und 70 cm haben. Rechnet man wegen der Materialdicke mit einem Umfang von 68 cm, so kommt man auf ein Volumen von etwa 5,3 Liter (!).

Schöne Ergebnisse:

Es ist $12.345.679 \cdot 9 = 111.111.111$ (ausrechnen lassen – das ist eine schöne Überraschung ☺).

Mit welcher Multiplikationsaufgabe erhält man als Ergebnis 222.222.222 und 333.333.333 und 444.444.444 usw.?

Schöne Ergebnisse – Lösungen:

$$\begin{aligned}
 12.345.679 \cdot 9 \cdot 2 &= 12.345.679 \cdot 18 \\
 &= 111.111.111 \cdot 2 = 222.222.222 \\
 12.345.679 \cdot 9 \cdot 3 &= 12.345.679 \cdot 27 \\
 &= 111.111.111 \cdot 3 = 333.333.333 \\
 12.345.679 \cdot 9 \cdot 4 &= 12.345.679 \cdot 36 \\
 &= 111.111.111 \cdot 4 = 444.444.444 \text{ usw.}
 \end{aligned}$$

Schulfest:

Du sollst für ein Gewinnspiel beim Schulfest 100 Preise für insgesamt 20 € einkaufen.

Einige Hauptgewinne: Schokoladentafeln für 1,00 €, ein paar zweite Preise: Erdnussbeutel für 0,50 € und viele Trostpreise: kleine Gummibärchentüten für 0,10 €.

Beachte dabei:

- Die Anzahl der Gummibärchentüten muss ein Vielfaches von 5 sein.
- Die Anzahl der Gummibärchentüten muss größer als 75 sein.

a) Findest du eine Möglichkeit für den Einkauf – für genau 100 Preise genau 20,00 € ausgeben?

b) Findest du noch eine weitere Möglichkeit?

c) Begründe, warum die Anzahl der Gummibärchentüten ein Vielfaches von 5 sein muss.

d) Begründe, warum die Anzahl der Gummibärchentüten größer als 75 sein muss.

Schulfest – Lösungen:

Anzahl der Gummibärchentüten G	Anzahl der Erdnussbeutel E	Anzahl der Schokoladentafeln S
75 → 7,50 €	25 → 12,50 €	0 → 0,00 €
80 → 8,00 €	16 → 8,00 €	4 → 4,00 €
85 → 8,50 €	7 → 3,50 €	8 → 8,00 €
90 → 9,00 €	-2 → -1,00 €	12 → 12,00 €

a) und b): Vgl. Tabelle. Die Kombination mit 75 Gummibärchentüten und 25 Erdnussbeuteln, aber ganz ohne Schokoladentafeln passt nicht so recht zum Aufgabentext.

- c) Die Anzahl der Gummibärchentüten muss ein Vielfaches von 5 sein, weil man sonst mit den beiden anderen Preisen 0,50 € und 1,00 € nicht genau auf 20,00 € kommen kann.
- d) Wählt man 75 Gummibärchentüten benötigt man 7,50 €. Man braucht noch 25 Preise. Kauft man 25 Erdnussbeutel, benötigt man 12,50 €. Dann hat man schon genau 20,00 € verbraucht und noch keine einzige Schokoladentafel. Davon sollten aber einige dabei sein. Kauft man statt einiger Erdnussbeutel die teureren Schokoladentafeln, kommt man nicht mit 20,00 € aus. Dasselbe gilt für 70 oder weniger Gummibärchentüten.

Formale Herleitung (entre nous):

Gesucht sind Zahlentripel (S, E, G) mit ganzzahligen Einträgen von mindestens 2 (von allen Preisarten soll nach dem Aufgabentext ein Plural vorkommen!), die dem linearen Gleichungssystem (LGS)

$$S + E + G = 100 \wedge S \cdot 1 + E \cdot 0,5 + G \cdot 0,1 = 20 \text{ genügen.}$$

Subtrahiert man die zweite von der ersten Gleichung, so führt dies zum LGS

$$S + E + G = 100 \wedge E \cdot 0,5 + G \cdot 0,9 = 80 \Leftrightarrow S = 100 - E - G \wedge E = 160 - 1,8 \cdot G.$$

Man kann diese beiden Gleichungen im dreidimensionalen S-E-G-Raum geometrisch als zwei Ebenen interpretieren und ihre Schnittgerade bestimmen oder – ohne geometrische Interpretation – eben nur

eine vektorielle Parameterdarstellung wählen:
$$\begin{pmatrix} S \\ E \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 \\ 160 \\ 0 \end{pmatrix} + G \cdot \begin{pmatrix} 0,8 \\ -1,8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen $S \geq 2$ ist $-60 + 0,8 \cdot G \geq 2$ bzw. $G \geq 77,5$.

Wegen $E \geq 2$ ist $160 - 1,8 \cdot G \geq 2$ bzw. $G \leq 87\frac{7}{9}$.

Aufgrund der Ganzzahligkeit von S, E und G kommen für G zusätzlich nur Vielfache von 5 in Frage.

Damit sind zwei Werte für G möglich: 80 und 85, durch Einsetzen ergeben sich die beiden Lösungen, s.o.

Schulfest – Kommentar:

Aus Sicht der Schülerinnen und Schüler (SuS) ist hier natürlich wieder an eine Lösung durch „geschicktes“ (gemeint ist: systematisches) *Probieren* gedacht, nicht an eine Lösung mithilfe eines linearen Gleichungssystems.

Nach den Vorgaben der Aufgabenstellung wird man z.B. mit $G = 80$ anfangen. Dann hat man 8,00 € ausgegeben und benötigt noch 20 Preise. Für 10 Erdnussbeutel benötigt man noch 5,00 € und für 10 Schokoladentafeln 10,00 €. Das sind dann 100 Preise, aber insgesamt hätte man 23,00 € ausgegeben, also zu viel.

Also: weniger von den teuren Schokoladentafeln. Z.B. 15 Erdnussbeutel für 7,50 € und 5 Schokoladentafeln für 5,00 €. Insgesamt hätte man jetzt 20,50 € ausgegeben. Damit ist die Lösung nicht mehr weit.

Man kann ausgehend vom ersten Ansatz mit jeweils 10 Erdnussbeuteln und 10 Schokoladentafeln auch den Betrag von 23,00 € Schritt für Schritt reduzieren, indem man eine Schokoladentafel durch einen Erdnussbeutel „ersetzt“.

Wieder liegt eine selbstdifferenzierende Aufgabe vor. Die SuS können

- eine Lösung finden (a)
- mehrere Lösungen finden (b)
- systematische Überlegungen begründen (c) und schwierig: d)

Relevante Strategien:

- überlege vorab, ob man das *Suchfeld für die Lösung eingrenzen* kann
- mache ein *Beispiel*
- *probiere* davon ausgehend *systematisch*.

Seerosen:

Ein sagenhafter Teich wächst in 10 Tagen mit Seerosen zu. Jeden Tag verdoppelt sich die zugewachsene Fläche. Wann ist der Teich zur Hälfte mit Seerosen bedeckt?

Seerosen – Lösung:

Nicht nach fünf Tagen – die intuitive Grundvorstellung irgendeines Zusammenhangs zwischen Größen ist die Proportionalität – sondern nach neun Tagen. Warum?

Die Fläche verdoppelt sich Tag zu Tag, sie war also am Vortag halb so groß.

Seerosen – Kommentar:

Zur Not kann die Lehrkraft den Sachverhalt mit konkreten Größen erläutern.

Am 10. Tag z.B.: 8 ha, am 9. Tag: 4 ha.

Spaghetti:

Mariam kocht Spaghetti, Kochzeit fünf Minuten. Mariam stehen zwei Sanduhren zur Verfügung. Die erste braucht genau vier Minuten, um ganz durchzulaufen, die zweite genau drei Minuten. Wie kann Mariam mit Hilfe dieser beiden Sanduhren die Kochzeit abmessen?

Spaghetti – Lösungen:

Mariam setzt die Spaghetti auf und lässt beide Sanduhren gleichzeitig laufen. Wenn die 3-Minuten-Sanduhr durchgelaufen ist, dreht sie sie um. Nach vier Minuten, wenn die 4-Minuten-Sanduhr fertig ist, dreht sie die 3-Minuten-Sanduhr nochmal um und hat so noch die letzte Minute. Insgesamt hat sie die Spaghetti dann 5 Minuten gekocht.

Die Lehrkraft kann **Tipps** geben:

- Man kann beide Sanduhren gleichzeitig laufen lassen.
- Man kann eine Sanduhr umdrehen, bevor sie abgelaufen ist.

Spiegelung: (Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)

a) Spiegle ein Dreieck an seiner längsten Seite. Welche Gesamtfigur ergibt sich?

b) Spiegle ein rechtwinkliges Dreieck an seiner kürzesten Seite. Welche Gesamtfigur ergibt sich?

Spiegelung – Lösungen:

- a) Ein Drachenviereck
- b) Ein gleichschenkliges Dreieck

Stimmt's?

- a) Eine Million hat neun Nullen.
- b) 1 Meter sind 100 Millimeter.
- c) 1 Ar sind 100 Quadratmeter.
- d) 1 Liter sind 100 Kubikzentimeter.
- e) Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist $a \cdot b$.
- f) Der Umfang eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist $a + b$.
- g) Null Komma neun plus null Komma zehn ist null Komma neunzehn.
- h) Eine Tonne sind 1000 Gramm.
- i) 1 plus 2 mal 3 plus 4 ist 5.

Stimmt's? – Lösungen:

- a) falsch, es sind 6 Nullen
- b) falsch, es sind 1000 Millimeter
- c) richtig
- d) falsch, es sind 1000 Kubikzentimeter
- e) richtig
- f) falsch, der Umfang berechnet sich zu $2 \cdot (a + b)$
- g) eher falsch, wenn man null Komma zehn versteht als 0,10, das ist eben eine ungute Sprechweise
- h) falsch, es sind 1000 Kilogramm
- i) falsch, es ergibt sich 11 (die Regel *Punkt vor Strich* beachten!)

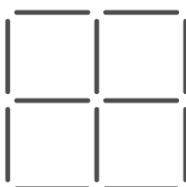
Stimmt's? – Kommentar:

Das ist ein beliebtes Format zur Reaktivierung von Wissen.

Streichhölzer 1:

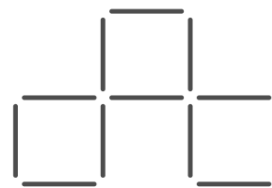
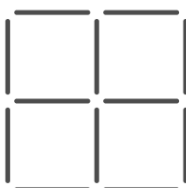
Nimm vier Streichhölzer weg, so dass zwei Quadrate übrig bleiben.

(Lösung: rechte Abbildung)

**Streichhölzer 2:**

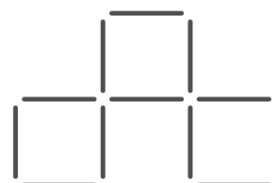
Lege drei Streichhölzer um, so dass nur noch drei Quadrate zu sehen sind.

(Lösung: rechte Abbildung)

**Streichhölzer 3:**

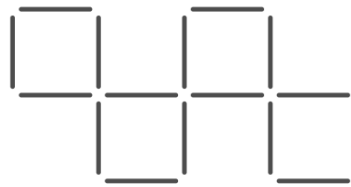
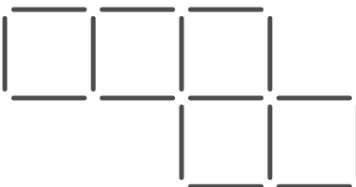
Nimm fünf Streichhölzer weg, so dass drei Quadrate übrig bleiben.

(Lösung: rechte Abbildung)

**Streichhölzer 4:**

Lege zwei Streichhölzer um, so dass nur noch vier Quadrate zu sehen sind.

(Lösung: rechte Abbildung)

**Streichhölzer 1 - 4 Kommentar:**

Vergleicht man die Anzahl der vorhandenen Hölzer mit der Anzahl der zu bildenden Quadrate, so erkennt man in allen vier Fällen, dass für jedes Quadrat vier Hölzer „verbraucht“ werden müssen. Das bedeutet, dass die Quadrate keine gemeinsamen Seiten haben dürfen.

Summe:

Jonathan berechnet der Reihe nach die folgenden Summen

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} =$$

a) Rechne die Summen aus.

b) Wann hat Jonathan die Zahl 1 erreicht?

Summe – Lösung:

a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

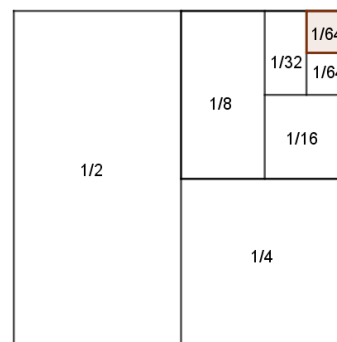
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

b) Er erreicht die Zahl 1 nie. Es fehlt zur 1 jeweils immer noch einmal der letzte Summand der jeweiligen Summe. Man kann diese Situation wie in der Abbildung gezeigt veranschaulichen.

**Summe – Kommentar:**

Voraussetzung ist hierbei, dass die Schülerinnen und Schüler Brüche addieren können.

Das ist schon bemerkenswert –

es kommt immer noch etwas dazu und doch wird die Zahl 1 nicht erreicht oder gar überschritten.

Teilbar 1:

a) Schreibe alle dreistelligen Zahlen aus den Ziffern 1; 2 und 3 (jede Ziffer einmal) auf, die durch 4 teilbar sind.

b) Schreibe alle dreistelligen Zahlen aus den Ziffern 1; 2 und 3 (jede Ziffer einmal), die durch 9 teilbar sind.

c) Wie viele dreistelligen Zahlen mit den Ziffern 1; 2 und 3 (jede Ziffer einmal) gibt es?

Teilbar 1 – Lösungen:

a) 132 und 312

b) Es gibt keine solchen Zahlen wegen der Quersummenregel für die 9. Es ist $1 + 2 + 3 = 6$, die Zahl 6 ist nicht durch 9 teilbar.

c) Es sind 6 Stück.

Lösungsweg: Alle aufschreiben – aber mit System (**Strategie!**), damit man sicher sein kann, dass man alle hat.

Zum Beispiel der Größe nach:

Zuerst alle die mit 1 beginnen: 123 132
 Dann die mit 2 beginnen: 213 231
 Schließlich die mit 3 beginnen: 312 321

Teilbar 1 – Differenzierung:

Je nach Leistungsfähigkeit der Lerngruppe sind die folgenden weiteren Teilaufgaben denkbar.

d) Wie viele vierstelligen Zahlen mit den Ziffern 1; 2; 3 und 4 (jede Ziffer einmal) gibt es?
 Nimm dir die sechs dreistelligen Zahlen (aus c)) vor und füge die Ziffer 4 an allen möglichen Stellen ein.

Lösung:

123 → 4123 1423 1243 1234 ... vier Möglichkeiten
 132 → 4132 1432 1342 1324 ... vier Möglichkeiten usw.

Es gibt also $6 \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Möglichkeiten.

e) Wie viele fünfstelligen Zahlen mit den Ziffern 1; 2; 3; 4 und 5 (jede Ziffer einmal) gibt es?
 Nimm dir die 24 dreistelligen Zahlen (aus d)) vor und füge die Ziffer 5 an allen möglichen Stellen ein.

Lösung:

1234 → 51234 15234 12534 12354 12345 ... fünf Möglichkeiten usw.

Es gibt also $24 \cdot 5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ Möglichkeiten.

Teilbar 2:

Setze für ♣ und ♥ Ziffern ein, sodass die Zahl 123.♣56.78♥

- a) durch 9 und durch 10
- b) durch 5 und durch 9 teilbar ist
- c) durch 4 und durch 9 teilbar ist
- d) durch 2, durch 3, durch 4 und durch 5 teilbar ist.

Teilbar 2 – Lösungen:

a) 123.456.780

Teilbarkeit durch 10: Endziffer 0

Teilbarkeit durch 9: die Quersumme muss durch 9 teilbar sein

b) 123.456.780 oder 123.856.785

Teilbarkeit durch 5: Endziffer 0 oder 5

Teilbarkeit durch 9: die Quersumme muss durch 9 teilbar sein, es gibt jeweils nur eine Möglichkeit.

c) 123.456.780 oder 123.956.784 oder 123.556.788

Teilbarkeit durch 4: zur Zehnerziffer 8 die Endziffer 0 oder 4 oder 8

Teilbarkeit durch 9: die Quersumme muss durch 9 teilbar sein, es gibt jeweils nur eine Möglichkeit.

d) 123156780 oder 123456780 oder 123756780

Wenn die Zahl durch 4 teilbar ist, dann ist sie automatisch auch durch 2 teilbar.

Teilbarkeit durch 5: Endziffer 0 oder 5

Teilbarkeit durch 4: zur Zehnerziffer 8 die Endziffer 0 oder 4 oder 8

Damit ist als Endziffer nur die 0 möglich.

Teilbarkeit durch 3: die Quersumme muss durch 3 teilbar sein; es gibt drei Möglichkeiten.

Teilbar 2 – Kommentar:

Dies ist eine selbstdifferenzierende Aufgabe:

- finde eine Lösung
- finde alle Lösungen
- begründe, dass es keine weiteren Lösungen gibt

Viele Wege:

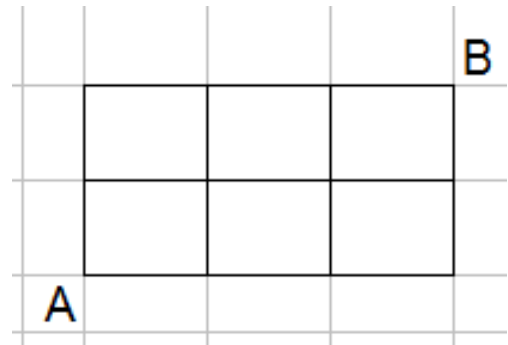
Wie viele Wege führen von A (links unten) nach B (rechts oben), wenn man nur auf den Gitterlinien gehen darf und keine Umwege machen möchte?

Viele Wege – Lösung:

Ein Weg lässt sich beschreiben durch eine Folge aus fünf Buchstaben, entweder „r“ (für „rechts“) oder „h“ (für „hoch“), wobei genau dreimal „r“ und genau zweimal „h“ vorkommen soll.

rrrhh; rrrhh; rrrhh;
 rhrrh; rhrrh; rhrrh;
 hrrrh; hrrrh; hrrrh;
 hhrrr

Es sind 10 Wege.

**Viele Wege – Kommentar:**

Strategie: alle Fälle der Reihe nach systematisch, sorgfältig und konzentriert „abarbeiten“.

Der kreative Akt auf Seite der Schülerinnen und Schüler besteht hier aus dem Erfinden einer Systematik, z.B. in der oben gezeigten Art.

Entre nous – allgemein gilt:

Ist R die Anzahl der möglichen „Rechts-Schritte“ und H die Anzahl der möglichen „Hoch-Schritte“, so ist

die Anzahl der möglichen Wege gleich dem Binomialkoeffizienten $\binom{R+H}{R}$.

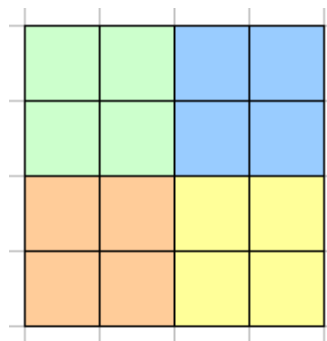
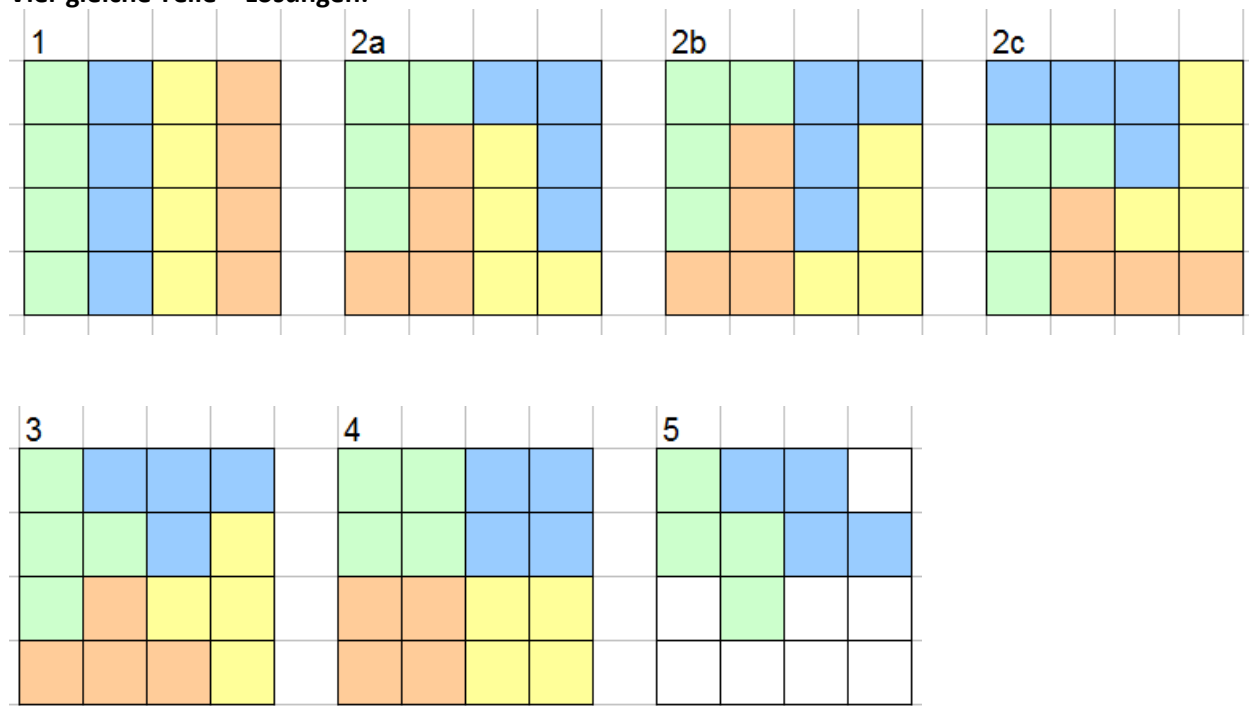
Begründung: In einem (R+H)-Tupel sind von den R+H Stellen R Stellen auszuwählen, die mit „r“ belegt werden, die übrigen werden dann mit „h“ belegt.

Vier gleiche Teile:

Teile das 4x4-Quadrat entlang der Gitterlinien in vier deckungsgleiche Teile (gleiche Form und Größe).

Färbe die vier gleichen Teile unterschiedlich.

Ein Beispiel zeigt die Abbildung rechts.

**Vier gleiche Teile – Lösungen:****Vier gleiche Teile – Differenzierung:**

Dies ist eine selbstdifferenzierende Knobelaufgabe. Jede bzw. jeder kann auf eigenem Niveau ein Erfolgserlebnis erreichen. Zum Zeichnen wird man sinnvollerweise das Arbeitsblatt mit vorgegebenen 4x4-Quadraten nutzen:

- eine Lösung finden
- mehrere Lösungen finden
- alle Lösungen finden
- begründen, dass man alle gefunden hat.

Jedes der vier Teile besteht aus vier kleinen Quadraten. Die Anzahl dieser „Vierlinge“ ist sehr begrenzt. Legt man drei Quadrate in eine Reihe und fügt ein viertes hinzu, so hat man drei Möglichkeiten: „I“, „L“ oder „T“ (vgl. in den Abbildungen oben 1; 2a, 2b, 2c und 3 – die Bezeichnungen mit Buchstaben sind der jeweiligen Form des Vierlings nachempfunden).

Will man eine 3er-Reihe vermeiden, so gibt es nur die Möglichkeiten „O“ (4) oder „N“ (5) – dieser Ansatz führt aber nicht zu einer Lösung.

Viereck 1:

Alle vier Seiten eines Vierecks sind gleich lang, es ist aber kein Quadrat. Kann das sein?

Viereck 1 - Lösung:

Ja, es ist eine Raute.

Viereck 2:

Die gegenüber liegenden Seiten eines Vierecks sind parallel, es ist aber kein Rechteck. Kann das sein?

Viereck 2 - Lösung:

Ja, es ist ein Parallelogramm.

Vier Töchter:

Eine Mutter hat 4 Töchter. Jede Tochter hat einen Bruder. Wie viele Kinder hat die Mutter insgesamt?

Vier Töchter - Lösung:

Die Mutter hat fünf Kinder, nämlich vier Töchter und einen Sohn (!).

Waageproblem 1:

Auf einem Tisch liegen 3 Stapel zu jeweils 3 Schokoladentafeln. Alle Tafeln wiegen 100g mit Ausnahme der Tafeln eines einzigen Stapels, die jeweils 110g wiegen.

Wie kann man durch eine einzige Wägung von Tafeln aus den Stapeln mit einer Anzeigen-Waage den Stapel mit den besonderen Tafeln sicher herausfinden?

Waageproblem 1 – Lösung:

Man nimmt vom 1. Stapel 1 Tafel, vom 2. Stapel 2 Tafeln und vom 3. Stapel 3 Tafeln und legt alle 6 Tafeln zusammen auf die Waage. Würden alle Tafeln 100 g wiegen, wäre die Anzeige 600 g.

Wenn die Anzeige 610 g lautet, dann sind die 110 g- Tafeln im 1. Stapel, denn auf der Waage liegt eine davon.

Wenn die Anzeige 620 g lautet, dann sind die 110 g-Tafeln im 2. Stapel, denn auf der Waage liegen zwei davon.

Wenn die Anzeige 630 g lautet, dann sind die 110 g-Tafeln im 3. Stapel, denn auf der Waage liegen drei davon.

Waageproblem 1 – Kommentar:

Wenn man nur eine Tafel eines Stapels auf die Waage legt, kann man Glück haben und den Stapel identifizieren oder eben nicht, man soll aber ein sicheres Verfahren entwickeln.

Ein möglicher **Tipp** lautet:

Du darfst auch von einem Stapel mehrere Tafeln auf die Waage legen.

Wenn man von jedem Stapel eine Tafel auf die Waage legt, man wird immer 310 g erhalten, das hilft also nicht weiter. Aber jetzt ist die Lösung nicht mehr fern.

Waageproblem 2:

Von neun äußerlich gleichen Kugeln K1, K2 ... K9 ist genau eine schwerer als die acht andern. Diese soll sicher durch zwei Wägungen mit einer Balkenwaage gefunden werden.

Waageproblem 2 – Lösung:

Lege K1, K2 und K3 auf die linke Seite der Balkenwaage, lege K4, K5 und K6 auf die rechte Seite. Jetzt gibt es drei Möglichkeiten:

- Links schwerer: die gesuchte Kugel ist K1, K2 oder K3 → zweite Wägung: links K1, rechts K2 → bei Gleichgewicht ist K3 die gesuchte Kugel.
- Rechts schwerer: die gesuchte Kugel ist K4, K5 oder K6 → zweite Wägung: links K4, rechts K5 → bei Gleichgewicht ist K6 die gesuchte Kugel.
- Gleichgewicht: die gesuchte Kugel ist K7, K8 oder K9 → zweite Wägung: links K7, rechts K8 → bei Gleichgewicht ist K9 die gesuchte Kugel.

Waageproblem 2 – Kommentar:

Man muss sich von der Idee verabschieden, die gesuchte Kugel eventuell schon nach dem ersten Wägen benennen zu können. Hier geht es **strategisch** gesehen um ein schrittweises Eingrenzen der Lösung. Ideal wäre, wenn man das mit einer Balkenwaage real durchspielen könnte. Die Lehrkraft kann den **Tipp** geben, mit zweimal drei Kugeln zu beginnen.

Würfel:

(Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)

27 gleiche Würfel werden zu einem großen Würfel zusammengesetzt. Der große Würfel wird außen rot angemalt.

- a) Wie viele der 27 kleinen Würfel sind zur Hälfte rot angemalt?
- b) Wie viele der Würfel haben zwei rote Quadrate?
- c) Gibt einen gänzlich unbemalten Würfel?

Würfel – Lösungen:

- a) 8 Würfel sind zur Hälfte rot angemalt.
- b) 12 Würfel haben zwei rote Quadrate.
- c) Ja, es gibt einen, nämlich den in der Mitte.

Würfel – Kommentar:

Schülerinnen und Schüler können weitere solche Aufgaben erfinden, ggf. auch an einem 4x4x4-Würfel.

Würfelnetze:

Bei Spielwürfeln müssen gegenüberliegende Augenzahlen zusammen immer 7 ergeben. Prüfe, ob die Würfelnetze korrekt beschriftet sind.

4	2	3		3	2			1	2			5	6			2			3	
	1				1	4			3				2		4	6	3	1	5	
	5				5				5	6			1			5			4	6
a)	6			b)	6			c)	4			d)	4	3		e)	1		f)	2
1																				
2				5				2				3						1		
6	4			4	6	3		6	3			4	5				2	3		
	5				2				5	1			1						5	4
g)	3			h)	1			i)	4			j)	2	6				k)		6

Würfelnetze – Lösungen:

a); b); c); e); f); g); h) und i) sind korrekt beschriftet, d); j) und k) nicht.

Zahlwörter:

a) Für kleine Kinder ist es beim Lernen der Zahlwörter eine große Hürde, dass im Deutschen entgegen einer einheitlichen Systematik die Einerstelle vor der Zehnerstelle genannt wird. Das Zahlwort für 3456 ist „Dreitausendvierhundertsechsfünfzig“.

- Wie heißt das Zahlwort für 3456, wenn man die Stufenzahlen schön der Reihe nach abarbeiten würde (wie zum Beispiel im Englischen)?

b) Wir wollen versuchsweise zusätzlich nun auch die Sonderfälle der Zahlwörter für 11 („Elf“) und 12 („Zwölf“) abschaffen.

- Wie müssten sie heißen, wenn man sie genauso bildet wie bei 13; 14 usw.?
- Wie müssten sie heißen, wenn man die Stufenzahlen der Reihe nach abarbeitet – wie in a)?

c) Auch die Bildung der verschiedenen Zehner-Vielfachen (zwanzig, dreißig, ...) ist ein Sonderfall. Bei den größeren Stufenzahlen nennt man ja immer die Anzahl der Stufenzahl und dann die Stufenzahl selbst, z.B. bei 3400 sagt man „dreitausendvierhundert“.

Wir haben jetzt also nur noch Wörter für die Ziffern von 1 bis 9 und die Stufenzahlen zur Verfügung.

- Wie heißt das Zahlwort für 3456 jetzt?

d) Wir bilden die Zahlwörter nun nur mit den Ziffern von 1 bis 9 und den Stufenzahlen konsequent nach der Regel aus d) („Anzahl“ + „Stufenzahl“). Wie sonst üblich, geben wir bei den Tausendern und Millionen usw. die Anzahlen mit einem Zahlwort zwischen 1 und 999 an.

- Wie würden die Zahlwörter heißen: 35 | 212 | 1.234 | 22.333 usw.

Beispiel:

987.654.321 als Zahlwort wäre dann

„neunhundertachtzehnhundertsieben Millionen

sechshundertfünfeinhundviertausenddreihundertzweihundeins“.

Zahlwörter – Lösungen:

a) Es würde heißen „Dreitausendvierhundertfünfzigundsechs“.

b) Sie müssten heißen „einszehn“ und „zweizehn“.

Sie müssten heißen „zehnhundeins“ und „zehnhundzwei“.

c) Es heißt jetzt „dreitausendvierhundertfünfzehnundsechs“.

Achtung: „Fünfzehn“ steht hierbei für 50, nicht mehr für 15.

d) dreizehnundfünf

zweihunderteinszahnundzwei

einstausendzweihundertdreizehnundvier

zweizehnundzweitausenddreihundertdreizehnunddrei usw.

Zeichnerisches Multiplizieren:

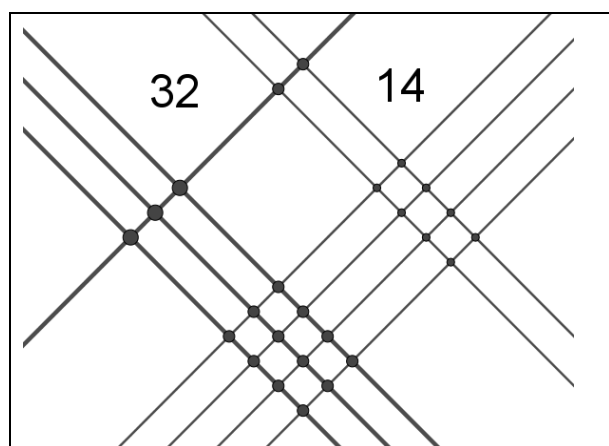
Wie löst man die Multiplikationsaufgabe $32 \cdot 14$ durch eine Zeichnung ohne das „kleine Einmal-Eins“? Wir betrachten die Abbildung rechts.

Man zeichnet die Zahl 32 so:

3 dicke Parallelen und 2 dünne Parallelen in einem Abstand davon von links oben nach rechts unten.

Man zeichnet die Zahl 14 so:

1 dicke Gerade und 4 dünne Parallelen in einem Abstand davon von rechts oben nach links unten.



Jetzt zählt man die Schnittpunkte:

8 Schnittpunkte bei „dünn-dünn“ → **8 Einer**

$12 + 2 = 14 = 10 + 4$ Schnittpunkte bei „dünn-dick“ bzw. „dick-dünn“ → **4 Zehner** und 1 Übertrag

3 Schnittpunkte bei „dick-dick“ + 1 Übertrag → **4 Hunderter**

Ergebnis: $32 \cdot 14 = 448$

a) Führe dieses Verfahren durch für $45 \cdot 23$.

b) Gelingt dies auch für $123 \cdot 45$?

c) Vergleiche mit dem Verfahren der schriftlichen Multiplikation.

Zeichnerisches Multiplizieren – Lösung:

a) 1035

b) 5535

c) Es ist genau dasselbe wie bei der schriftlichen Staffeldrechnung:

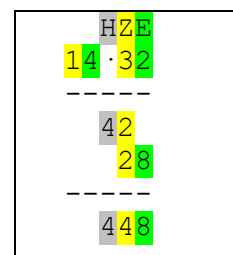
3 Zehner mal 4 Einer ergibt 12 Zehner, das sind 2 Zehner und 1 Hunderter,

3 Zehner mal 1 Zehner ergibt 3 Hunderter, zusammen sind es also **4 Hunderter**,

2 Einer mal 4 Einer ergibt **8 Einer** und 2 Einer mal 1 Zehner ergibt 2 Zehner,

zusammen also **4 Zehner**.

Anstelle des Abzählens, wie viele Punkte die „Rechtecke“ enthalten, kann man natürlich das „Kleine Einmal-Eins“ verwenden.



Zeichnerisches Multiplizieren – Kommentar:

Man kann (mit weiteren Beispielen) eine Doppelstunde mit diesem Thema füllen, wenn man möchte ☺.

Anstelle von dünnen und dicken Strichen wird man – insbesondere bei dreistelligen Faktoren – mit Farben arbeiten. Hier muss man schauen, dass man den Überblick über die Bedeutung der einzelnen „Rechtecke“ (Einer? Zehner? Hunderter? usw.) nicht verliert.

Wenn der Überblick gesichert ist, dann ist es unerheblich, ob man auf kariertem Papier und mit dem Geodreieck arbeitet oder auch auf Konzeptpapier frei Hand.

Zwei Liter:

Ein Würfel mit der Kantenlänge 10 cm hat das Volumen von genau 1 Liter ($= 1000 \text{ cm}^3$).

Welches Volumen bekommt man bei der doppelten Kantenlänge ($= 20 \text{ cm}$)?

Zwei Liter – Lösung:

Damit bekommt man nicht das doppelte Volumen von 2 Liter, sondern 8 Liter ($= 8000 \text{ cm}^3$).

Zwei Liter – Kommentar:

Oder in der Veranschaulichung („Kopfgeometrie“):

Wie viele 10 cm-Würfel passen in einen 20 cm-Würfel? Einer links vorne unten, einer rechts vorne unten, einer links hinten unten, ...