

Infoblatt

Ziel der vorliegenden Stunde *Brüche 3-2-1* ist eine Wiederholung und „Umwälzung“ (das ist die Anwendung in unterschiedlichen Bezügen) der Kenntnisse zur Bruchrechnung unter Verwendung zugehöriger Fachbegriffe. Auf das Zitat der vielfältigen zugehörigen Stellen des Bildungsplanes der Klassen 5/6 wird verzichtet.

Hier einige **didaktische Hinweise** zu den Brüchen und zum Bruchrechnen – möglicherweise treten beim Einstieg oder bei der Bearbeitung des Arbeitsblattes 1 inhaltliche Fragen auf:

Die **Hauptgrundvorstellung** eines Bruchs lautet so:

Teile ein Ganzes in N gleiche Teile und nimm Z davon. Schon daraus erschließt sich, dass $\frac{N}{N} = 1$ ist.

Brüche mit $Z > N$ bedürfen der gedanklichen Zusatzkonstruktion, dass Kopien verfügbar sind, auch für den Sonderfall $\frac{Z}{1} = Z$.

Erweitern eines Bruches heißt, die Unterteilung weiter zu verfeinern; teilt man jeden Teil in k gleiche Teile, so erhält man k·Z Teile vom Typ k·N. Die Umkehrung des Erweiterns ist das Kürzen. Der Wert des Bruches bleibt bei beiden Operationen unverändert.

Die **Addition und Subtraktion gleichnamiger Brüche** lassen sich mithilfe des quasikardinalen Aspektes verstehen (ein Fünftel + zwei Fünftel = drei Fünftel). Bei ungleichnamigen Brüchen stellt man durch geeignetes Erweitern gleichnamige Brüche her. Für die Erfordernisse des Arbeitsblattes 2 ist der „einfache“ Fall von Bedeutung, dass einer der beiden Nenner ein Vielfaches des anderen Nenners ist.

Die **Multiplikation mit einer ganzen Zahl**, insbesondere auch der Null, ergibt sich ebenfalls aus dem quasikardinalen Aspekt. Bei der Division wäre der direkte Zugang, den Zähler zu dividieren. Die dazu äquivalente Multiplikation des Nenners bedarf einer Zusatzüberlegung.

Ein Zugang zur **Multiplikation von Brüchen** ist der Weg über die Grundvorstellung eines Bruchs und die Multiplikation mit einer ganzen Zahl und die Division durch eine ganze Zahl.

Beispiel: Zunächst wird berechnet, was $\frac{2}{3}$ von $\frac{4}{5}$ ist. Nach der Grundvorstellung eines Bruches muss

man also $\frac{4}{5}$ in 3 gleiche Teile teilen und dann 2 davon nehmen.

Das bedeutet $\frac{2}{3}$ von $\frac{4}{5}$ ist $\left(\frac{4}{5} : 3\right) \cdot 2 = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3}$. Das Produkt $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4}$ wird dann definiert als $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$.

Die Division ist die Umkehroperation der Multiplikation.

Division durch 0: Was ist $\frac{2}{3} : \frac{1}{3}$? Anders gefragt: Wie oft passt $\frac{1}{3}$ in $\frac{2}{3}$?

Antwort: 2-mal. Nimmt man 2-mal $\frac{1}{3}$, so sind die $\frac{2}{3}$ „voll“.

Wie oft passt 0 in $\frac{2}{3}$?

Antwort: Man kann so viele Nullen nehmen, wie man möchte, die $\frac{2}{3}$ werden damit nicht „voll“.

Zum **Ablauf**:

Zeitbedarf insgesamt ca. 45 bis 60 Min.

Brainstorming zum **Einstieg**: „Was wisst ihr über das Rechnen mit Brüchen?“ Möglich wäre auch ein Brainstorming zum Thema „Wo muss man beim Bruchrechnen besonders aufpassen?“ oder „Was ist beim Bruchrechnen besonders schwierig?“.

Die Lehrkraft stellt das **Arbeitsblatt 1** vor und macht eine der 13 Multiple-Choice-Aufgaben (z.B. 2.)) mit der Lerngruppe gemeinsam.

Die Schülerinnen und Schüler (SuS) bearbeiten das **Arbeitsblatt 1** in Einzel- oder Teamarbeit und machen die angebotene Probe.

Neben der Wiederholung der Fakten zur Bruchrechnung ist die Sprachschulung und das Üben des genauen sinnerfassenden Lesens ein wichtiges Bildungsziel.

Die Lehrkraft stellt den Aufgabentyp des **Arbeitsblatts 2** vor (**Differenzierung**: Varianten 2a, 2b und 2c mit ansteigendem Schwierigkeitsgrad, es kommen jeweils komplexere Aufgaben dazu) und löst die folgenden drei Musteraufgaben mit der Lerngruppe gemeinsam:

Das Ergebnis jedes Zahlterms soll immer 1 sein. Setze dazu für jedes Fragezeichen die Ziffer 2 oder 3 ein, insgesamt soll der Zahlterm so viele Zweien und Dreien enthalten wie angegeben.

i) Anzahl der Zweien: 5 | Anzahl der Dreien: 4

$$\frac{?}{?+?} + \frac{?+?}{2+2+3+3}; \text{ Ergebnis: } \frac{3}{2+3} + \frac{2+2}{2+2+3+3}$$

Überlegung zum Lösungsweg: Zum Nenner 10 passt bei der Addition zweier Brüche der Nenner 5 (= 2 + 3) sehr gut. Für die Zähler bleiben dann mit den Ziffern 2; 2 und 3 nicht mehr viele Möglichkeiten.

ii) Anzahl der Zweien: 4 | Anzahl der Dreien: 6

$$\frac{?+? \cdot ?}{3+3} \cdot \frac{? \cdot ?}{2+3+3}; \text{ Ergebnis: } \frac{2+2 \cdot 3}{3+3} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2+3+3}$$

Überlegung zum Lösungsweg: Man sollte kürzen können. Am einfachsten wäre es, wenn die beiden Zähler 6 und 8 ergeben würden. Das kann man mit den noch zu vergebenden Ziffern 2; 2; 2; 3 und 3 hinbekommen.

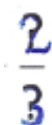
iii) Anzahl der Zweien: 1 | Anzahl der Dreien: 6

$$\frac{? \cdot ?+? \cdot ?}{? \cdot ? \cdot ?}; \text{ Ergebnis: } \frac{3 \cdot 3+3 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 3}$$

Überlegung zum Lösungsweg: Es gibt nur eine 2. Wo diese unterbringen? Es gibt wegen der Kommutativität der Addition und Multiplikation nur zwei Möglichkeiten – im Nenner oder im Zähler an einer beliebigen Stelle.

Die SuS bearbeiten das Arbeitsblatt 2 (nach Auswahl der Lehrkraft 2a, 2b oder 2c) in Einzel- oder Teamarbeit. Das Fragezeichen lässt sich dabei recht ordentlich mit einer „2“ oder einer „3“ überschreiben (günstig: z.B. blaue Farbe), indem man den oberen Bogen des Fragezeichens für den oberen Bogen der Ziffer „2“ bzw. der Ziffer „3“ nutzt, vgl. Bild. Beim Probieren können die SuS ggf. zuerst Bleistifteintragungen machen und diese dann ggf. radieren.

Die Bruchrechneregeln werden durch den **Umkehraufgabentypus** besonders intensiv umgewälzt.



13 Aufgaben:

- **Kreuze** jeweils die richtige Antwort **an**.
- **Kringle** die Zahl **ein**, die in Klammern hinter der richtigen Antwort steht.
- **Mache** zum Schluss die **Probe**: Die **Summe der dreizehn Zahlen muss 80** ergeben.

1.) Wie erweitert man einen Bruch mit einer Zahl? Beispiel: Erweitere $\frac{3}{4}$ mit 5.

- ☐ Indem man die Zahl zum Zähler und zum Nenner addiert. (7)
- ☐ Indem man Zähler und Nenner durch die Zahl dividiert. (1)
- ☐ Indem man den Zähler mit der Zahl multipliziert. (9)
- ☐ Indem man Zähler und Nenner mit der Zahl multipliziert. (11)

2.) Wie addiert man zwei Brüche mit gleichem Nenner? Beispiel: $\frac{3}{5} + \frac{4}{5}$

- ☐ Indem man die beiden Zähler und die beiden Nenner addiert. (3)
- ☐ Indem man die beiden Zähler addiert und den gemeinsamen Nenner beibehält. (12)
- ☐ Indem man die beiden Zähler multipliziert und den gemeinsamen Nenner verdoppelt. (6)
- ☐ Brüche mit gleichem Nenner kann man nicht addieren. (2)

3.) Wie multipliziert man zwei Brüche? Beispiel: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}$

- ☐ Indem man die Brüche durch Erweitern zunächst auf einen gemeinsamen Nenner bringt und dann die Zähler multipliziert und den gemeinsamen Nenner beibehält. (4)
- ☐ Indem man die beiden Zähler addiert und die Nenner multipliziert. (8)
- ☐ Indem man die beiden Zähler und die beiden Nenner multipliziert. (5)
- ☐ Zwei Brüche kann man nicht multiplizieren. (10)

4.) Wie multipliziert man einen Bruch mit einer ganzen Zahl? Beispiel: $5 \cdot \frac{3}{4}$

- ☐ Indem man den Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert. (5)
- ☐ Indem man den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert. (11)
- ☐ Indem man den Zähler und den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert. (12)
- ☐ Es ist nicht möglich, einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multiplizieren. (3)

5.) Wie dividiert man einen Bruch durch einen zweiten Bruch? Beispiel: $\frac{2}{3} : \frac{4}{5}$

- ☐ Indem man Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert. (1)
- ☐ Indem man den Bruch mit dem Kehrwert des zweiten Bruchs multipliziert. (2)
- ☐ Indem man den Kehrwert des Bruchs mit dem zweiten Bruch multipliziert. (10)
- ☐ Brüche kann man nicht durch einander dividieren. (7)

6.) Was ergibt sich, wenn man einen Bruch mit 0 multipliziert? Beispiel: $0 \cdot \frac{3}{4}$

- ☐ Es ergibt sich 0. (4)
- ☐ Es ergibt sich der Bruch selbst. (9)
- ☐ Es ergibt sich die Hälfte des Bruchs. (6)
- ☐ Einen Bruch kann man nicht mit 0 multiplizieren. (8)

7.) Was ergibt sich, wenn man einen Bruch durch 0 dividiert? Beispiel: $\frac{3}{4} : 0$

- ☐ Es ergibt sich 0. (7)
- ☐ Es ergibt sich der Bruch selbst. (11)
- ☐ Es ergibt sich das Doppelte des Bruchs. (3)
- ☐ Einen Bruch kann man nicht durch 0 dividieren. (1)

8.) Wie kürzt man einen Bruch mit einer Zahl? Beispiel: Kürze $\frac{9}{12}$ mit 3.

- ☐ Indem man von Zähler und Nenner die Zahl subtrahiert. (2)
- ☐ Indem man Zähler und Nenner mit der Zahl multipliziert. (10)
- ☐ Indem man den Nenner durch die Zahl dividiert. (4)
- ☐ Indem man Zähler und Nenner durch die Zahl dividiert. (9)

9.) Wie subtrahiert man von einem Bruch einen zweiten Bruch? Beispiel: $\frac{5}{6} - \frac{2}{3}$

- ☐ Man subtrahiert Zähler von Zähler und Nenner von Nenner. (5)
- ☐ Man bringt die Brüche zunächst durch Erweitern auf denselben Nenner und subtrahiert dann die Zähler. (6)
- ☐ Man bringt die Brüche zunächst durch Erweitern auf denselben Zähler und subtrahiert dann die Nenner. (8)
- ☐ Zwei Brüche kann man nicht subtrahieren. (12)

10.) Wie dividiert man einen Bruch durch eine ganze Zahl? Beispiel: $\frac{3}{4} : 5$

- ☐ Indem man den Zähler mit der ganzen Zahl multipliziert. (2)
- ☐ Indem man den Zähler und den Nenner durch die ganze Zahl dividiert. (9)
- ☐ Indem man den Nenner mit der ganzen Zahl multipliziert. (11)
- ☐ Es ist nicht möglich, einen Bruch durch eine ganze Zahl zu dividieren. (6)

11.) Was ergibt die Multiplikation eines Bruches mit seinem Kehrwert? Beispiel: $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3}$

- ☐ Es ergibt sich 1. (3)
- ☐ Es ergibt sich 0. (7)
- ☐ Es ergibt sich der Kehrwert des Bruchs. (1)
- ☐ Einen Bruch kann man nicht mit seinem Kehrwert multiplizieren. (8)

12.) Welchen Wert hat ein Bruch, dessen Zähler und Nenner gleich sind? Beispiel: $\frac{3 \cdot 4}{6 + 6}$

- ☐ Der Bruch hat den Wert 0. (12)
- ☐ Der Bruch hat den Wert 1. (5)
- ☐ Der Bruch hat den Wert des Zählers. (10)
- ☐ Brüche mit gleichem Zähler und Nenner sind sinnlos. (4)

13.) Welchen Wert hat ein Bruch, dessen Nenner gleich 1 ist? Beispiel: $\frac{3}{1}$

- ☐ Der Bruch hat den Wert 0. (9)
- ☐ Der Bruch hat den Wert 1. (4)
- ☐ Der Bruch hat den Wert des Zählers. (6)
- ☐ Brüche mit Nenner 1 sind sinnlos. (8)

- Das **Ergebnis** jedes Zahlterms **soll 1** sein.
- Setze dazu **für jedes Fragezeichen die Ziffer 2 oder 3** ein, insgesamt soll der Zahlterm so oft die Ziffer 2 und die Ziffer 3 enthalten wie angegeben.

	1-mal die 2	2-mal die 2	3-mal die 2	4-mal die 2
1-mal die 3	$?\text{---}?$	$?\cdot ?\text{---}?$	$?\cdot \frac{?\text{---} ?}{?}$	$\frac{?\cdot ?}{?+?+?}$
2-mal die 3	$?\text{---}\frac{?}{?}$	$\frac{?}{?}\cdot \frac{?}{?}$	$?\text{---}\frac{?+?}{2+3}$	$\frac{?+?}{2\cdot 3}\cdot \frac{?}{2}$
3-mal die 3	$\frac{?+?}{?}:\frac{?}{?}$	$\frac{?}{3+3}+\frac{2}{?}$	$\frac{?\cdot ?}{2}:\frac{?+?}{2}$	$\frac{?+?}{2\cdot 3}+\frac{?\text{---} ?}{3}$
4-mal die 3	$\frac{?}{?}\text{---}\frac{3}{3+3}$	$\frac{3}{3+3}+\frac{?\text{---} ?}{?}$	$\frac{?}{?}+3\cdot \frac{?}{?}\text{---}2\text{---}3$	$\frac{3}{2\cdot 2}+\frac{?\text{---} ?}{?+?\text{---} ?}$

- Das **Ergebnis** jedes Zahlterms **soll 1** sein.
- Setze dazu **für jedes Fragezeichen die Ziffer 2 oder 3** ein, insgesamt soll der Zahlterm so oft die Ziffer 2 und die Ziffer 3 enthalten wie angegeben.

	1-mal die 2	2-mal die 2	3-mal die 2	4-mal die 2	5-mal die 2
1-mal die 3	$? - ?$	$? \cdot ? - ?$	$? \cdot \frac{? - ?}{?}$	$\frac{? \cdot ?}{? + ? + ?}$	$2 - \frac{? + ? + ?}{? \cdot ?}$
2-mal die 3	$? - \frac{?}{?}$	$\frac{?}{?} \cdot \frac{?}{?}$	$? - \frac{? + ?}{2 + 3}$	$\frac{? + ?}{2 \cdot 3} \cdot \frac{?}{2}$	$\frac{? + ? + ? + ?}{? + ? + ?}$
3-mal die 3	$\frac{? + ?}{?} : ?$	$\frac{?}{3 + 3} + \frac{2}{?}$	$\frac{? \cdot ?}{2} : \frac{? + ?}{2}$	$\frac{? + ?}{2 \cdot 3} + \frac{? - ?}{3}$	$\frac{? \cdot ?}{2 + 2} - \frac{3 + 2}{? + ?}$
4-mal die 3	$\frac{?}{?} - \frac{3}{3 + 3}$	$\frac{3}{3 + 3} + \frac{? - ?}{?}$	$\frac{?}{?} + 3 \cdot \frac{?}{?} - 2 - 3$	$\frac{3}{2 \cdot 2} + \frac{? - ?}{? + ? - ?}$	$\frac{? + ?}{? \cdot ?} + (2 - 2) \cdot \frac{? \cdot ?}{?}$
5-mal die 3	$\frac{3}{3 + 3 + 3} + \frac{?}{?}$	$\frac{? \cdot ? + ? \cdot ?}{3 \cdot 3 + 3}$	$\frac{3 + 3}{? + ?} \cdot \frac{? + ?}{2 \cdot 3}$	$\frac{? \cdot ?}{2 + 3 + 3} + \frac{?}{2 + 3 + 3}$	$\frac{?}{2 \cdot ?} + \frac{3}{2 \cdot ?} + \frac{3 - ?}{2 \cdot ?}$

- Das **Ergebnis** jedes Zahlterms **soll 1** sein.
- Setze dazu **für jedes Fragezeichen die Ziffer 2 oder 3** ein, insgesamt soll der Zahlterm so oft die Ziffer 2 und die Ziffer 3 enthalten wie angegeben.

	1-mal die 2	2-mal die 2	3-mal die 2	4-mal die 2	5-mal die 2	6-mal die 2
1-mal die 3	$? - ?$	$? \cdot ? - ?$	$? \cdot \frac{? - ?}{?}$	$\frac{? \cdot ?}{? + ? + ?}$	$2 - \frac{? + ? + ?}{? \cdot ?}$	$\frac{?}{? + ?} + \frac{?}{? \cdot ? \cdot ?}$
2-mal die 3	$? - \frac{?}{?}$	$\frac{?}{?} \cdot \frac{?}{?}$	$? - \frac{? + ?}{2 + 3}$	$\frac{? + ?}{2 \cdot 3} \cdot \frac{?}{2}$	$\frac{? + ? + ? + ?}{? + ? + ?}$	$\frac{2 + 2}{? + ? + ?} + \frac{?}{? + ?}$
3-mal die 3	$\frac{? + ?}{?} : ?$	$\frac{?}{3 + 3} + \frac{2}{?}$	$\frac{? \cdot ?}{2} : \frac{? + ?}{2}$	$\frac{? + ?}{2 \cdot 3} + \frac{? - ?}{3}$	$\frac{? \cdot ?}{2 + 2} - \frac{3 + 2}{? + ?}$	$\frac{? \cdot ? + ?}{2 + 2 + 2 + ? + ? + ?}$
4-mal die 3	$\frac{?}{?} - \frac{3}{3 + 3}$	$\frac{3}{3 + 3} + \frac{? - ?}{?}$	$\frac{?}{?} + 3 \cdot \frac{?}{?} - 2 - 3$	$\frac{3}{2 \cdot 2} + \frac{? - ?}{? + ? - ?}$	$\frac{? + ?}{? \cdot ?} + (2 - 2) \cdot \frac{? \cdot ?}{?}$	$\frac{? \cdot ? \cdot ? - ?}{3 + 3} : \frac{? \cdot ?}{2 \cdot 3}$
5-mal die 3	$\frac{3}{3 + 3 + 3} + \frac{?}{?}$	$\frac{? \cdot ? + ? \cdot ?}{3 \cdot 3 + 3}$	$\frac{3 + 3}{? + ?} \cdot \frac{? + ?}{2 \cdot 3}$	$\frac{? \cdot ?}{2 + 3 + 3} + \frac{?}{2 + 3 + 3}$	$\frac{?}{2 \cdot ?} + \frac{3}{2 \cdot ?} + \frac{3 - ?}{2 \cdot ?}$	$\frac{3}{? + ? + ?} + \frac{2}{? + ?} + \frac{3 - 2}{? \cdot ?}$
6-mal die 3	$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{? + ? + ?} - ?$	$\frac{3}{3 \cdot 3 + ?} \cdot \frac{? \cdot ? \cdot ?}{3}$	$\frac{? + ?}{? + ?} - \frac{3}{3 + 3 + 3 + 3}$	$\frac{3 \cdot 3}{? + ?} : \frac{3 + 2 \cdot 3}{? + ? + ?}$	$\frac{3}{2 + 2 + 2} + \frac{3 : 3}{3 + ?} + \frac{?}{? \cdot ?}$	$\frac{3 - 2}{? + ?} + \frac{3}{? + ? + ? + ?} + \frac{3 - 2}{?}$

- Das **Ergebnis** jedes Zahlterms **soll 1** sein.
- Setze dazu **für jedes Fragezeichen die Ziffer 2 oder 3** ein, insgesamt soll der Zahlterm so oft die Ziffer 2 und die Ziffer 3 enthalten wie angegeben.

	1-mal die 2	2-mal die 2	3-mal die 2	4-mal die 2	5-mal die 2	6-mal die 2
1-mal die 3	$3 - 2$	$2 \cdot 2 - 3$	$2 \cdot \frac{3-2}{2}$	$\frac{3 \cdot 2}{2+2+2}$	$2 - \frac{2+2+2}{2 \cdot 3}$	$\frac{3}{2+2} + \frac{2}{2 \cdot 2 \cdot 2}$
2-mal die 3	$2 - \frac{3}{3}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2}$	$2 - \frac{2+3}{2+3}$	$\frac{2+2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3}{2}$	$\frac{2+2+2+2}{2+3+3}$	$\frac{2+2}{2+2+2} + \frac{2}{3+3}$
3-mal die 3	$\frac{3+3}{3} : 2$	$\frac{2}{3+3} + \frac{2}{3}$	$\frac{2 \cdot 3}{2} : \frac{3+3}{2}$	$\frac{2+2}{2 \cdot 3} + \frac{3-2}{3}$	$\frac{3 \cdot 3}{2+2} - \frac{3+2}{2+2}$	$\frac{3 \cdot 3+3}{2+2+2+2+2+2}$
4-mal die 3	$\frac{3}{2} - \frac{3}{3+3}$	$\frac{3}{3+3} + \frac{3-2}{2}$	$\frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{3}{2} - 2 - 3$	$\frac{3}{2 \cdot 2} + \frac{3-2}{3+3-2}$	$\frac{3+3}{2 \cdot 3} + (2-2) \cdot \frac{2 \cdot 2}{3}$	$\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 - 2}{3+3} : \frac{2 \cdot 3}{2 \cdot 3}$
5-mal die 3	$\frac{3}{3+3+3} + \frac{2}{3}$	$\frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 3}{3 \cdot 3 + 3}$	$\frac{3+3}{2+3} \cdot \frac{2+3}{2 \cdot 3}$	$\frac{2 \cdot 3}{2+3+3} + \frac{2}{2+3+3}$	$\frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 3} + \frac{3-2}{2 \cdot 3}$	$\frac{3}{2+2+2} + \frac{2}{3+3} + \frac{3-2}{2 \cdot 3}$
6-mal die 3	$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3}{3+3+3} - 2$	$\frac{3}{3 \cdot 3 + 3} \cdot \frac{2 \cdot 2 \cdot 3}{3}$	$\frac{2+3}{2+2} - \frac{3}{3+3+3+3}$	$\frac{3 \cdot 3}{3+3} : \frac{3+2 \cdot 3}{2+2+2}$	$\frac{3}{2+2+2} + \frac{3:3}{3+3} + \frac{2}{2 \cdot 3}$	$\frac{3-2}{2+3} + \frac{3}{2+2+3+3} + \frac{3-2}{2}$