

### Sachanalyse

Eine natürliche Zahl  $n$  sei hier eine Zahl aus  $\{1; 2; 3; \dots\}$ . Im Folgenden sind einige Erkenntnisse zu den Quadratzahlen  $n^2$  dargelegt, die in der vorliegenden Stunde geeignet thematisiert werden.

#### 1. Summe ungerader Zahlen:

$$\text{Für alle } n \text{ gilt: } n^2 = \sum_{k=1}^n (2k-1).$$

In Worten:  $n^2$  ist die Summe der ersten  $n$  ungeraden Zahlen. Beispiel:  $4^2 = 1 + 3 + 5 + 7$ .

Beweis: durch vollständige Induktion unter Verwendung der Umformung  $(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$ .

#### 2. Vier-Quadratzahlen-Satz von LAGRANGE

Jede natürliche Zahl kann als Summe von höchstens vier Quadratzahlen geschrieben werden.

Ohne Beweis, dafür mit einem Beispiel:  $111 = 100 + 9 + 1 + 1 = 10^2 + 3^2 + 1^2 + 1^2$

#### 3. Pythagoreische Tripel

Ein Tripel  $(x; y; z)$  natürlicher Zahlen  $x, y$  und  $z$  heißt pythagoreisches Tripel, wenn gilt:  $x^2 + y^2 = z^2$ .

Nach der Umkehrung des Satzes von PYTHAGORAS ist ein Dreieck mit den Seitenlängen  $x, y$  und  $z$  eines pythagoreischen Tripels rechtwinklig. Es gilt<sup>1</sup>:

Für natürliche  $u$  und  $v$  mit  $u > v$  erhält man mit  $x = u^2 - v^2$ ;  $y = 2uv$ ;  $z = u^2 + v^2$  ein pythagoreisches Tripel.

Beweis: Zu zeigen ist, dass gilt  $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$ .

Dies gelingt mithilfe der Binomischen Formeln:  $u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2$ .

Offensichtlich gilt:

- Ist  $(x, y, z)$  ein pythagoreisches Tripel, so ist auch  $(y, x, z)$  ein pythagoreisches Tripel.
- Ist  $(x, y, z)$  ein pythagoreisches Tripel, so kann man mit  $(n \cdot x, n \cdot y, n \cdot z)$  weitere davon „ableiten“. Beispiel: Mit  $(3; 4; 5)$  sind auch  $(6; 8; 10)$ ,  $(9; 12; 15)$  usw. pythagoreische Tripel. Mit obigem Satz erhält man alle nicht abgeleiteten (= teilerfremden) pythagoreischen Tripel, aber nur einen Teil der abgeleiteten. Z.B. erhält man das abgeleitete Tripel  $(9; 12; 15)$  nicht.

Die weitere zugehörige Theorie soll hier nicht entfaltet werden.

Beispiele:

$u =$	2	3	3	4	4	4
$v =$	1	1	2	1	2	3
Pythagoreisches Tripel:	(3; 4; 5)	(8; 6; 10)	(5; 12; 13)	(15; 8; 17)	(12; 16; 20)	(7; 24; 25)

Sortierte teilerfremde pythagoreische Tripel bis  $15^2$  gibt es nur zwei:  $(3; 4; 5)$  und  $(5; 12; 13)$ .

<sup>1</sup> Dies war schon vor mehr als 2000 Jahren bekannt, vgl. Euklid: Die Elemente: Buch I–XIII. Nach Heibergs Text aus dem Griechischen übersetzt und herausgegeben von Clemens Thaer. Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt 1980<sup>7</sup>; Zehntes Buch (§ 28a); S. 232f

#### 4. Pythagoreische Quadrupel

Ein Quadrupel  $(x; y; z; w)$  natürlicher Zahlen  $x, y, z$  und  $w$  heißt pythagoreisches Quadrupel, wenn gilt:  $x^2 + y^2 + z^2 = w^2$ . Man benötigt es z.B., wenn man nach Quadern mit ganzzahligen Abmessungen und ganzzahliger Länge der Raumdiagonalen sucht.

Hier die neun teilerfremden pythagoreischen Quadrupel, sortiert in Gleichungsform, und ihre fünf Ableitungen bis  $15^2$ :

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$	$1^2 + 4^2 + 8^2 = 9^2$			
$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$	$2^2 + 4^2 + 4^2 = 6^2$	$2^2 + 5^2 + 14^2 = 15^2$	$2^2 + 6^2 + 9^2 = 11^2$	$2^2 + 10^2 + 11^2 = 15^2$
$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$	$3^2 + 6^2 + 6^2 = 9^2$			
$4^2 + 4^2 + 7^2 = 9^2$	$4^2 + 6^2 + 12^2 = 14^2$	$4^2 + 8^2 + 8^2 = 12^2$		
$5^2 + 10^2 + 10^2 = 15^2$				
$6^2 + 6^2 + 7^2 = 11^2$				

#### 5. Anzahl der Quadrate in einem NxN-Quadrat<sup>2</sup>

In einem NxN-Quadrat gibt es  $N^2 + (N-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2$  Quadrate.

Beispiel: In einem 4x4-Quadrat (vgl. Abbildung rechts) gibt es  $4^2$  (1x1-Quadrate) +  $3^2$  (2x2-Quadrate) +  $2^2$  (3x3-Quadrate) +  $1^2$  (4x4-Quadrat) = 30 Quadrate.

Beweis: durch vollständige Induktion.

Induktionsverankerung: Die Behauptung ist offensichtlich richtig für  $N = 1$ .

Induktionsannahme: Sie sei richtig für  $N$ .

Induktionsschluss: Zeige, dass sie dann auch für  $N+1$  richtig ist.

Es gilt:

Anzahl der 1x1-Quadrate im NxN-Quadrat = Anzahl der 2x2-Quadrate im  $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat

Anzahl der 2x2-Quadrate im NxN-Quadrat = Anzahl der 3x3-Quadrate im  $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat

(vgl. Abbildung unten für  $N = 3$ ) ...

Anzahl der KxK-Quadrate im NxN-Quadrat = Anzahl der  $(K+1) \times (K+1)$ -Quadrate im  $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat

...

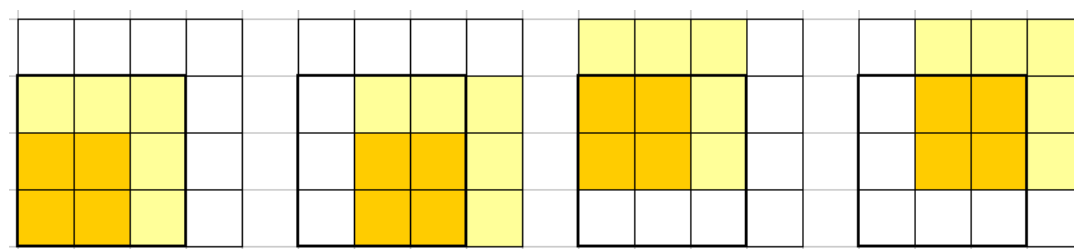
Anzahl der NxN-Quadrate im NxN-Quadrat = Anzahl der  $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrate im  $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat

Insgesamt gilt:

Anzahl aller Quadrate im  $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat =

Anzahl aller Quadrate im NxN-Quadrat + Anzahl der 1x1-Quadrate im  $(N+1) \times (N+1)$ -Quadrat =

$N^2 + (N-1)^2 + \dots + 2^2 + 1^2 + (N+1)^2$  ■



<sup>2</sup> Verkürzende Schreibweise: Gemeint ist ein NxN-Quadrat-Gitter.

### Infoblatt

Für die vorliegende Stunde wird davon ausgegangen, dass die Quadratzahlen bereits im Regelunterricht behandelt wurden. Wenn nicht, wird man dem ersten Teil mehr Zeit einräumen müssen. Die Kenntnis der Quadratzahlen wird in unterschiedlichen Kontexten „umgewälzt“, damit ergeben sich insgesamt die folgenden **Ziele**:

- die Quadratzahlen von  $1^2$  bis  $15^2$  wiedergeben und erkennen
- Kopfrechnen üben
- systematisches Vorgehen üben (z.B. bei der Suche nach Quadratzahlendarstellungen)
- mathematische Gesetzmäßigkeiten entdecken und deren Begründung (ansatzweise an Beispielen – ohne die Verwendung von Variablen) verstehen

Der **Ablauf** gliedert sich wie folgt:

- Die Quadratzahlen werden im fragendentwickelnden Unterricht „vorwärts und rückwärts“ wiederholt, z.B. so: Die Lehrkraft hat 15 Blätter (am besten kartoniert wegen der Steifigkeit) jeweils mit der Grundzahl auf einer Seite und der zugehörigen Quadratzahl auf der anderen Seite beschriftet und zeigt in bunter Reihung jeweils ein Blatt mit einer beliebigen Seite. Die Schülerinnen und Schüler (SuS) sagen die Zahl auf der Rückseite des Blattes – zur Grundzahl also die Quadratzahl und umgekehrt<sup>3</sup>.
- **Binnendifferenzierung**: Je nach zur Verfügung stehender Zeit und Leistungsfähigkeit der Lerngruppe wird das Arbeitsblatt in Einzel- bzw. Teamarbeit oder teilweise bzw. ansatzweise im fragendentwickelnden Unterricht bearbeitet. Die Lehrkraft lobt und unterstützt, berät aber nur zurückhaltend.
- Bei den Aufgaben 5 und 6 wird man, ausgehend vom Ergebnis, es zunächst mit der nächstkleineren Quadratzahl als ersten Summanden probieren. Wenn das keine Summendarstellung liefert mit der nächstkleineren Quadratzahl usw.; desgleichen beim zweiten Summanden usw.
- Zum Abschluss werden die Ergebnisse verglichen, ggf. wird der Zusammenhang zwischen den Aufgaben 3 und 4 vertieft und die Vorgehensweise bei den Aufgaben 5 und 6 reflektiert.

Mögliche **Erweiterungen** des Programms:

- Die Liste der Quadratzahlen bis  $20^2 = 400$  erweitern mit Hilfe der ungeraden Zahlen:  
 $15^2 = 14^2 + 29$ , also  $16^2 = 15^2 + 31 = 225 + 31 = 256$  usw.  
 bzw.  $16^2 = 15^2 + 2 \cdot 15 + 1 = 256$  (vgl. Arbeitsblatt Aufgabe 4) usw.
- Beliebige Zahlen als Summe von höchstens vier Quadratzahlen<sup>4</sup> darstellen lassen (Satz von LAGRANGE – vgl. Sachanalyse),  
 z.B.  $55 = 49 + 4 + 1 + 1$  oder  $111 = 100 + 9 + 1 + 1$  oder  $188 = 144 + 36 + 4 + 4$   
 oder  $240 = 196 + 36 + 4 + 4$ .

<sup>3</sup> Man könnte auch noch einige Blätter mit Zahlen beschriften, die keine Quadratzahlen sind ☹. SuS müssten dies erkennen und dann sagen: „Keine Quadratzahl!“.

<sup>4</sup> Nach dem Drei-Quadrate-Satz von GAUß kommt man mit drei Quadratzahlen nicht aus für Zahlen der Form  $4^a \cdot (8 \cdot b + 7)$  mit  $a$  bzw.  $b = 0; 1; 2; \dots$ . Das wäre also die Zahlen 7; 15; 23; 28; 31; 39; 47; 55; ... . Für die Zahl 7 kann man das durch Nachrechnen leicht bestätigen. 111 ( $a = 0$  und  $b = 13$ ); 188 ( $a = 1$  und  $b = 5$ ) und 240 ( $a = 2$  und  $b = 1$ ) sind auch solche Zahlen.

Übersicht über die ersten 15 Quadratzahlen:

$1^2$	$2^2$	$3^2$	$4^2$	$5^2$	$6^2$	$7^2$	$8^2$	$9^2$	$10^2$	$11^2$	$12^2$	$13^2$	$14^2$	$15^2$
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

### 1. Einerziffern von Quadratzahlen:

Einige der zehn Ziffern 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 0 kommen nicht als Einerziffern von Quadratzahlen vor.

Diese vier Ziffern kommen nicht vor, **trage** sie **ein**:

### 2. Quadratzahlen erkennen:

Verdecke die Tabelle der Quadratzahlen oben und **streiche** aus der Liste die Zahlen, die **keine Quadratzahlen** sind: 24; 121; 66; 196; 36; 96; 125; 88; 200; 169; 44; 333

### 3. Quadratzahlen als Summe ungerader Zahlen:

Lars hat eine Entdeckung gemacht, er sagt:

„Ich addiere die ersten 3 ungeraden Zahlen:  $1 + 3 + 5$  und erhalte 9, und  $3^2$  ist auch 9.“

Lisa sagt:

„Ich probiere das einmal mit der 4.“

Ich addiere die ersten 4 ungeraden Zahlen:  $1 + 3 + 5 + 7$  und erhalte 16, und  $4^2$  ist auch 16.“

**Probiere** du es mit der Zahl 5.

..... Stimmt es? .....

**Probiere** du es mit der Zahl 9.

..... Stimmt es? .....

### 4. Wie kommt man von einer Quadratzahl zur nächsten?

**Lies** den Text aufmerksam durch und **betrachte** dabei die Zeichnung rechts:

$1^2 = 1$ , nämlich 1 Karo links unten (Karo = Quadrätchen)

$2^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 = 1^2 + 3$ , nämlich  $1^2$  Karo links unten und zusätzlich

1 Karo darüber, 1 Karo rechts und 1 Karo in der Ecke rechts oben

$3^2 = 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 = 2^2 + 5$ , nämlich  $2^2$  Karos links unten und zusätzlich

2 Karos darüber, 2 Karos rechts und 1 Karo in der Ecke rechts oben

4	4	4	4	
3	3	3	4	
2	2	3	4	
1	2	3	4	

**Trage** die fehlenden Zahlen und die Antwort (unten) **ein**:

$4^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 3^2 + 7$ , nämlich  $3^2$  Karos links unten und zusätzlich

..... Karos darüber, ..... Karos rechts und ..... Karo in der Ecke rechts oben

$5^2 = 4^2 + \dots = 4^2 + \dots$ , nämlich ..... Karos links unten und zusätzlich

..... Karos darüber, ..... Karos rechts und ..... Karo in der Ecke rechts oben

Frage: Wie kommt man von einer Quadratzahl zur nächsten?

Antwort: .....

Übersicht über die ersten 15 Quadratzahlen:

$1^2$	$2^2$	$3^2$	$4^2$	$5^2$	$6^2$	$7^2$	$8^2$	$9^2$	$10^2$	$11^2$	$12^2$	$13^2$	$14^2$	$15^2$
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

### 5. Quadratzahl als Summe zweier Quadratzahlen

Es gilt  $289 = 225 + 64$ .

Im Bereich bis 225 gibt es aber nur vier Quadratzahlen, die die Summe von zwei anderen Quadratzahlen sind. **Trage** passende Quadratzahlen **ein**.

$$25 = \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}}$$

$$100 = \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}}$$

$$169 = \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}}$$

$$225 = \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}}$$

### 6. Quadratzahl als Summe dreier Quadratzahlen

Es gilt  $121 = 81 + 36 + 4$ .

Im Bereich bis 225 gibt es einige weitere Quadratzahlen, die die Summe von drei anderen Quadratzahlen sind. **Trage** passende Quadratzahlen **ein**.

$$9 = \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}}$$

$$36 = \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}}$$

$$49 = \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}}$$

$$81 = \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}}$$

$$144 = \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}}$$

$$169 = \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}}$$

$$196 = \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}}$$

$$225 = \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}} + \boxed{\phantom{00}}$$

### 7. Anzahl der Quadrate

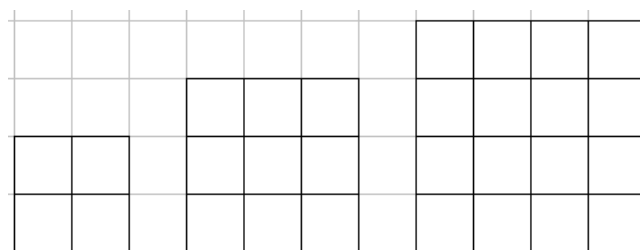
In einem 2x2-Quadrat (linke Abbildung) gibt es insgesamt fünf Quadrate, nämlich vier 1x1-Quadrate und ein 2x2-Quadrat.

a) Wie viele Quadrate gibt es in einem 3x3-Quadrat (mittlere Abbildung)? .....

b) Wie viele Quadrate gibt es in einem 4x4-Quadrat (rechte Abbildung)? .....

Schreibe zunächst einzeln auf, wie viele 1x1-Quadrate (.....), wie viele 2x2-Quadrate (.....), wie viele 3x3-Quadrate (.....) und wie viele 4x4-Quadrate (.....) es sind.

c) Wie viele Quadrate gibt es vermutlich in einem 5x5-Quadrat? .....



Übersicht über die ersten 15 Quadratzahlen:

$1^2$	$2^2$	$3^2$	$4^2$	$5^2$	$6^2$	$7^2$	$8^2$	$9^2$	$10^2$	$11^2$	$12^2$	$13^2$	$14^2$	$15^2$
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

### 1. Einerziffern von Quadratzahlen:

Einige der zehn Ziffern 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 0 kommen nicht als Einerziffern von Quadratzahlen vor.

Diese Ziffern kommen nicht vor, **trage** sie ein:

2	3	7	8
---	---	---	---

### 2. Quadratzahlen erkennen:

Verdecke die Tabelle der Quadratzahlen oben und **streiche** aus der Liste die Zahlen, die **keine Quadratzahlen** sind: ~~24~~; 121; ~~66~~; ~~196~~; 36; ~~96~~; ~~125~~; ~~88~~; ~~200~~; 169; 44; ~~333~~

### 3. Quadratzahlen als Summe ungerader Zahlen:

Lars hat eine Entdeckung gemacht, er sagt:

„Ich addiere die ersten **3** ungeraden Zahlen:  $1 + 3 + 5$  und erhalte **9**, und  **$3^2$**  ist auch **9**.“

Lisa sagt:

„Ich probiere das einmal mit der **4**.“

Ich addiere die ersten **4** ungeraden Zahlen:  $1 + 3 + 5 + 7$  und erhalte **16**, und  **$4^2$**  ist auch **16**.“

**Probiere** du es mit der Zahl **5**.

Summe der ersten **5** ungeraden Zahlen:  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \mathbf{25}$  und auch  **$5^2 = 25$**  Stimmt es? **Ja**.

**Probiere** du es mit der Zahl **9**.

Summe der ersten **9** ungeraden Zahlen:  $1 + 3 + \dots + 13 + 15 + 17 = \mathbf{81}$  und auch  **$9^2 = 81$**  Stimmt es? **Ja**.

### 4. Wie kommt man von einer Quadratzahl zur nächsten?

**Lies** den Text aufmerksam durch und **betrachte** dabei die Zeichnung rechts:

$1^2 = 1$ , nämlich 1 Karo links unten (Karo = Quadrätchen)

$2^2 = 1^2 + \mathbf{2 \cdot 1 + 1} = \mathbf{1^2} + \mathbf{3}$ , nämlich  $1^2$  Karo links unten und zusätzlich

**1** Karo darüber, **1** Karo rechts und **1** Karo in der Ecke rechts oben

$3^2 = 2^2 + \mathbf{2 \cdot 2 + 1} = \mathbf{2^2} + \mathbf{5}$ , nämlich  $2^2$  Karos links unten und zusätzlich

**2** Karos darüber, **2** Karos rechts und **1** Karo in der Ecke rechts oben

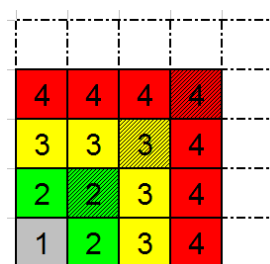
**Trage** die fehlenden Zahlen und die Antwort (unten) **ein**:

$4^2 = 3^2 + \mathbf{2 \cdot 3 + 1} = \mathbf{3^2} + \mathbf{7}$ , nämlich  $3^2$  Karos links unten und zusätzlich

**3** Karos darüber, **3** Karos rechts und **1** Karo in der Ecke rechts oben

$5^2 = 4^2 + \mathbf{2 \cdot 4 + 1} = \mathbf{4^2} + \mathbf{9}$ , nämlich  $4^2$  Karos links unten und zusätzlich

**4** Karos darüber, **4** Karos rechts und **1** Karo in der Ecke rechts oben



Frage: Wie kommt man von einer Quadratzahl zur nächsten?

Antwort: **Man addiert immer die nächste ungerade Zahl.**

Übersicht über die ersten 15 Quadratzahlen:

$1^2$	$2^2$	$3^2$	$4^2$	$5^2$	$6^2$	$7^2$	$8^2$	$9^2$	$10^2$	$11^2$	$12^2$	$13^2$	$14^2$	$15^2$
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

### 5. Quadratzahl als Summe zweier Quadratzahlen

Es gilt  $289 = 225 + 64$ .

Im Bereich bis 225 gibt es aber nur vier Quadratzahlen, die die Summe von zwei anderen Quadratzahlen sind. **Trage** passende Quadratzahlen **ein**.

$$25 = \boxed{16} + \boxed{9}$$

$$100 = \boxed{64} + \boxed{36}$$

$$169 = \boxed{144} + \boxed{25}$$

$$225 = \boxed{144} + \boxed{81}$$

### 6. Quadratzahl als Summe dreier Quadratzahlen

Es gilt  $121 = 81 + 36 + 4$ .

Im Bereich bis 225 gibt es einige weitere Quadratzahlen, die die Summe von drei anderen Quadratzahlen sind. **Trage** passende Quadratzahlen **ein**.

$$9 = \boxed{4} + \boxed{4} + \boxed{1}$$

$$36 = \boxed{16} + \boxed{16} + \boxed{4}$$

$$49 = \boxed{36} + \boxed{9} + \boxed{4}$$

$$81 = \boxed{64} + \boxed{16} + \boxed{4}$$

$$144 = \boxed{64} + \boxed{64} + \boxed{16}$$

$$169 = \boxed{144} + \boxed{16} + \boxed{9}$$

$$196 = \boxed{144} + \boxed{36} + \boxed{16}$$

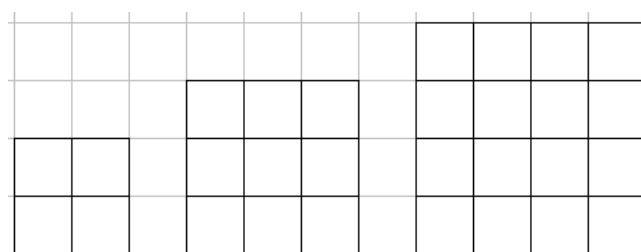
$$225 = \boxed{196} + \boxed{25} + \boxed{4}$$

### 7. Anzahl der Quadrate

In einem 2x2-Quadrat (linke Abbildung) gibt es insgesamt fünf Quadrate, nämlich vier 1x1-Quadrate und ein 2x2-Quadrat.

a) Wie viele Quadrate gibt es in einem 3x3-Quadrat (mittlere Abbildung)? **14**

b) Wie viele Quadrate gibt es in einem 4x4-Quadrat (rechte Abbildung)? **30**



Schreibe zunächst einzeln auf, wie viele 1x1-Quadrate (**16**), wie viele 2x2-Quadrate (**9**), wie viele 3x3-Quadrate (**4**) und wie viele 4x4-Quadrate (**1**) es sind.

c) Wie viele Quadrate gibt es vermutlich in einem 5x5-Quadrat?  **$25 + 16 + 9 + 4 + 1 = 55$**