VECTOR STIFTUNG

Seminar Stuttgart

Kursleitermaterialien für die 7. Klasse

Ein Programm der Vector Stiftung in Kooperation mit dem Seminar für Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte Stuttgart (Abteilung Gymnasium)

Diese Publikation ist lizenziert unter einer Creative Commons Namensnennung - Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International Lizenz (CC BY-SA 4.0): Detaillierte Informationen sind im Internet über https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.de abrufbar.

Materialsammlung zum Programm „Mkid – Mathe kann ich doch!“
Seminar für Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte Stuttgart /Vector Stiftung

1. Wichtige Hinweise zu den Materialien

Die hier veröffentlichten Materialien wurden von Lehrenden des Seminars Stuttgart entwickelt, um den Unterricht in den Kursen des Programms „Mkid – Mathe kann ich doch!“ zu unterstützen. Sie können selbstverständlich auch in anderen Zusammenhängen verwendet werden. Wir möchten aber eindringlich darauf hinweisen, dass sie nicht an Schulen im Unterricht eingesetzt werden sollen, an denen Mkid-Kurse durchgeführt werden. Es wäre kontraproduktiv, wenn die teilnehmenden Schülerinnen und Schüler die Materialien schon aus dem Unterricht kennen würden.

Im Gegensatz zu „normalen“ Unterrichtsmaterialien sind die Inhalte nur Vehikel zur Veränderung von Einstellungen. Deshalb ist das übergeordnete Ziel immer das Kompetenzerleben der Lernenden und nicht die mathematische Perfektion bzw. die inhaltliche Vollständigkeit. Misserfolge und Unverständnis des Vorgehens würden den Zielen des Programms entgegenstehen. Es gilt der Grundsatz „Weniger ist manchmal mehr“. Wenn also alle Würfelnetze gesucht sind, dann kann es situationsbedingt sinnvoll sein, mit einigen Würfelnetzen zufrieden zu sein und die Vollständigkeit nicht weiter zu thematisieren.

Das Programm Mkid richtet sich an Schülerinnen und Schüler des mittleren Leistungssegments der Klassen 6 und 7. Insofern handelt es sich um je ein Materialienpaket für diese beiden Klassenstufen. Neben Mathematik-Themen enthalten die Pakete auch Materialien zum Programmieren und zur Physik. Insofern kann man Mkid auch als „MINT kann ich doch“ interpretieren. Wir haben uns auf diese beiden Klassenstufen konzentriert, weil aus Erfahrung dort die meisten Schülerinnen und Schüler für die Mathematik verloren gehen.

Die Materialien bestehen in der Regel aus einem Arbeitsblatt, den zugehörigen Lösungen, didaktischen Kommentaren und einem möglichen Unterrichtsverlauf. Sie sind also sehr detailliert ausgearbeitet. Trotzdem muss die Lehrkraft individuell auf die jeweilige Lerngruppe reagieren und das Vorgehen entsprechend anpassen. Sie sind für eine Unterrichtstunde zwischen 45 Minuten und 90 Minuten gedacht und durch Kürzungen bzw. Erweiterungen passend gestaltbar.

Das Urheberrecht der Materialien liegt bei den Autoren. Die Materialien dürfen ohne Einschränkung im Unterricht verwendet werden und dazu auch beliebig verändert werden. Eine kommerzielle Nutzung ist hingegen ausgeschlossen.

Im Folgenden wird der pädagogisch-didaktische Hintergrund des Programms beschrieben. Er dient dazu, die Materialien richtig einzuordnen.

2. Das Programm „Mkid - Mathe kann ich doch!“

„Das brauchen Sie mir gar nicht zu erklären, ich verstehe das sowieso nicht." Wie oft hören Mathematik-Lehrkräfte diesen Satz in ihrem Unterricht! Eltern verzweifeln, weil ihre Kinder jegliche Art von Hilfe ablehnen. Was steckt dahinter?

Fragt man Schülerinnen und Schüler, in welchen Fächern es die gerechtesten Noten gibt, dann liegt Mathematik neben Chemie und Physik auf den vorderen Plätzen. Das ist nicht weiter verwunderlich, weil die Ergebnisse von Mathematikaufgaben besonders objektiv bewertet werden können. Da gibt es in der Regel keine Diskussionen. Im Unterrichtsgespräch zeigt sich in diesen Fächern auch sehr schnell, ob man den Inhalt verstanden hat.

In der Pubertät hinterfragen junge Menschen ihre Fähigkeiten, ihr Aussehen, sich selbst. Hinzu kommt, dass die Entwicklung kognitiver Fähigkeiten unterschiedlich schnell verläuft. Im Unterricht der Klasse 6, die gewöhnlich mit dem Beginn der Pubertät zusammenfällt, wird wenig Rücksicht darauf genommen, wie weit das Abstraktionsvermögen der Schülerinnen und Schüler entwickelt ist. Deshalb haben diejenigen Misserfolgserlebnisse, für die manche Aufgaben zu früh im Hinblick auf ihre kognitive Entwicklung gestellt werden. In Kombination mit der Einsicht, dass die Bewertung ihrer Leistung gerecht ist, kann nur logisch gefolgert werden, dass es an der eigenen Begabung liegt: Mathe kann ich nicht!

Aufgrund der vermeintlich fehlenden Begabung wenden sich Schülerinnen und Schüler deshalb lieber anderen Fächern zu. Das hat fatale Folgen, weil die Mathematik ein Gedankengebäude ist, bei dem fehlende Bausteine das Gesamtwerk zum Einsturz bringen. Es genügen wenige Misserfolge, um eine Abwärtsspirale in Gang zu setzen, die kaum noch aufzuhalten ist.
Auf diese Weise verlieren wir potenziell mathematisch-naturwissenschaftlich erfolgreiche Schülerinnen und Schüler für immer!

Mit dem Programm „Mkid – Mathe kann ich doch!“ wollen wir erreichen, dass Schülerinnen und Schüler, die Potenzial für Mathematik und Naturwissenschaften haben, dieses aber nicht nutzen, sich als kompetent in diesen Fächern erleben. Ihr Selbstbild soll sich so verändern, dass sie das naturwissenschaftliche Profil bzw. ein naturwissenschaftliches Wahlpflichtfach wählen. In einer mehrtägigen Fortbildung lernen die Kursleiter anhand der hier vorgestellten Materialien, wie sie das Selbstkonzept der Schülerinnen und Schüler nachhaltig stärken. Das Erlernte setzen sie in AGs an ausgewählten Schulen in Baden-Württemberg um.

Den Schulen bleibt die schwierige Aufgabe, die richtigen Schülerinnen und Schüler auszuwählen. Dies kann nur über die Eltern gelingen, weil wohl niemand, der Mathematik ablehnend gegenübersteht, freiwillig in eine Mathe-AG gehen wird. Um diese Schwierigkeit ganz zu umgehen, haben einige Schulen Mkid in den regulären Förderunterricht der Klasse 6 integriert. Die Mkids bilden dann eine eigene Fördergruppe.

Wie stärkt man nun das Selbstkonzept in Mathematik? Ausgehend von der Motivationstheorie von Deci und Ryan legen wir Wert auf Kompetenzerleben, soziale Eingebundenheit und Selbstbestimmtheit. Letztere erfordert einen Impuls der Eltern. Im Laufe der Zeit sollen die Schülerinnen und Schüler aber aus eigenem Antrieb die Mkid-AG besuchen.

Das Kompetenzerleben verlangt schwierige Aufgaben sowie Strategien, mit denen man diese selbstständig lösen kann. Schwierig müssen die Aufgaben sein, weil man nur dann ein echtes Erfolgserlebnis hat. Eine typische Aufgabe stammt z.B. aus dem Landeswettbewerb Mathematik: „Wie lautet die letzte Ziffer von 7^{2017}?".
Die Strategie ist: „Wenn dir etwas zu schwierig ist, dann versuche es zu vereinfachen." Ein Hochspringer, der 1,8 m überspringen will, wird nicht hundertmal die Latte reißen, sondern zuerst mit einer

niedrigeren Höhe beginnen, seine Technik verbessern und sich dann langsam an sein Ziel heranarbeiten. In diesem Sinne berechnet man $7^1=7$, $7^2=49$, $7^3=343$ und bemerkt beim schriftlichen Multiplizieren, dass sich die letzte Ziffer immer nur aus der letzten Ziffer der vorherigen Potenz ergibt. Es ist $7^4 = 7^3 \cdot 7 = 343 \cdot 7 = \ldots1$, wegen $3 \cdot 7 = 21$. So erhält man schnell die Endziffern vieler Potenzen: $7^1=7$, $7^2=\ldots9$, $7^3=\ldots3$, $7^4=\ldots1$, $7^5=\ldots7$, $7^6=\ldots9$, $7^7=\ldots3$, $7^8=\ldots1$,…
Die Endziffern wiederholen sich. Nun muss man nur noch bemerken, dass die Endziffer 1 ist, wenn die Hochzahl durch 4 teilbar ist. 2016 ist durch 4 teilbar, also muss die Endziffer von 7^{2017} die Ziffer nach der 1 in der Folge der Endziffern sein. Damit ist die Endziffer von 7^{2017} eine 7.

Tatsächlich hilft diese Strategie bei vielen Mathematik-Aufgaben und auch im täglichen Leben. Die Leitlinie zum Kompetenzerleben lautet: „Wer die richtigen Strategien kennt, kann schwierige Probleme lösen. Mathe kann ich doch!"

Die zweite Komponente „soziale Eingebundenheit" ist ebenfalls nicht unerheblich. Leider gibt es ein hartnäckiges Vorurteil zum Fach Mathematik.

1. Der Mathestreber hat fettige Haare und kommt beim Weitsprung kaum über 1,20 Meter.
2. Cool und kreativ sein und gut in Mathe geht einfach nicht.
3. Es gibt ja Taschenrechner.

Quelle: Süddeutsche Zeitung 6/2006

Deshalb wollen wir durch Ausflüge ein Wir-Gefühl in der Gruppe erzeugen. Die Mkids erleben gemeinsam, dass Mathematik und Naturwissenschaften Spaß machen können. Unsere Erfahrungen zeigen jedenfalls, dass die Schülerinnen und Schüler auch deshalb gerne in die AG gehen, weil sie sich als Teil der Gruppe wohl fühlen.

Damit sind die Ziele von Mkid kurz dargestellt. Wir würden uns freuen, wenn die Materialien möglichst viele Schulen anregen, am Mkid-Projekt teilzunehmen. Wenn dabei die Ideen des Projekts auch auf den Regelunterricht abfärben, werden vielleicht weniger Menschen der Mathematik und den Naturwissenschaften ablehnend gegenüberstehen.

Mkid Themenüberblick Klasse 7

Die hier angegebene Reihenfolge stellt einen möglichen Gang durch die Themen dar und die Reihenfolge der Themen kann in der Regel problemlos verändert werden. Ausnahme: 7-25 LED-Smileys sollte vor 7-26 bis 7-28 Selbsthalteschaltung behandelt werden, da die in 7-25 eingeführte Löttechnik in 7-26 bis 7-28 benötigt wird.
Je nach Vorkenntnissen der Schülerinnen und Schüler muss man bei den Themen, die abhängig vom Regelunterricht sind, umgruppieren.
Die PH-Themen sollten erst ab Januar zum Tragen kommen.

Abkürzungen:
Fächer: INF … Informatik M … Mathematik PH … Physik
Schularten: RS … Realschule GMS … Gemeinschaftsschule
Autoren vom Seminar für Ausbildung und Fortbildung der Lehrkräfte (Gymnasium) Stuttgart (kurz: Seminar AFL (Gymnasium) Stuttgart):
Btl … Gerhard Brüstle Hoc … Detlef Hoche Kle … Ute Kleinknecht The … Dr. Matthias Theis

Bei Fragen oder Hinweisen zu diesem Material mailen Sie bitte gerne an Frau Luger von der Vector Stiftung: Christina.Luger@vector-stiftung.de

Nr.	Thema	Fach	Autor	direkter Bezug zum Bildungsplan Mathematik 2016	Anzahl der Dateien	Anzahl der Seiten	geeignet für RS/GMS?	Bemerkungen
Mkid 7-01B	**tropfender Wasserhahn**	M	Btl		3	3	ja	Strategie: ein Problem in Teilprobleme zerlegen – realistisches Abschätzen von Sachverhalten, Alltagswissen (Fermi-Aufgabe)
Mkid 7-01	**tropfender Wasserhahn**	M	Kle		4	7		
Mkid 7-02B	**Kombinatorik 1**	M	Btl		3	3	ja	Etwas Kombinatorik gehört zur Allgemeinbildung: *n Fakultät* Strategie: - an überschaubaren Verhältnissen lernen
Mkid 7-02	**Kombinatorik 1**	M	Btl		3	3		
Mkid 7-03B	**Kombinatorik 2**	M	Btl		3	3	ja	Desgleichen: *n über k* Strategien: - an überschaubaren Verhältnissen lernen - von Beispielen zur allgemeinen Erkenntnis
Mkid 7-03	**Kombinatorik 2**	M	Btl		3	3		
Mkid 7-04B	**Soma-Würfel**	M	Btl		3	3	ja	Bau von Körpern mit den sieben Soma-Bausteinen – Raumanschauung trainieren (Bausteine: Fa. Betzold)
Mkid 7-04	**Soma-Würfel**	M	Btl		3	4		

Nr.	Thema	Fach	Autor	direkter Bezug zum Bildungsplan Mathematik 2016	Anzahl der Dateien	Anzahl der Seiten	geeignet für RS/GMS?	Bemerkungen
Mkid 7-05 bis 7-07	**Labyrinth**	INF	The	Programmieren	8	18	ja	mit der visuellen Programmiersprache Scratch; Anleitung für unterschiedliche Programm-Versionen
Mkid 7-08B	**Schnittpunkte**	M	Btl		5	6	ja	Anzahl der Schnittpunkte s von n Geraden Problemlöse-Strategie: Von Beispielen zur allgemeinen Erkenntnis (hier: Formel)
Mkid 7-08	**Schnittpunkte**	M	Btl		5	6		
Mkid 7-09B	**Zaubertricks 1**	M	Btl	Variable und Terme	3	3	ja	Zahlen-Zaubertricks vom Typ „Denke dir eine Zahl …“ lassen sich oft mithilfe von Termumformungen erklären
Mkid 7-09	**Zaubertricks 1**	M	Btl	Variable und Terme	3	3		
Mkid 7-10B	**Zaubertricks 2**	M	Btl	Variable und Terme	4	5	ja	Zahlen-Zaubertricks vom Typ „Denke dir eine Zahl …“ lassen sich oft mithilfe von Termumformungen erklären
Mkid 7-10	**Zaubertricks 2**	M	Btl	Variable und Terme	3	3		
Mkid 7-11	**Zahlen verstecken**	M	Hoc	Variable und Terme	3	3	ja	Mathematik als internationale Sprache
Mkid 7-12	**Feuertreppen-experiment**	PH	Hoc		4	4	ja	Forschertätigkeit
Mkid 7-13B	**Terme sind cool**	M	Btl	Variable und Terme	5	5	ja	Immer wieder: Sinn und Ziel beim Umgang mit Variablen und Termen
Mkid 7-13	**Terme sind cool**	M	Kle	Variable und Terme	8	9		
Mkid 7-14 bis 7-15	**Experiment-Diagramm-Vorhersage**	PH	The		5	8	ja	diverse Themen zu diesem klassischen Erkenntnis-Dreischritt
Mkid 7-16B	**Was ist in der Box?**	M	Btl	Variable und lineare Gleichungen	4	5	ja	Lineare Gleichungen enaktiv lösen – Hölzer und Schachteln (Fa. Opitec)
Mkid 7-16	**Was ist in der Box?**	M	The	Variable und lineare Gleichungen	4	5		
Mkid 7-17	**Thales & Co.**	M	Hoc	Satz des Thales	4	4	nein	Verallgemeinerungen im Umfeld des Thales-Satzes

Nr.	Thema	Fach	Autor	direkter Bezug zum Bildungsplan Mathematik 2016	Anzahl der Dateien	Anzahl der Seiten	geeignet für RS/GMS?	Bemerkungen
Mkid 7-18B	**Prozentrechnung**	M	Btl	Grundaufgaben der Prozentrechnung	7	7	ja	Allgemeine Strategie zur Erfassung von Mathematikthemen am Beispiel der Prozentrechnung
Mkid 7-18	**Prozentrechnung**	M	Btl	Grundaufgaben der Prozentrechnung	8	8		
Mkid 7-19B	**Sterne**	M	Btl	Winkelsummen-satz	6	6	ja	Problemlösestrategie: Von Beispielen zur allgemeinen Erkenntnis (hier: Formel)
Mkid 7-19	**Sterne**	M	Btl	Winkelsummen-satz	7	8		
Mkid 7-20	**LWM 2007**	M	Hoc	Sätze über Winkel	4	4	nein	Aufgabe aus dem Landeswettbewerb Mathematik Baden-Württemberg (LWM)
Mkid 7-21B	**MiniMax**	M	Btl	Zahlterme, Rechnen	3	4	ja	Ein Zahlterm soll einen großen Wert haben. Vorgabe von Zahlen und Zeichen: Rechnen Immer wieder: erkenntnisgeleitetes systematisches Probieren
Mkid 7-21	**MiniMax**	M	Btl	Zahlterme, Rechnen	3	4		
Mkid 7-22B	**Lineare Funktionen**	M	Btl	lineare Funktionen	3	4	ja	Allgemeine Strategie zur Erfassung von Mathematikthemen am Beispiel der linearen Funktionen
Mkid 7-22	**Lineare Funktionen**	M	Btl	lineare Funktionen	4	5		
Mkid 7-23B	**Lineare Gleichungen**	M	Btl	lineare Gleichungen	5	5	ja	Allgemeine Strategie zur Erfassung von Mathematikthemen am Beispiel der linearen Gleichungen; Umgang mit Gleichungen: Probe (!), Fehlerquellen
Mkid 7-23	**Lineare Gleichungen**	M	Btl	lineare Gleichungen	5	5		
Mkid 7-24B	**Textaufgaben zu linearen Gleichungen**	M	Btl	lineare Gleichungen	4	4	ja	Umgang mit Textaufgaben, die auf eine lineare Gleichung führen; allgemeine Strategie zur Erfassung von Mathematikthemen
Mkid 7-24	**Textaufgaben zu linearen Gleichungen**	M	Btl	lineare Gleichungen	4	4		
Mkid 7-25	**LED-Smileys**	PH	The		5	11	ja	Löten Lötschulung
Mkid 7-26 bis 7-28	**Selbsthalteschaltung**	PH	Hoc		8	11	ja	Basteln und Löten Basisversion: zugehörige Theorie weglassen
Mkid 7-29	**Tabellenkalkulation 1**	INF	Kle	Prozentrechnung	7	14	ja	

Nr.	Thema	Fach	Autor	direkter Bezug zum Bildungsplan Mathematik 2016	Anzahl der Dateien	Anzahl der Seiten	geeignet für RS/GMS?	Bemerkungen
Mkid 7-30B	**Tabellenkalkulation 2**	INF	Btl	Zinsrechnung, Zinseszins	2	2	ja	Leitperspektiven: - Medienbildung - Verbraucherbildung
Mkid 7-30	**Tabellenkalkulation 2**	INF	Kle	Zinsrechnung, Zinseszins	8	15		
Mkid 7-31 bis 7-34	**automatisches Wiederauftauch-boot**	PH	The		4	10	ja	Zum Schuljahresabschluss: mit Wettbewerb
Mkid 7-35B	**Knobelaufgaben-Sammlung**	M	Btl		2	26	ja	als mögliche Puffer in den einzelnen Sitzungen: reiche Auswahl mit unterschiedlichem Schwierigkeitsgrad und Zeitbedarf
Mkid 7-35	**Knobelaufgaben-Sammlung**	M	Btl		2	22		
Mkid 7-36	**GTIN**	M	Btl		4	7	ja	Leitperspektive: - Verbraucherbildung
Mkid 7-37	**Palindrom-Tage**	M	Btl		3	4	ja	exemplarisches Beispiel für den Aufbau einer Theorie
Mkid 7-38	**Superzahl**	M	Btl	Teilbarkeitsregeln	4	6	ja	Strategie: Schrittweises Reduzieren von Möglichkeiten
Mkid 7-39	**durchquerte Karos**	M	Btl		3	4	ja	Strategie: Erzeugen von Vermutungen aus Beispielen
Mkid 7-40	**Färbungen**	M	Btl		2	3	ja	Problemlösen in der Geometrie: Unterteilung von Figuren mit Hilfslinien
Mkid 7-41	**Kreisbogen-Figuren**	M	Btl	Mittelsenkrechte	2	6	ja	Analysieren und Zeichnen von Kreisbogen-Figuren
Mkid 7-42	**Kringel-Addition**	M	Btl		2	3	ja	exemplarisches Beispiel für den Aufbau einer Theorie
Mkid 7-43	**Würfelschnitte**	M	Btl	Schrägbilder	2	3	ja	Training des räumlichen Vorstellungsvermögens

Zusammen mit dieser Übersicht und dem Deckblatt umfasst das Mkid-Unterrichtsmaterial für die Klasse 7 insgesamt 193 Dateien.

Mkid 7-01B tropfender Wasserhahn

Lehrerblatt

Was kostet ein tropfender Wasserhahn im Jahr?

Mit dieser Frage ist eine typische so genannte FERMI-Aufgabe formuliert.
Der Professor Enrico FERMI (1901 – 1954, Kernphysiker) hat seinen Studenten Aufgaben gestellt, bei denen es keine exakte Lösung gibt, eine solche aber auch nicht unbedingt interessiert, sondern lediglich deren Größenordnung.
Zur Lösung von FERMI-Aufgaben muss man das gestellte Problem in Teilprobleme aufspalten und geeignete Annahmen treffen bzw. relevante Sachverhalte recherchieren.
(Bild rechts aus https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Faucet.JPG ist zur Wiederverwendung gekennzeichnet)

Antwort:

Es kommt natürlich ganz darauf an, wie schnell der Wasserhahn tropft und wie groß die Tropfen sind.
Ein konkreter Versuch ergab das Folgende:
Bei dem zügig tropfenden Wasserhahn (etwa 1 Tropfen pro Sekunde) war ein 0,2-Liter-Becher in fünf Minuten halb voll. Pro Minute sind das dann 0,1 Liter : 5 = 0,02 Liter.
Pro Stunde sind es 0,02 Liter · 60 = 1,2 Liter. Pro Tag sind es 24 · 1,2 Liter = 28,8 Liter.
Pro Jahr sind es 365 · 28,8 Liter = 10.512 Liter, also etwa 11.000 Liter = 11 m^3
Im Jahr 2019 kostete in Stuttgart 1 m^3 Wasser 2,74 € („Zuwasser“) plus 1,66 € („Abwasser“), insgesamt 4,40 €. Für dieses Beispiel ergibt sich pro Jahr damit 11 · 4,40 € = 48,40 €, also **knapp 50 €** (!).

Stundenablauf:

- Die Lehrkraft stellt die Leitfrage: Was kostet ein tropfender Wasserhahn im Jahr?
- Die Schülerinnen und Schüler geben Schätzungen ab.
- Im Unterrichtgespräch wird ein Plan entworfen: die Schülerinnen und Schüler suchen in Gruppen, jeweils ausgestattet mit einem 0,2-Liter-Becher, einen Wasserhahn im Schulgebäude auf, bringen ihn zum zügigen Tropfen (etwa 1 Tropfen pro Sekunde) und ermitteln die Zeitdauer, bis der Becher halbvoll (0,1 Liter) bzw. voll ist. Die Lehrkraft darf beisteuern, dass ein Kubikmeter Wasser etwa 5 € kostet. Erwähnenswert dabei ist, dass nicht nur für die Anlieferung und Zurverfügungstellung des Wassers Geld kostet, sondern natürlich auch die Zurücknahme des verschmutzen Wassers.
- Mithilfe der Information „x Liter in y Minuten“ und dem Schüler-Arbeitsblatt erarbeiten die Gruppen, was ihr tropfender Wasserhahn im Jahr kosten würde.

Didaktische Bemerkungen:

Wichtig für das Kompetenzerleben der Schülerinnen und Schüler ist, dass die gestellte Frage von der Lehrperson als schwierig konnotiert wird (vgl. auch die Ausführungen zu den Mkid-Stunden der Klasse 6, die FERMI-Aufgaben zum Inhalt haben: Mkid 6-01 Linsen und Mkid 6-02 Bonbons, sowie Mkid 7-01 Tropfender Wasserhahn) und sich diese beim Planungsgespräch maximal zurückhält.
Schlüssel zur Lösung der gestellten FERMI-Aufgabe ist wieder die – auch außerhalb der Mathematik gültige - Universalstrategie *Teile ein großes Problem in viele kleine Teilprobleme auf*. Dies sollte abschließend unbedingt thematisiert werden.

Material:

- einige 0,2-Liter-Becher
- einige Wasserhähne im Schulgebäude, die zum zügigen Tropfen gebracht werden können

Viele FERMI-Fragen und Anregungen dazu findet man in: Büchter, A. u.a.: Die Fermi-Box. Modellieren - Problemlösen - Argumentieren: Aufgabenkartei inkl. Lehrerkommentar Klasse 5-7. Klett 2007

Mkid 7-01B tropfender Wasserhahn

A) Ergebnis der Messung am tropfenden Wasserhahn:

Wasservolumen: …… Liter (*zum Beispiel 0,1 oder 0,2 Liter*)

Zeitdauer: …… Minuten (*runde auf ganze Minuten*)

(Bild rechts aus https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Faucet.JPG ist zur Wiederverwendung gekennzeichnet)

B) Training zum Umrechnen:

Vor der Umrechnung des Wasservolumens auf ein ganzes Jahr sollen hier die Einzelschritte geübt werden.

Kreuze an – richtig oder falsch.
Addiere zur Probe die Nummern der richtigen Behauptungen. Es muss sich die Zahl 11 ergeben.

1) Wenn in 5 Minuten 0,1 Liter aus dem Hahn getropft sind, dann sind es in 1 Minute 0,5 Liter.
☐ richtig ☐ falsch

2) Wenn in 7 Minuten 0,2 Liter aus dem Hahn getropft sind, dann sind es in 1 Minute etwa 0,03 Liter.
☐ richtig ☐ falsch

3) Wenn in 1 Minute 0,05 Liter aus dem Hahn getropft sind, dann sind es in 1 Stunde 3 Liter.
☐ richtig ☐ falsch

4) Wenn in 1 Stunde 2,4 Liter aus dem Hahn getropft sind, dann sind es an 1 Tag 0,1 Liter.
☐ richtig ☐ falsch

5) Wenn in 1 Minute 0,025 Liter aus dem Hahn getropft sind, dann sind es in 1 Tag 90 Liter.
☐ richtig ☐ falsch

6) Wenn in 1 Tag 100 Liter aus dem Hahn getropft sind, dann sind es in 1 Jahr 36.500 Liter.
☐ richtig ☐ falsch

7) 36.500 Liter sind 365 m^3.
☐ richtig ☐ falsch

C) Berechnung der Kosten pro Jahr und Antwort

Unser tropfender Wasserhahn würde pro Jahr etwa …… € kosten.

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit GA … Gruppenarbeit (max. vier SuS pro Gruppe!)
feU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit wird man noch eine Knobelaufgabe aus der Knobelaufgaben-Sammlung einschieben.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg feU 5 Min.	L stellt das Problem vor: Ein Wasserhahn tropft, was kostet das verschwendete Wasser in einem Jahr? SuS schätzen die Kosten oder vorab das Wasservolumen in einem Jahr. Die Schätzungen werden an der Tafel notiert.	aus dramaturgischer Sicht wünschenswert: ein tropfender Wasserhahn Tafel
2. Erarbeitung eines Plans feU 5 Min.	Im Unterrichtgespräch (L hält sich dabei maximal zurück) wird ein Plan entworfen: Die SuS suchen in Gruppen, jeweils ausgestattet mit einem 0,2-Liter-Becher, einen Wasserhahn im Schulgebäude auf, bringen ihn zum zügigen Tropfen (etwa 1 Tropfen pro Sekunde) und ermitteln die Zeitdauer (runden auf ganze Minuten), bis der Becher halbvoll (0,1 Liter) bzw. voll ist. Es werden die zur Umrechnung nötigen Fakten (1 Stunde = 60 Minuten usw.) genannt und an der Tafel notiert. L informiert darüber, dass 1 m^3 Wasser etwa 5 € kostet („Zuwasser“ + „Abwasser“).	Tafel
3. Ausführung des Plans GA 20 Min.	SuS führen die Messung an verschiedenen Wasserhähnen im Schulgebäude durch, notieren die Daten unter A) auf dem Arbeitsblatt und bearbeiten dann die Punkte B) (hier wird der Fokus auf die Einzelschritte gesetzt) und C) auf dem Arbeitsblatt. L geht während der GA umher und berät zurückhaltend.	0,2-Liter-Becher Uhr Arbeitsblatt Taschenrechner
4. Reflexion feU 10 Min.	Die Ergebnisse werden genannt und mit den Schätzungen verglichen. Die Einzelschritte des Lösungsweges werden benannt. L verweist auf die verwendete Universalstrategie *Teile ein großes Problem in viele kleine Teilprobleme auf.* Die Ergebnisse werden interpretiert – das hat nun doch ein größeres Ausmaß als man denkt! Dabei hebt L auch auf den ökologischen Aspekt der Verschwendung bei einem tropfenden Wasserhahn ab.	

Mkid 7-01 tropfender Wasserhahn

Lehrerblatt

Die Bezeichnung „Fermi-Aufgaben“ geht auf den italienischen Kernphysiker Enrico Fermi (1901 – 1954, Nobelpreis 1938) zurück. Er stellte seinen Studenten gerne Aufgaben, die man schrittweise durch Abschätzen oder Beschaffung von Informationen lösen konnte. Die bekannteste Fermi-Aufgabe lautet „Wie viele Klavierstimmer gibt es in Chicago?“ – sie wurde neben weiteren Fermi-Aufgaben im Mkid-Kurs der Klasse 6 bearbeitet. Allen Fermi-Aufgaben ist gemeinsam, dass sie zunächst sehr komplex erscheinen und man sich einer Lösung erst durch Zerlegen in kleinere Teilprobleme nähern kann.

Das Zerlegen eines zunächst unlösbar erscheinenden Problems in kleinere Teilprobleme ist eine wichtige mathematische Strategie, die nicht nur beim Lösen von Fermi-Aufgaben hilft.

- **Welche Wasserkosten entstehen in einem Jahr durch einen tropfenden Wasserhahn?**

Vorgehensweise:

1. Volumen des in einem bestimmten Zeitraum ausfließenden Wassers ermitteln. Dazu gibt es zwei Möglichkeiten:
   a. Experimentell:
      - An einem Wasserhahn messen, wie viel ml Wasser in einem bestimmten Zeitraum austreten.

   b. Durch Abschätzung:
      - Wie viele Tropfen treten aus (z.B. 1 Tropfen pro Sekunde)?
      - Wie groß ist das Volumen eines Tropfens?
        Dazu mit Hilfe von Pipetten 100 Tropfen in einen Messzylinder tropfen und somit das Volumen eines einzelnen Tropfens ermitteln oder rechnerische Abschätzung: Durchmesser eines Tropfens ca. 5 mm, Volumenberechnung bei einem Würfel mit dieser Kantenlänge, Wahl eines Korrekturfaktors (z.B. $V_{Tropfen} = \frac{3}{4} \cdot V_{Würfel}$)
2. Das ermittelte Volumen auf die pro Tag bzw. pro Jahr ausfließende Wassermenge hochrechnen
3. Wasserpreis ermitteln: entweder durch Internetrecherche Wasserpreis des Schulortes ermitteln oder von einem Durchschnittswert von 4,20 € / m^3 ausgehen
4. Durch den tropfenden Hahn pro Tag entstehende Kosten berechnen.

Realistischer Wert:

- Volumen des Wassers in 10 Minuten: 35 ml
- Volumen des Wassers pro Tag: 35 ml · 6 · 24 = 5040 ml ≈ 5 l pro Jahr: 365 l · 5 = 1 825 l
- Kosten pro Jahr: 1 000 l kosten 4,20 €, 1 l kostet 0,0042 €, 1825 l kosten 0,0042 € · 1865 ≈ 7,66 €

Weitergehende Fragestellungen:

- Welche Wasserkosten entstehen an deinem Schulort in einem Jahr durch tropfende Wasserhähne?
- Wie oft kann man damit ein 25-Meter-Schwimmbecken füllen?

- **Wie viele „Spitzerumdrehungen“ eines Bleistifts werden beim Schreiben von 1000 Wörtern verbraucht?**

Vorgehensweise:

1. Einen Text mit beispielsweise 200 Wörtern schreiben und die dabei verbrauchte Bleistiftlänge messen.
2. Messen, um wieviel die Länge eines Bleistifts durch beispielsweise 20 Spitzerumdrehungen abnimmt.
3. Die beiden Messwerte zueinander ins Verhältnis setzen

Material:
- Glas
- Messzylinder
- evtl. Tropfpipetten (aus Physik- oder Chemiesammlung)
- Bleistifte (idealerweise verschiedener Bleistiftstärken)
- Spitzer

Didaktischer Kommentar

Bereits im Mkid-Kurs Klasse 6 wurden Fermi-Aufgaben vorgestellt. In der Regel weisen sie durch eine große Alltagsnähe sowie durch hohes Kompetenzerleben beim schrittweisen Lösen des zunächst komplex erscheinenden Problems einen hohen Motivationsgrad auf. In dieser Stunde stehen solche Aufgaben im Vordergrund, zu deren Lösung auch Messungen durchgeführt werden sollten. Hier sollte durch eine Diskussion über die Genauigkeit von Messungen und Messfehler auch ein Bezug zu allgemeinen natur-wissenschaftlichen Arbeitsweisen hergestellt werden.

Wenn einige der SuS den Mkid-Kurs Klasse 6 besucht haben, können die SuS zunächst eigenständig in Gruppen (mit maximal 4 SuS) überlegen, wie die Aufgabe gelöst werden kann und wie die dafür notwendigen Informationen beschafft werden können. Bei der anschließenden Diskussion der Ideen können bezüglich des Verbrauchs des tropfenden Hahns u.a. folgende Aspekte thematisiert werden:

- Art der Versuchsdurchführung: Volumen messen, welches innerhalb eines bestimmten Zeitraums heraustropft oder Zeitdauer messen, bis ein bestimmtes Volumen herausgetropft ist?
- Welcher Zeitraum ist für das Experiment geeignet (wenn zu kurz: Abweichungen und Ungenauigkeiten fallen sehr stark ins Gewicht; wenn zu lang: sehr aufwändig)
- Tropfen alle Wasserhähne in gleichem Maße? (→ wenn möglich Experiment an mehreren Wasserhähnen durchführen und den Mittelwert aller Ergebnisse bilden)

Der Wasserverbrauch kann auch mathematisch abgeschätzt werden (vgl. Lehrerblatt). Für die mathematische Erfassung des (durchaus unterschiedlichen) Volumens der Tropfen gibt es verschiedene Möglichkeiten:

- Berechnung als Würfel (Tropfendurchmesser entspricht der Kantenlänge). Da der Tropfen nicht den gesamten Würfel einnimmt, sollte das Würfelvolumen anschließend mit einem Korrekturfaktor (z.B. 0,75) multipliziert werden.
- Berechnung als Quader (eventuell danach Multiplikation mit einem Korrekturfaktor)
- Berechnung als Kugel (Die SuS kennen die Kreiszahl π, die Formel für das Kugelvolumen muss durch die Lehrkraft mitgeteilt werden)

Bei der Berechnung der Wasserkosten (der Wasserpreis wird i.a. für m^3 angeben!) werden vermutlich Schwierigkeiten bei der Umrechnung von Volumeneinheiten auftreten. Es ist also sinnvoll, an der die Schmiertafel die Zusammenhänge zwischen m^3, dm^3, cm^3, l und ml zu wiederholen und einige Beispielaufgaben zu rechnen.

Bei der Besprechung der Lösung sollten alle Ergebnisse wertgeschätzt werden. Da es – wie bei jeder Fermi-Aufgabe – keine exakte Lösung gibt, sollten schwerpunktmäßig die Unterschiede in den Ergebnissen beleuchtet werden: unterschiedliche Vorgehensweisen, Messungenauigkeiten, Ungenauigkeiten z.B. bei der mathematischen Erfassung des Wasserverbrauchs, Rechenfehler …

Die „Bleistiftaufgabe“ sollen die SuS in Gruppen nun komplett eigenständig angehen. Idealerweise stellt eine Gruppe in der anschließenden Besprechungsphase ihre Lösung auf einer Overheadfolie oder unter einer Dokumentenkamera vor. Weiterhin sollten auch hier die vermutlich großen Unterschiede zwischen den einzelnen Ergebnissen diskutiert werden (Abhängigkeiten von der schreibenden Person, vom Bleistift und Spitzer, durchschnittliche Anzahl der Buchstaben in einem Wort, Länge des geschriebenen Textes, Ungenauigkeiten bei der Erhebung der Umdrehungen …)

Zur Stärkung der Problemlösefähigkeit sollte auf jeden Fall auch die Vorgehensweise beim Lösen der Aufgabe(n) reflektiert und ein Zusammenhang zum „gewöhnlichen“ Mathematik-Unterricht hergestellt werden (Wie sind wir vorgegangen?, Fallen euch Aufgaben aus dem Mathematikunterricht ein, bei denen diese Vorgehensweise auch hilfreich wäre?).

Mkid 7-01 tropfender Wasserhahn

Tafelanschrieb

Kosten durch tropfende Wasserhähne in einem Jahr in … Ergebnis: Wie oft kann man damit ein 25-Meter-Schwimmbecken füllen? Maße des 25-m-Beckens: 25 m lang, 15 m breit, 2,20 m tief Volumen des Beckens in m^3 Volumen des Beckens in Litern: Anzahl der Beckenfüllungen: Ergebnis:	**Der tropfende Wasserhahn und andere Fermi-Aufgaben** Welche Kosten entstehen in einem Jahr durch einen tropfenden Wasserhahn? Fermi-Aufgabe (vgl. Mkid-Kurs Kl. 6) Lösung: Wie viel Wasser verliert ein tropfender Hahn in 10 Minuten? … Wie viel Wasser verliert ein tropfender Hahn an einem Tag / in einem Jahr? Alternativ: Wie viele Tropfen verliert der Wasserhahn in 10 Minuten? ca … Wie viele Tropfen verliert der Wasserhahn in einem Jahr? Durchmesser eines Tropfens: Volumen eines Tropfens: Wie viel Wasser verliert ein tropfender Hahn in einem Jahr? 1 m^3 (1000 l) Wasser kosten … … Liter Wasser kosten ….	Ergebnis: Durch den tropfenden Wasserhahn entstehen Kosten in Höhe von … Euro. Welche Wasserkosten entstehen an deinem Schulort in einem Jahr durch tropfende Wasserhähne? Anzahl der Haushalte in … Anzahl der Wasserhähne in … Anzahl der tropfenden Hähne … Volumen des in einem Jahr herausgetropften Wassers in …

So oder so ähnlich von SuS auf Overhead-Folie oder unter Dokumentenkamera vorgestellt:

Wie viele „Spitzerumdrehungen“ eines Bleistifts werden beim Schreiben von 1000 Wörtern verbraucht?

Bleistiftverbrauch beim Schreiben von 200 Wörtern:

Bleistiftverbrauch beim Schreiben von 1000 Wörtern:

Bleistiftverbrauch bei 20 Spitzerumdrehungen:

1 cm Bleistiftverbrauch entspricht …. Spitzerumdrehungen

…. cm Bleistiftverbrauch entsprechen …. Spitzerumdrehungen

Ergebnis:

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit GA … Gruppenarbeit (max. 4 SuS pro Gruppe!)
FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
In einer 45 Min.-Stunde wird man nur die Wasserhahn-Aufgabe (und evtl. die weiterführenden Aufgaben) bearbeiten.
Für eine 90 Min.-Stunde kann man Phase 6 und 7 ausdehnen und noch weitere Fermi-Aufgaben anfügen.

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Einstieg FEU 5 Min.	Vorstellen des Problems: Tropfender Wasserhahn - großer Wasserverlust oder zu vernachlässigen? Schätzung: Wie viele Liter Wasser fließen pro Tag aus einem tropfenden Wasserhahn? Kosten pro Jahr? Anknüpfen an Vorerfahrungen: ist eine Fermi-Aufgabe. → Wie sind wir an frühere Fermi-Aufgaben herangegangen?	Evtl. tropfender Wasserhahn Tafel
2. Erarbeitung 1 GA 5 Min.	SuS überlegen in Gruppen, wie die Aufgabe gelöst werden kann und wie sie die dazu benötigten Angaben ermitteln können: *Wie viel Wasser tropft pro Jahr aus einem Hahn?* *Wie viel Wasser tropft in 10 Minuten aus einem Hahn?* *Was kostet 1 Liter Wasser?*	Alternativ: Erarbeitung im feU (falls alle SuS nicht den Mkid-Kurs Klasse 6 besucht haben)
3. Ergebnis 1 feU 8 Min.	Die SuS stellen ihre Überlegungen vor, diese werden an der Tafel festgehalten (vgl. Tafelanschrieb) Dabei auch auf die verschiedenen Möglichkeiten der Volumenermittlung eingehen (s. didaktischer Kommentar)	Tafel
4. Erarbeitung 2 PA bzw. GA 15 Min.	SuS ermitteln fehlende Angaben und berechnen die durch den tropfenden Wasserhahn entstehenden Jahreskosten Puffer für schnelle Gruppen: Wie kommen Unterschiede in den Ergebnissen zustande? Weiterführende Aufgaben (vgl. Lehrerblatt)	Wasserhahn, Messzylinder, Glas, Tropfpipette Uhr
5. Ergebnis 2 feU 10 Min.	Vergleich und Bewertung der Ergebnisse Reflexion über die Vorgehensweise Wie kommen die Unterschiede zustande?	Tafel
6. Neues Problem und Erarbeitung GA 12 Min.	Vorstellen des „Bleistiftproblems“ SuS finden eine Lösung, dokumentieren ihren Lösungsweg L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Bleistift, Spitzer, Heft / OHP-Folie

7. Ergebnis FEU 5 Min.	Vorstellung einer Lösung und Vergleich mit anderen Ergebnissen und Bewertung Reflexion über die Vorgehensweise	OH-Projektor / Dokumenten-kamera
8. optional: weitere Aufgaben	• Wie oft schlägt dein Herz in einem Jahr? Wie oft in deinem Leben, wenn du 80 Jahre wirst? • Wie viel trinkt ein Mensch, der 80 Jahre wird, in seinem Leben? – Wie viele Badewannenfüllungen sind das? oder Aufgaben, die sich die SuS selbst ausdenken	

Lehrerblatt

Sachanalyse:

Satz: Die Anzahl der Möglichkeiten n Objekte anzuordnen ist $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (lies: „n Fakultät“).

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: n = 1: die Anzahl der Möglichkeiten 1 Objekt anzuordnen ist 1.
Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für n = k. Zu zeigen ist jetzt, dass sie dann auch für n = k + 1 gilt.
Es kommt ein weiteres Objekt hinzu. Wo kann man es platzieren?
Bei jeder der k! Anordnungen ist das an den beiden Rändern und in den k – 1 Zwischenräumen möglich.
Das sind für jede der k! Anordnungen k + 1 Möglichkeiten,
insgesamt sind es also $k! \cdot (k + 1) = (k + 1)!$ Möglichkeiten.▪

Relevanz:

Die Kombinatorik hat im Bildungsplan BW 2016 keine große Bedeutung. Fakultäten benötigt man bei den Binomialkoeffizienten, diese immerhin braucht man bei der Binomialverteilung, ein „Eigenleben“ wird den Fakultäten und Binomialkoeffizienten aber nicht zugestanden.
Die Grundzüge der Kombinatorik gehören unseres Erachtens aber zur Allgemeinbildung.

Didaktische Bemerkungen:

Kombinatorik gilt als allgemein schwierig. Immerhin kann man für kleine Zahlen (hier: n = 1; 2; 3; 4) alle Möglichkeiten aufschreiben, daran lernen und Prinzipielles erkennen. Das ist ja grundsätzlich eine wichtige Strategie, ebenso der rekursive Ansatz – s.u.: wie folgt aus dem Fall n = 3 der Fall n = 4?
Ein Paradigma für die Anzahl der Reihungen ist das Beispiel der Anzahl der Aufstellungen beim Familien-Foto. Man könnte den obigen Satz deshalb auch die „Foto-Regel“ nennen.
Interessant ist dabei, dass die Anzahl der möglichen Reihungen beim Aufstellen sehr schnell wächst mit der Anzahl der zu fotografierenden Personen.

Hinführung zur Foto-Regel:

1 Person: A A
→ **1 mögliche Reihenfolge**

2 Personen A; B AB oder BA
→ **1 · 2 mögliche Reihenfolgen**

3 Personen A; B und C:

CAB	CBA	… C am linken Rand
ACB	BCA	… C in der Mitte
ABC	BAC	… C am rechten Rand

Zu AB und BA wird C an jede der 3 möglichen Positionen hinzugefügt.
→ **1 · 2 · 3 = 6 mögliche Reihenfolgen**

4 Personen A; B; C und D:

DCAB	DACB	DABC	DCBA	DBCA	DBAC	… D am linken Rand
CDAB	ADCB	ADBC	CDBA	BDCA	BDAC	… D links der Mitte
CADB	ACDB	ABDC	CBDA	BCDA	BADC	… D rechts der Mitte
CABD	ACBD	ABCD	CBAD	BCAD	BACD	… D am rechten Rand

Zu CAB; ACB; ABC; CBA; BCA und BAC wird D an jeder der 4 möglichen Positionen hinzugefügt.
→ **1 · 2 · 3 · 4 = 24 mögliche Reihenfolgen**

n! (ein interessantes Zeichen 😊, lies: „n Fakultät“) ist eine abkürzende Schreibweise $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$.

Foto-Regel: Für n Dinge oder Personen gibt es n! Möglichkeiten, sie in eine Reihenfolge zu bringen.

1.) Berechne: a) 5! b) 6! c) 10! : 8!

2.) Schreibe als eine Fakultät: a) 9 · 8! b) 11! : 11 c) 3! + 3! + 3! + 3!

3.) Familie Schmidt stellt sich zum Familienfoto in einer Reihe auf: Vater Emil, Mutter Anne, Kinder Thomas, Sophie und Christiane. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

4.) Familie Schmidt stellt sich wieder zum Familienfoto in einer Reihe auf:
Vater Emil, Mutter Anne, Kinder Thomas, Sophie und Christiane.
Alle sagen, der Vater sollte auf jeden Fall in der Mitte stehen.
Fertige eine kleine Skizze an und berechne, wie viele Möglichkeiten es jetzt gibt.

(Bild rechts aus https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Aenne_Burda_Family_Photo_1.jpg ist zur Wiederverwendung gekennzeichnet)

5.) Familie Schmidt stellt sich wieder zum Familienfoto in einer Reihe auf:
Vater Emil, Mutter Anne, Kinder Thomas, Sophie und Christiane und Oma und Opa.
Opa und Oma sollen auf jeden Fall an beiden Rändern stehen.
Fertige eine kleine Skizze an und berechne, wie viele Möglichkeiten es gibt.

6.) Wie viele „Wörter“ kann MERT durch Umsortieren der vier Buchstaben seines Namens bilden, also z.B. TREM, REMT oder TERM?

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit feU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung! Je nach zur Verfügung stehender Zeit wird man noch eine Knobelaufgabe aus der Knobelaufgaben-Sammlung einschieben.

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Erarbeitung feU 20 Min.	L stellt eine Schätzfrage und damit das Thema vor: *5 Personen sollen sich zu einem Gruppenfoto in einer Reihe aufstellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?* SuS schätzen, die Schätzungen werden festgehalten, der Gewinner bekommt nach der Auflösung einen kleinen Preis. Erfahrungsgemäß wird die tatsächliche Anzahl unterschätzt. Bei n = 3 überblickt man die Anzahl (=6) evtl. noch, für n = 5 hat schon das 20-fache an möglichen Reihenfolgen (=120). Für n = 30 (eine Schulklasse) ist die Anzahl der möglichen Reihenfolgen schon extrem groß: 265 Quintillionen 30! ≈265.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000 L führt zur Foto-Regel hin (vgl. Lehrerblatt) und dokumentiert geeignet. Für die performance: 3 SuS stellen sich in den 6 Reihenfolgen auf, diese werden fotografiert ☺. L lässt die SuS erklären, wie der Fall n = 5 aus dem Fall n = 4 hergeleitet werden kann. Daran kann er sehen, ob die SuS das Argumentations-Prinzip verstanden haben. L weist auf die beiden Strategien hin: - an überschaubaren Verhältnissen lernen - wie folgt ein Fall aus dem vorherigen Fall? (Rekursion)	Tafel, Heft SuS fotografieren die sechs Möglichkeiten
2. Übung EA/PA 20 Min.	L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend. Lösungen: 1a) 1 · 2 · 3 · 4 · 5 = 120 b) 6! = 5! · 6 = 120 · 6 = 720 (Rekursion!) c) 9 · 10 = 90 (zuerst kürzen!) 2a) 9 · 8! = 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 9! b) 11 · 10 · 9 · 8 · 7 · 6 · 5 · 4 · 3 · 2 · 1 : 11 = 10! c) 4 · 3! = 4 · 3 · 2 · 1 = 4! 3.) 5! = 120 (fünf Personen in eine Reihenfolge bringen) 4.) 4! = 24 (Der Vater in der Mitte ist „fest“, also muss man nur noch vier Personen in eine Reihenfolge bringen.) 5.) 2 · 5! = 240 (Opa links und Oma rechts oder umgekehrt sind „fest“, also muss man für diese beiden Fälle noch fünf Personen in eine Reihenfolge bringen.) 6.) 4! – 1 = 24 – 1= 23 (vier verschiedene Buchstaben in eine Reihenfolge bringen, ohne die Reihenfolge MERT, es wird ja „umsortiert“)	Arbeitsblatt
3. Besprechung feU 5 Min.	Zu besprechen sind insbesondere die Aufgaben 4.), 5.) und 6.).	Arbeitsblatt

Lehrerblatt

Sachanalyse:

Satz: Die Anzahl der Möglichkeiten n Objekte anzuordnen ist $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (lies: „n Fakultät“).

Beweis durch vollständige Induktion:
Induktionsanfang: n = 1: die Anzahl der Möglichkeiten 1 Objekt anzuordnen ist 1.
Induktionsschritt: Die Behauptung gelte für n = k. Zu zeigen ist jetzt, dass sie dann auch für n = k + 1 gilt.
Es kommt ein weiteres Objekt hinzu. Wo kann man es platzieren?
Bei jeder der k! Anordnungen geht das an den beiden Rändern und in den k – 1 Zwischenräumen.
Das sind für jede der k! Anordnungen k + 1 Möglichkeiten, insgesamt sind es also $k! \cdot (k + 1) = (k + 1)!$ Möglichkeiten.▪

Relevanz:

Die Kombinatorik hat im Bildungsplan BW 2016 keine große Bedeutung. Fakultäten benötigt man bei den Binomialkoeffizienten, diese immerhin braucht man bei der Binomialverteilung, ein „Eigenleben“ wird den Fakultäten und Binomialkoeffizienten aber nicht zugestanden.
Die Grundzüge der Kombinatorik gehören u. E. aber zur Allgemeinbildung.

Didaktische Bemerkungen:

Kombinatorik gilt als schwierig. Immerhin kann man für kleine Zahlen (hier: n = 1; 2; 3; 4) alle Möglichkeiten aufschreiben, daran lernen und Prinzipielles erkennen. Das ist ja grundsätzlich eine wichtige Strategie, ebenso der rekursive Ansatz – s.u.: wie folgt aus dem Fall n = 3 der Fall n = 4?
Ein Paradigma für die Anzahl der Reihungen ist das Beispiel der Anzahl der Aufstellungen beim Familien-Foto. Man könnte den obigen Satz deshalb auch die „Foto-Regel“ nennen.
Interessant ist, dass die Anzahl der möglichen Reihungen beim Aufstellen sehr schnell wächst mit der Anzahl der zu fotografierenden Personen.

Hinführung zur Foto-Regel:

1 Person: A — A
→ **1 mögliche Reihenfolge**

2 Personen A; B — AB oder BA
→ **2 mögliche Reihenfolgen**

3 Personen A; B und C:

CAB	CBA	…	C am linken Rand
ACB	BCA	…	C in der Mitte
ABC	BAC	…	C am rechten Rand

Zu AB und BA wird C an jede der 3 möglichen Positionen hinzugefügt.
→ **2 · 3 = 6 mögliche Reihenfolgen**

4 Personen A; B; C und D:

DCAB	DACB	DABC	DCBA	DBCA	DBAC	… D am linken Rand
CDAB	ADCB	ADBC	CDBA	BDCA	BDAC	… D links der Mitte
CADB	ACDB	ABDC	CBDA	BCDA	BADC	… D rechts der Mitte
CABD	ACBD	ABCD	CBAD	BCAD	BACD	… D am rechten Rand

Zu CAB; ACB; ABC; CBA; BCA und BAC wird D an jeder der 4 möglichen Positionen hinzugefügt.
→ **2 · 3 · 4 = 24 mögliche Reihenfolgen**

n! (lies: „n Fakultät“) ist eine abkürzende Schreibweise $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$.

Foto-Regel: Für n Dinge oder Personen gibt es n! Möglichkeiten, sie in eine Reihenfolge zu bringen.

1.) Berechne: a) 5! b) 6! c) 10! : 8!

2.) Schreibe als eine Fakultät: a) 9 · 8! b) 11! : 11 c) 3! + 3! + 3! + 3!

3.) Familie Schmidt stellt sich zum Familienfoto in einer Reihe auf: Vater Emil, Mutter Anne, Töchter Hildegund, Sophie und Christiane. Wie viele Möglichkeiten gibt es?

4.) Familie Schmidt stellt sich wieder zum Familienfoto in einer Reihe auf:
Vater Emil, Mutter Anne, Töchter Hildegund, Sophie und Christiane.
Alle sagen, die Mutter sollte auf jeden Fall in der Mitte sein. Fertige eine kleine Skizze an und berechne, wie viele Möglichkeiten es gibt.

(Bild zur Wiederverwendung und Veränderung gekennzeichnet: https://de.wikipedia.org/wiki/George_Monckton-Arundell,_8._Viscount_Galway#/media/Datei:The_Monckton-Arundell_family.jpg)

5.) Familie Schmidt stellt sich wieder zum Familienfoto in einer Reihe auf: Vater Emil, Mutter Anne, Töchter Hildegund, Sophie und Christiane und Oma und Opa. Opa und Oma sollen an beiden Rändern stehen. Fertige eine kleine Skizze an und berechne, wie viele Möglichkeiten es gibt.

6.) Wie viele „Wörter“ kann Mert aus den vier Buchstaben seines Namens bilden, also z.B. TREM oder TERM?

7.) Wie viele „Wörter“ kann Peer aus den vier Buchstaben seines Namens bilden, also z.B. PERE oder REEP? Schreibe alle Möglichkeiten auf und zähle sie ab.
Könnte man auch durch eine Rechnung auf diese Anzahl kommen?
Wie lässt sich diese Rechnung begründen?

8.) Wie viele „Wörter“ kann Anna aus den vier Buchstaben ihres Namens bilden, also z.B. ANAN oder NNAA? Schreibe alle Möglichkeiten auf und zähle sie ab.
Könnte man auch durch eine Rechnung auf diese Anzahl kommen?
Wie lässt sich diese Rechnung begründen?

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung! Je nach zur Verfügung stehender Zeit wird man noch eine Knobelaufgabe aus der Knobelaufgaben-Sammlung einschieben.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Erarbeitung FEU 20 Min.	L stellt eine Schätzfrage und damit das Thema vor: *5 Personen sollen sich zu einem Gruppenfoto in einer Reihe aufstellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es?* SuS schätzen, die Schätzungen werden festgehalten, der Gewinner bekommt nach der Auflösung einen kleinen Preis. Erfahrungsgemäß wird die tatsächliche Anzahl unterschätzt. Bei n = 3 überblickt man die Anzahl (=6) evtl. noch, n = 5 hat schon das 20-fache an möglichen Reihenfolgen (=120). Für n = 30 (Schulklasse) ist die Anzahl der möglichen Reihenfolgen schon extrem groß: 265 Quintillionen $30! \approx 265.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000$ L führt zur Foto-Regel hin (vgl. Lehrerblatt) und dokumentiert geeignet. Für die performance: 3 SuS stellen sich in den 6 Reihenfolgen auf, diese werden fotografiert ☺. L lässt die SuS erklären, wie der Fall n = 5 aus dem Fall n = 4 hergeleitet werden kann. Daran kann er sehen, ob die SuS das Argumentations-Prinzip verstanden haben. L weist auf die beiden Strategien hin: - an überschaubaren Verhältnissen lernen (vgl. auch Aufgaben 7 und 8 des Schülerarbeitsblattes) - wie folgt ein Fall aus dem vorherigen Fall? (Rekursion)	Tafel, Heft
2. Übung EA/PA 30 Min.	L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend. Lösungen: 1a) 120 b) 720 c) 90 (zuerst kürzen!) 2a) 9! b) 10! c) 4! 3.) 5! = 120 4.) 4! = 24 5.) $2 \cdot 5! = 240$ (Opa links, Oma rechts oder umgekehrt) 6.) 4! = 24 7.) 4! : 2 = 12 (man denke sich zunächst die beiden Buchstaben „E“ nummeriert, immer zwei Reihungen „verschmelzen“ nach Wegfall der Nummerierung zu einer: PERE = PE_1RE_2 = PE_2RE_1) 8.) (4! : 2) : 2 = 6 (vgl. Aufgabe 7) Variation für die „Schnellen“: 3 Erwachsene und 4 Kinder stellen sich zum Foto auf, immer schön abwechselnd. Wie viele Reihenfolgen? [Lösung: $4! \cdot 3! = 144$]	Schülerblatt
3. Besprechung FEU 10 Min.	Wichtig ist die Besprechung der Aufgaben 7 und 8. Variation für die „Schnellen“: ELENE mit 5! : 3! = 20 Reihenfolgen	Schülerblatt

Lehrerblatt

Sachanalyse:

Satz: Die Anzahl der Möglichkeiten aus n Objekten 2 Objekte auszuwählen ist $\binom{n}{2} := \frac{n \cdot (n-1)}{2}$

Beweis:
Man denke sich die beiden Objekte zunächst der Reihe nach ausgewählt.
Für das 1. Objekt gibt es n Möglichkeiten, zu jeder dieser n Möglichkeiten gibt es
für das 2. Objekt dann noch n – 1 Möglichkeiten. Es gibt insgesamt also n · (n – 1) Paare.
Jeweils zwei Paare davon unterscheiden sich bezüglich der beiden ausgewählten Objekte nicht, sondern nur durch deren Reihenfolge.
Ist die Reihenfolge unerheblich ergibt sich die gesuchte Anzahl der Möglichkeiten – mathematisch gesehen sind das dann keine 2er-Tupel (= Paare) mehr, sondern 2er-Mengen – durch halbieren. ▪

Relevanz:

Die Kombinatorik hat im Bildungsplan BW 2016 keine große Bedeutung. Binomialkoeffizienten benötigt man bei der Binomialverteilung, ein „Eigenleben" wird den Binomialkoeffizienten aber nicht zugestanden. Die Grundzüge der Kombinatorik gehören unseres Erachtens aber zur Allgemeinbildung.

Didaktische Reduktion:

Die für die Basisversion Mkid-7-03B wird eine allgemeine Formel für die Auswahl von k aus n Objekten nicht angestrebt, sondern nur der Fall k = 2 thematisiert.
An zwei Musterbeispielen, s.u., wird nur der grundsätzliche Gedankengang mit den zwei Schritten vorgestellt. An die Installation der Formel ist nicht unbedingt gedacht, zumindest sollte diese nicht im Vordergrund stehen. Bei der Lösung der Aufgaben auf dem Schülerblatt soll dementsprechend der vorgestellte zweischrittige Gedankengang gepflegt werden (Produkt- vs. Prozessorientierung).
Achtung: Hier wir der Begriff *Paar* in seiner umgangssprachlichen Bedeutung („ungeordnet") verwendet.

Musterbeispiele:

1.) Von 4 Personen A, B, C und D sollen 2 ausgewählt werden.
Wie viele unterschiedliche Paare sind möglich?
1. Schritt: **Anzahl der 2er-Reihen**
AB AC AD BA BC BD CA CB CD DA DB DC
1. Person: 4 Möglichkeiten, 2. Person: jeweils noch 3 Möglichkeiten → Anzahl der 2er-Reihen: 4 · 3 = **12**
2. Schritt: **Anzahl der Paare**
Je zwei 2er-Reihen ergeben dasselbe Paar. → Anzahl der Paare: (4 · 3) : 2 = **6**
Probe:
AB AC AD BC BD CD Zählen ergibt: Es sind tatsächlich 6.

2.) Von 5 Personen A, B, C, D und E sollen 2 ausgewählt werden.
Wie viele unterschiedliche Paare sind möglich?
1. Schritt: **Anzahl der 2er-Reihen**
AB AC AD AE BA BC BD BE CA CB CD CE DA DB DC DE EA EB EC ED
1. Person: 5 Möglichkeiten, 2. Person: jeweils noch 4 Möglichkeiten → Anzahl der 2er-Reihen: 5 · 4 = **20**
2. Schritt: **Anzahl der Paare**
Je zwei 2er-Reihen ergeben dasselbe Paar. → Anzahl der Paare: (5 · 4) : 2 = **10**
Probe:
AB AC AD AE BC BD BE CD CE DE Zählen ergibt: Es sind tatsächlich 10.

1.) Von 6 Personen A, B, C, D, E und F sollen 2 ausgewählt werden.
Wie viele unterschiedliche Paare sind möglich?

1. Schritt: Berechne zuerst die Anzahl der 2er-Reihen.

……

Mache nun die Probe, indem du alle möglichen 2er-Reihen aufschreibst und diese dann zählst.

……

……

2. Schritt: Berechne jetzt die Anzahl der Paare.

……

Mache nun die Probe, indem du alle möglichen Paare aufschreibst und diese dann zählst.

……

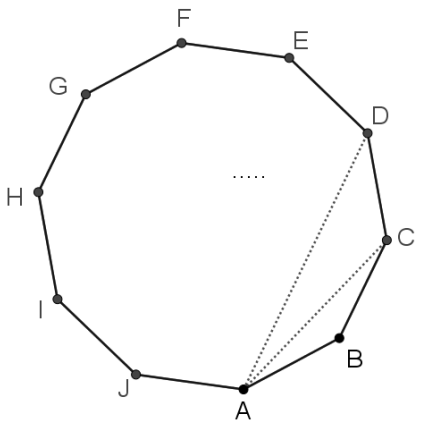
2.) Bei einem Hallenfußball-Turnier mit Tabellenwertung sollen alle 8 Mannschaften gegeneinander spielen, jede einmal gegen jede andere. Wie viele Spiele sind das insgesamt?

……

3.) Bei einer Hochzeit stoßen 100 Gäste mit ihren Gläsern an, jeder mit jedem. Wie oft ertönt ein Klang?

……

4.) Wie viele Diagonalen hat ein 10-Eck?
Zum Beispiel sind AC oder AD Diagonalen, AB ist keine Diagonale.



……

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit feU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit wird man noch eine Knobelaufgabe aus der Knobelaufgaben-Sammlung einschieben.

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Erarbeitung feU 15 Min.	L stellt eine Schätzfrage und damit das Thema vor: *6 Personen stehen zur Auswahl.* *Wie viele Paare sind möglich?* SuS schätzen, die Schätzungen werden festgehalten, der Gewinner bekommt nach der Auflösung einen kleinen Preis. L entwickelt mit den SuS die beiden Musterbeispiele – vgl. Lehrerblatt, Notation in geeigneter Kürze. SuS schreiben dabei selbstständig die dargestellten 2er-Reihen und Paare systematisch (!) auf. Im Zuge eienr didaktischen Reduktion werden die folgenden Hilfsbegriffe verwendet: **2er-Reihen** für 2-Tupel oder geordnete Paare **Paare** für 2er-Mengen oder ungeordnete Paare L weist auf die Strategie hin: - an überschaubaren Verhältnissen Verallgemeinerbares lernen L motiviert die SuS: „Das ist eigentlich Stoff der Klasse 10“.	Tafel, Heft
2. Übung EA/PA 15 Min.	L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend. Lösungen: 1.) $6 \cdot 5 = 30$ 2er-Reihen und $30 : 2 = 15$ Paare 2.) $(8 \cdot 7) : 2 = 28$ Spiele 3.) $(100 \cdot 99) : 2 = 4950$ Klänge 4.) Es gibt $(10 \cdot 9) : 2 = 45$ Verbindungsstrecken zwischen 2 Punkten. 10 Strecken davon sind Seiten des 10-Ecks und keine Diagonalen. Also sind es $45 – 10 = 35$ Diagonalen. Oder: von jedem der 10 Punkte gehen 7 Diagonalen aus, dabei kommt jede Diagonale doppelt vor. $(10 \cdot 7) : 2 = 35$.	Schülerblatt
3. Besprechung feU 10 Min.	Auswertung der Antworten zur Schätzfrage (= Aufgabe 1.)), in aller Regel wird diese Anzahl unterschätzt Besprechung der anderen Aufgaben, insbesondere der unterschiedlichen Lösungswege bei der Aufgabe 4.).	

Lehrerblatt

Sachanalyse:

Satz: Die Anzahl der Möglichkeiten aus n Objekten k Stück auszuwählen ist

$$\binom{n}{k} := \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} \quad (0 \le k \le n).$$

Die Zahlen $\binom{n}{k}$ (lies: „n über k“) heißen Binomialkoeffizienten.

Beweis:
Man denke sich die k Objekte zunächst der Reihe nach ausgewählt.
Für das 1. Objekt gibt es n Möglichkeiten, zu jeder dieser n Möglichkeiten gibt es
für das 2. Objekt dann noch n–1 Möglichkeiten, zu jeder dieser insgesamt n· (n–1) Möglichkeiten gibt es
für das 3. Objekt dann noch n–2 Möglichkeiten …
für das (k-1). Objekt dann noch n-k+2 Möglichkeiten, zu jeder dieser n·(n–1)·…·(n-k+2) Möglichkeiten
gibt es für das k. Objekt noch n–k+1 Möglichkeiten.
Es gibt insgesamt also n · (n-1)· … · (n–k+1) Reihen von k aus n Objekten.
Jeweils k! davon unterscheiden sich bezüglich der ausgewählten Objekte nicht, sondern nur durch deren Reihenfolge. Ist die Reihenfolge unerheblich ergibt sich die betreffende Anzahl durch Division von k!. ▪

Relevanz:

Die Kombinatorik hat im Bildungsplan BW 2016 keine große Bedeutung. Binomialkoeffizienten benötigt man bei der Binomialverteilung, ein „Eigenleben“ wird den Fakultäten und Binomialkoeffizienten aber nicht zugestanden. Die Grundzüge der Kombinatorik gehören u. E. aber zur Allgemeinbildung.

Didaktische Reduktion:

Die allgemeine Formel wird nicht zwingend angestrebt – sie wird als Puffer-Kür-Aufgabe verwendet.
An zwei Musterbeispielen, s.u., wird nur der grundsätzliche Gedankengang mit den zwei Schritten vorgestellt und dieser in den Aufgaben beispielgebunden variiert und vorsichtig „ausgeweitet“.

Musterbeispiele:

1.) Aus 5 Personen A, B, C, D und E soll eine 2er-Gruppe gebildet werden.
Wie viele unterschiedliche 2er-Gruppen sind möglich?
1. Schritt: **Anzahl der Reihen**
AB AC AD AE BA BC BD BE CA CB CD CE DA DB DC DE EA EB EC ED
1.Person: 5 Möglichkeiten, 2. Person: jeweils noch 4 Möglichkeiten → Anzahl der 2er-Reihen: 5 · 4 = **20**
2. Schritt: **Anzahl der Gruppen**
Je 2! = 2 2er-Reihen sind dieselbe Gruppe → Anzahl der 2er-Gruppen: (5 · 4) : 2! = **10**, Probe (zählen):
AB AC AD AE BC BD BE CD CE DE

2.) Aus 6 Personen A, B, C, D, E und F soll eine 3er-Gruppe gebildet werden.
Wie viele unterschiedliche 3er-Gruppen sind möglich?
1. Schritt: Anzahl der Reihen
ABC ABD ABE ABF ACB … BAC … BCA … CAB … CBA …
1.Person: 6 Möglichkeiten, 2. Person: jeweils noch 5 Möglichkeiten,
3. Person: noch jeweils 4 Möglichkeiten → Anzahl der 3er-Reihen: 6 · 5 · 4 = **120**
2. Schritt: Anzahl der Gruppen
Je 3! = 6 3er-Reihen sind dieselbe Gruppe → Anzahl der 3er-Gruppen: (6 · 5 · 4) : 3! = **20**, Probe (zählen):
ABC ABD ABE ABF ACD ACE ACF ADE ADF AEF BCD BCE BCF BDE BDF BEF CDE CDF CEF DEF

1.) Aus 4 Personen A, B, C, und D soll eine 2-er Gruppe gebildet werden.
Wie viele unterschiedliche 2er-Gruppen sind möglich?
1. Schritt: Berechne zuerst die Anzahl der 2er-Reihen und mache anschließend die Probe, indem du alle möglichen 2er-Reihen aufschreibst und dann zählst.

……

2. Schritt: Berechne jetzt die Anzahl der 2er-Gruppen und mache anschließend die Probe, indem du alle möglichen 2er-Gruppen aufschreibst und dann zählst.

……

2.) Aus 8 Personen soll eine 4er-Gruppe gebildet werden.
Wie viele unterschiedliche 4er-Gruppen sind möglich?
Berechne zuerst die Anzahl der 4er-Reihen und daraus dann die Anzahl der 4er-Gruppen.

……

3.) Löse ohne Rechnung: Aus 5 Personen A, B, C, D und E soll eine 4er-Gruppe gebildet werden. Wie viele unterschiedliche 4er-Gruppen sind möglich?
Schreibe zur Probe alle möglichen 4er-Gruppen auf und zähle sie.

……

4a) 6 Personen stoßen mit ihren Gläsern an, jeder mit jedem. Wie oft ertönt ein Klang?
Mache die Probe, in dem du alle Möglichkeiten aufschreibst und zählst.

……

b) Bei einer Hochzeit stoßen 100 Gäste mit ihren Gläsern an, jeder mit jedem. Wie oft ertönt ein Klang?

……

5.) Bei einem Hallenfußball-Turnier mit Tabellenwertung sollen alle 8 Mannschaften gegeneinander spielen. Wie viele Spiele sind das?

……

6.) Bei Zahlenlotto „6 aus 49“ werden einer gläsernen Trommel mit 49 Kugeln (Nr. 1 bis Nr. 49) sechs Kugeln entnommen.
Ein Lotto-Tipp besteht aus der Angabe von sechs Zahlen zwischen 1 und 49, z.B. 4; 18; 21; 22; 32; 43 .
Wie viele verschiedene Lotto-Tipps gibt es?
Berechne zuerst die Anzahl der 6er-Reihen und daraus dann die Anzahl der 6er-Gruppen (Taschenrechner).

……

……

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit wird man noch eine Knobelaufgabe aus der Knobelaufgaben-Sammlung einschieben.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Erarbeitung FEU 25 Min.	L stellt eine Schätzfrage und damit das Thema vor: *Aus 6 Personen soll eine 3er-Gruppe gebildet werden.* *Wie viele unterschiedliche 3er-Gruppen sind möglich?* SuS schätzen, die Schätzungen werden festgehalten, der Gewinner bekommt nach der Auflösung einen kleinen Preis. L stellt in Aussicht, dass SuS am Ende ausrechnen können, wie viele Lotto-Tipps es beim Lotto „6 aus 49“ gibt. L entwickelt mit den SuS die beiden Musterbeispiele – vgl. Lehrerblatt, Notation in geeigneter Kürze. SuS schreiben dabei selbstständig die dargestellten Reihen und Gruppen systematisch (!) auf. (Gruppen werden hier zur Unterscheidung von Reihen mit einem Rahmen o.ä. versehen, man könnte auch eine „Wolke“ malen und die Elemente ungeordnet hineinschreiben, es handelt sich bei diesen Hilfsbegriffen ja um eine didaktische Reduktion der Begriffe k-Tupel für Reihen bzw. k-Mengen für Gruppen.) L weist auf die Strategie hin: - an überschaubaren Verhältnissen lernen L motiviert die SuS: „Das ist eigentlich Stoff der Klasse 10“. L gibt einen Hinweis für die Berechnung der Gruppen-Anzahlen: „Zuerst kürzen, dann erst ausrechnen!“	Tafel, Heft
2. Übung EA/PA 25 Min.	L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend. Lösungen: 1.) $4 \cdot 3 = 12$ 2er-Reihen und $12 : 2! = 6$ 2er-Gruppen 2.) $(8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5) : 4! = 7 \cdot 2 \cdot 5 = 70$ 4er-Gruppen (zuerst kürzen!) 3.) Es sind 5 4er-Gruppen möglich – immer eine der 5 Personen auslassen! ABCD, ABCE, ABDE, ACDE, BCDE 4a) $(6 \cdot 5) : 2! = 15$ Klänge 4b) $(100 \cdot 99) : 2! = 4950$ Klänge 5.) $(8 \cdot 7) : 2! = 28$ Spiele 6.) $(49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44) : 6! = 13.983.816$ Lotto-Tipps	Schülerblatt
3. Puffer – Kür EA/PA 10 Min.	*Aus n Personen soll eine Gruppe mit k Personen gebildet werden. Wie viele solche Gruppen sind möglich?* *Gib eine Formel an.* Lösung: $(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)) : n!$	

Sachanalyse

Klebt man vier gleiche Würfel aneinander, so gibt es dafür insgesamt acht Möglichkeiten. Lässt man die beiden quaderförmigen, nämlich „vier in einer Reihe“ und „quadratische Grundfläche“ weg, so bleiben noch sechs von den acht so genannten 4-Polywürfeln übrig. Nimmt man noch einen der beiden 3-Polywürfel dazu, so hat man die sieben so genannten **Soma-Bausteine**, vgl. Abb. 1.

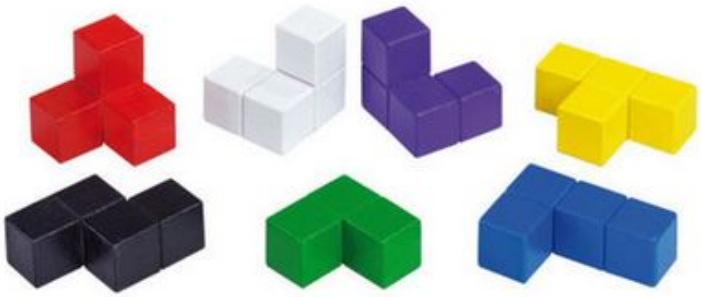


Abb. 1: Die sieben Soma-Bausteine (Farbgebung: Firma Betzold)

Im Folgenden sind die sieben Bausteine jeweils nach ihrer Farbe benannt, wir folgen hier der Farbgebung der Bausteine der Firma Betzold (vgl. Abb. 1): *Rot*, *Weiß*, *Lila*, *Gelb*, *Schwarz*, *Grün* und *Blau*. *Weiß* und *Lila* sind zueinander symmetrisch, lassen sich aber nicht ineinander überführen, das kennt man von rechten und linken Schuh eines Schuhpaars. Eine Überführung von zwei achsensymmetrischen Flächenstücken in der Ebene gelingt dagegen durch eine Drehung um die Symmetrieachse in den umgebenden dreidimensionalen Raum.

Insgesamt sind in diesen sieben Bausteinen 27 kleine Würfel verbaut und man fragt sich, ob sich diese Bausteine vielleicht **zu einem großen Würfel**, einem so genannten **Soma-Würfel**, zusammensetzen lassen.
Die Antwort lautet „ja“, es ist sogar auf 240 Arten möglich!
Dabei werden Lösungen, die durch Drehung und Spiegelung auseinander hervorgehen, nur einfach gezählt (Conway/Guy 1961).

Abb.2: Ein Soma-Würfel

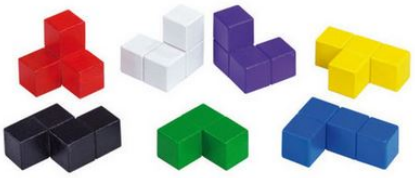
Trotzdem ist das Auffinden einer Lösung auf Anhieb gar nicht so einfach, Abb. 2 gibt einen Blick auf eine der 240 Lösungen.
Dass man klugerweise zuerst die „räumlichen“ Bausteine *Rot*, *Weiß* und *Lila* verwendet, erkennt man spätestens nach einigem Probieren.

Hier ein kleiner – etwas tiefer liegender **Exkurs** – zur Lage der Bausteine *Gelb* und *Blau*. Es gilt:
- Im Soma-Würfel gibt es 8 Ecken.
- *Gelb* bildet im Soma-Würfel 0 oder 2 Ecken.
- *Blau* bildet im Soma-Würfel 0, 1 oder 2 Ecken.
- Die restlichen fünf Bausteine bilden im Soma-Würfel maximal 5 Ecken.

Daraus folgt:
1. *Gelb* muss 2 Ecken bilden, daraus folgt wiederum: *Gelb* muss eine Kante des Soma-Würfels bilden.
2. *Blau* muss dann entweder 2 Ecken oder 1 Ecke bilden, daraus folgt wiederum: *Blau* muss eine Kante des Soma-Würfels bilden oder die „Fußspitze“ von *Blau* muss eine Ecke im Soma-Würfel bilden.

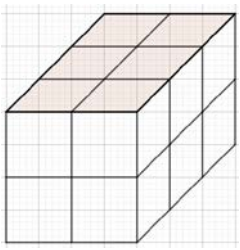
Im **Internet** findet sich eine umfangreiche Fan-Gemeinde, die sich mit Soma-Bausteinen und dem unterrichtlichen Einsatz zur Weiterentwicklung der räumlichen Vorstellung und des Problemlösens beschäftigt. Dort wird auch über den „Erfinder“ (Piet Hein 1936 während einer Vorlesung) und über allerlei Varianten und Detailfragestellungen berichtet sowie über die Namensgebung (die Droge in A. Huxleys Roman *Schöne neue Welt* ?) spekuliert.
Ebenso gibt es Hinweise auf PC-Programme zur Beschreibung der 240 Möglichkeiten und Kurzfilme auf Youtube. Die Farbgebung der Bausteine variiert je nach Verfasser bzw. Hersteller.

Die **sieben Soma-Bausteine**:
von links nach rechts in der oberen Reihe:
Rot, *Weiß*, *Lila* und *Gelb*.
In der unteren Reihe von links nach rechts:
Schwarz, *Grün* und *Blau*.

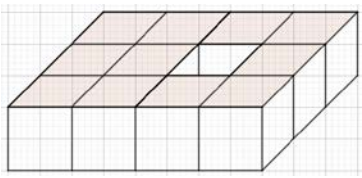


1.) **Baue** den abgebildeten Körper …

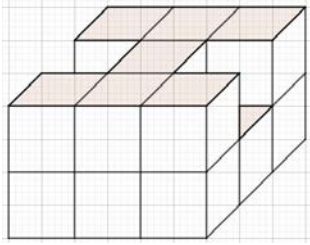
a) … aus drei Bausteinen



b) … aus drei Bausteinen

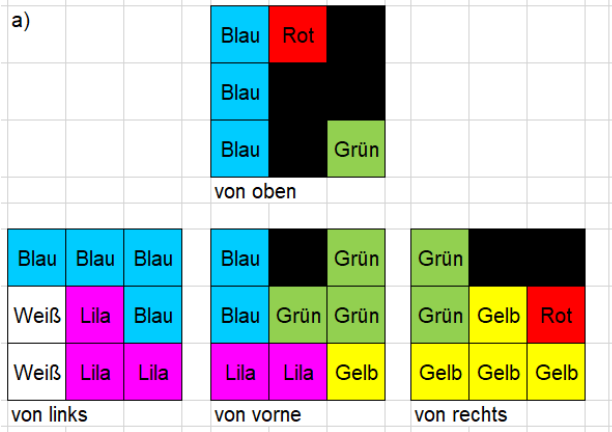


c) … aus den vier Bausteinen *Blau*, *Gelb*, *Lila* und *Weiß*

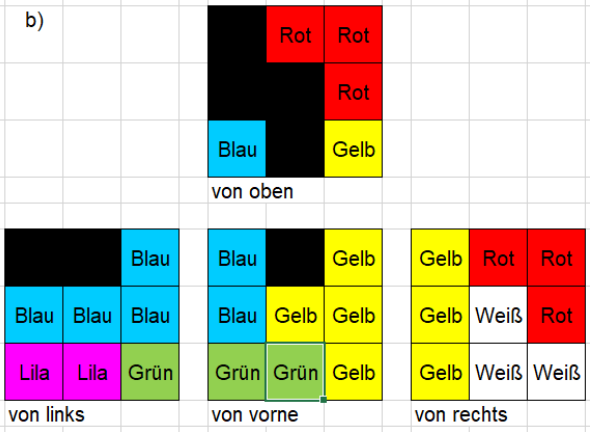


2.) **Baue** einen Würfel aus den sieben Bausteinen mit den folgenden Ansichten.

a)

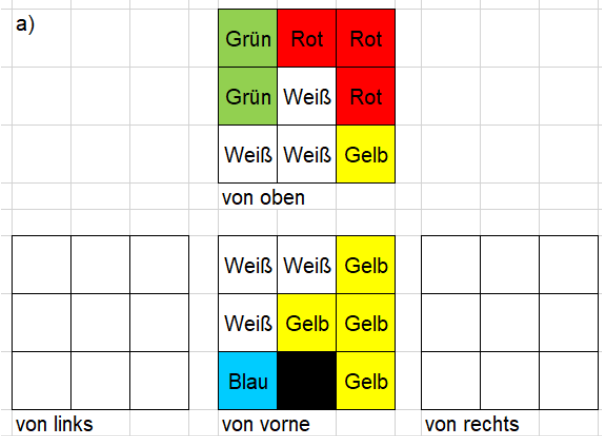


b)

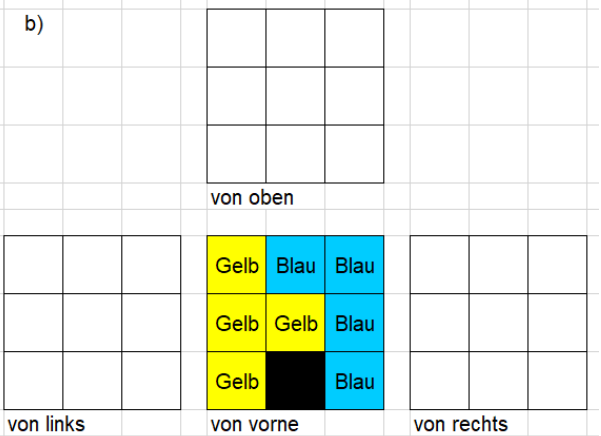


3.) **Baue** den Würfel aus den sieben Bausteinen fertig und **notiere** die weiteren Ansichten.
Es genügt, wenn du dabei entweder die zugehörigen Farben oder die Farbnamen verwendest.

a)

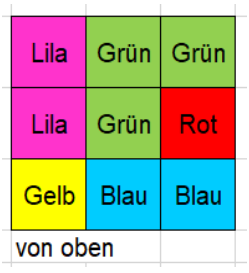


b)



Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird man die Übungsphase kürzer halten.

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Erarbeitung I FEU 10 Min.	L stellt das Thema vor: *Ein 3-D-Puzzle – hiermit kann man seine Raumanschauung trainieren. Die Raumanschauung braucht man in vielen Berufen: Architekt, Chemiker, Arzt usw.* L entwickelt zusammen mit den SuS, welche 4-Polywürfel (im Unterricht: „vier aneinander geklebte Würfel“) es gibt. Kopfgeometrie: SuS beschreibt einen vorgestellten 4-Polywürfel mit Worten, L zeigt daraufhin den betreffenden Baustein.	Große Soma-Bausteine
2. Erarbeitung II FEU 5 Min.	L erläutert, welche davon die sieben Soma-Bausteine sind. Zusammenfassung: Es sind die 3- und 4-Polywürfel, die keine Quader sind. L: Wie könnte man diese Bausteine in Gruppen unterteilen? → ein „Dreier“: *Grün*; „ebene Vierer“: *Blau*, *Gelb*, *Schwarz* „räumliche Vierer“: *Lila*, *Rot*, *Weiß*	Schülerblatt – Seite 1 oben
3. Übung EA/PA 25 Min.	L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend. Die Aufgaben unterliegen auf natürliche Weise der Selbstkontrolle. Bei 3a) und 3b) muss man schon etwas „knobeln“. 1a) Es kommen nur „Vierer“ in Frage, Lösungen z.B.: *Blau*|*Lila*|*Weiß* oder *Gelb*|*Rot*|*Weiß* 1b) Es kommen nur *Grün* und zwei „ebene Vierer“ in Frage: *Blau*|*Gelb*|*Grün* 1c) Lösung: *Gelb* oben vorne, *Blau* unten vorne, *Lila* hinten rechts, *Weiß* hinten links 3b) 	Schülerblatt (ggf. Puffer s.u.)

Weitere schöne Figuren, die man aus den Soma-Bausteinen zusammenbauen kann findet man samt Lösungen unter: http://paul-matthies.de/Schule/Soma.php (Achtung: andere Färbung!)

Grundsätzliches liest man in Gardner, M. (1986): Bacons Geheimnis. Wolfgang Krüger Verlag; S. 41ff

Sachanalyse

Klebt man vier gleiche Würfel aneinander, so gibt es dafür insgesamt acht Möglichkeiten. Lässt man die beiden quaderförmigen, nämlich „vier in einer Reihe“ und „quadratische Grundfläche“ weg, so bleiben noch sechs von den acht so genannten 4-Polywürfeln übrig. Nimmt man noch einen der beiden 3-Polywürfel dazu, so hat man die sieben so genannten **Soma-Bausteine**, vgl. Abb. 1.

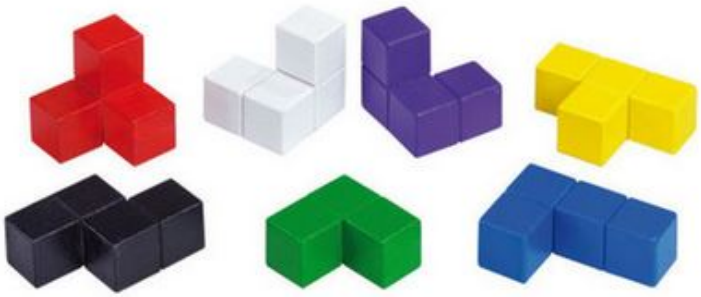


Abb. 1: Die sieben Soma-Bausteine (Farbgebung: Fa. Betzold)

Man kann jedem Baustein einen Namen geben, von links nach rechts in der oberen Reihe z.B.:
Ecke („E“, rot), Rechts („R“, weiß), Links („L“, violett), Nase („N“, gelb).
Untere Reihe von links nach rechts z.B.: Hund („H“, schwarz), Drilling („D“, grün) und Fuß („F“, blau).
R und L sind zueinander symmetrisch, lassen sich aber nicht ineinander überführen, das kennt man von rechten und linken Schuh eines Schuhpaars. Eine Überführung von zwei achsensymmetrischen Flächenstücken in der Ebene gelingt dagegen durch eine Drehung um die Symmetrieachse in den umgebenden dreidimensionalen Raum.

Insgesamt sind in diesen sieben Bausteinen 27 kleine Würfel verbaut und man fragt sich, ob sich diese Bausteine vielleicht **zu einem großen Würfel zusammensetzen** lassen.
Die Antwort lautet „ja“, es ist sogar auf 240 Arten möglich! Dabei werden Lösungen, die durch Drehung und Spiegelung auseinander hervorgehen nur einfach gezählt (Conway/Guy 1961).

Abb.2: Ein Soma-Würfel

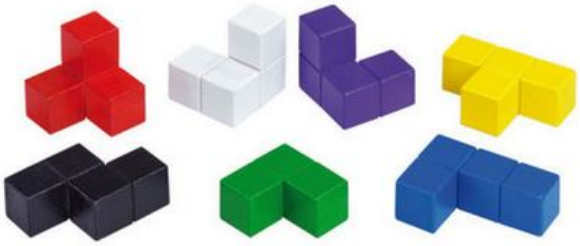
Trotzdem ist das Auffinden einer Lösung auf Anhieb gar nicht so einfach, Abb. 2 gibt einen Blick auf eine Lösung.
Dass man klugerweise zuerst die „räumlichen“ Bausteine E, R und L verwendet, liegt spätestens nach einigem Probieren auf der Hand.

Hier ein kleiner – etwas tiefer liegender **Exkurs** – zur Lage der Bausteine N und F. Es gilt:
- Im großen Würfel gibt es 8 Ecken.
- N bildet im großen Würfel 0 oder 2 Ecken.
- F bildet im großen Würfel 0, 1 oder 2 Ecken.
- Die restlichen fünf Bausteine bilden im großen Würfel maximal 5 Ecken.

Daraus folgt:
1. N muss 2 Ecken bilden, also: N muss eine Kante des großen Würfels bilden.
2. F muss 2 Ecken oder 1 Ecke bilden, also: F muss eine Kante des großen Würfels bilden oder die „Fußspitze“ von F muss eine Ecke im großen Würfel bilden.

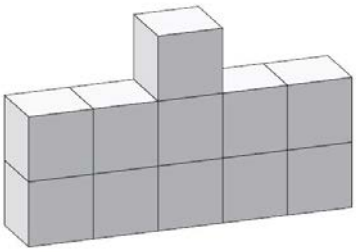
Im **Internet** findet sich eine umfangreiche Fan-Gemeinde, die sich mit Soma-Bausteinen und dem unterrichtlichen Einsatz zur Weiterentwicklung der räumlichen Vorstellung und des Problemlösens beschäftigt. Dort wird auch über den „Erfinder“ (Piet Hein 1936 während einer Vorlesung) und über allerlei Varianten und Detailfragestellungen berichtet und über die Namensgebung (die Droge in A. Huxleys Roman *Schöne neue Welt* ?) spekuliert.
Ebenso gibt es Hinweise auf PC-Programme zur Beschreibung der 240 Möglichkeiten und Kurzfilme auf youtube. Die Farbgebung der Bausteine variiert je nach Verfasser bzw. Hersteller.

Die **sieben Soma-Bausteine**:
von links nach rechts in der oberen Reihe:
Ecke („**E**“, rot), **R**echts („**R**“, weiß),
Links („**L**“, violett), **N**ase („**N**“, gelb).
In der unteren Reihe von links nach rechts:
Hund („**H**“, schwarz), **D**rilling („**D**“, grün) und
Fuß („**F**“, blau).

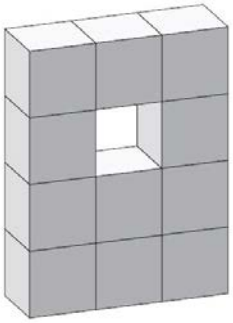


1.) **Baue** die abgebildeten Körper aus drei Soma-Bausteinen.

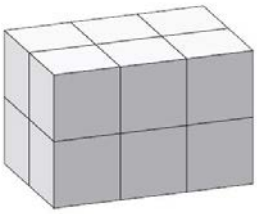
a)



b)

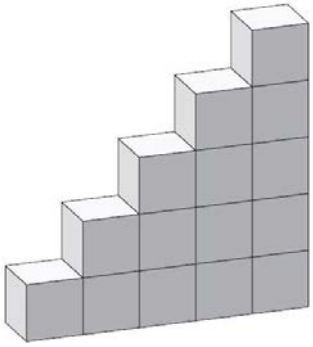


c)

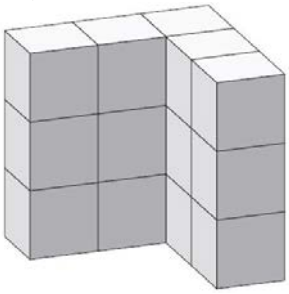


2.) **Baue** die abgebildeten Körper aus vier Soma-Bausteinen.

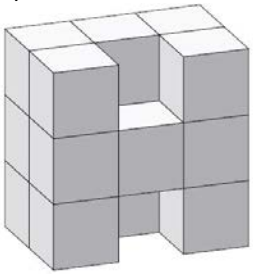
a)



b)

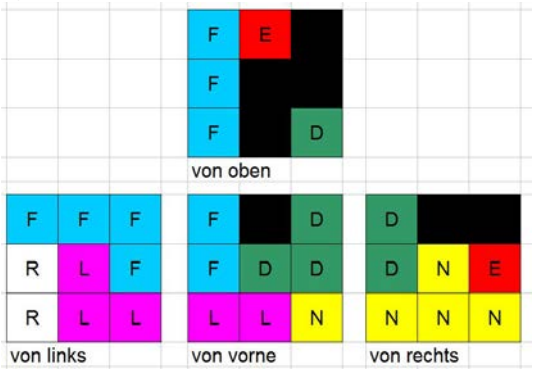


c)

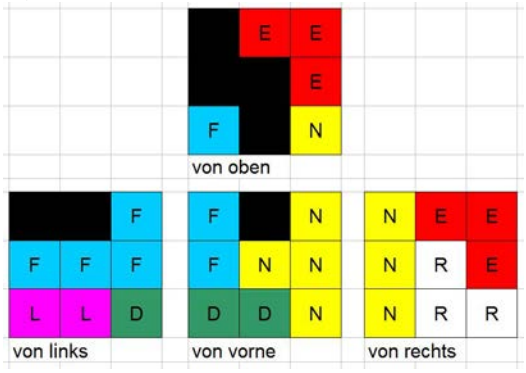


3.) **Baue** einen Würfel aus den sieben Soma-Bausteinen mit den folgenden Ansichten.

a)

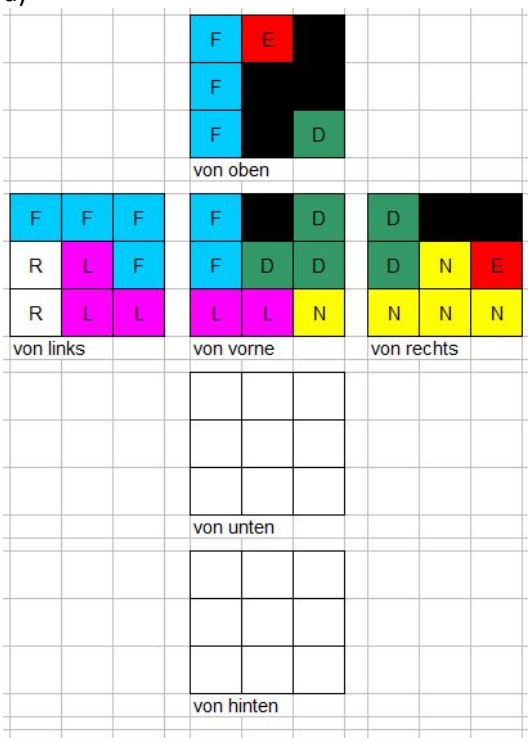


b)

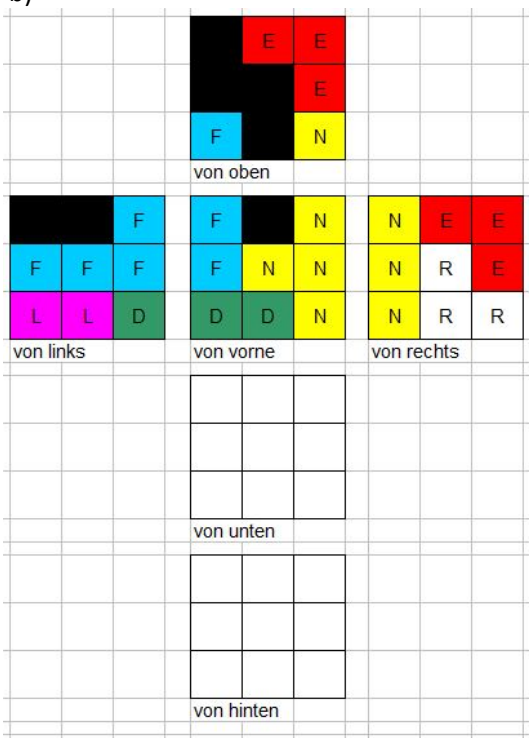


4.) Die Ansichten der beiden Würfel aus Aufgabe 3 sind hier noch einmal abgebildet.
Wie sehen die beiden Würfel von unten und von hinten aus?
Versuche, diese Ansichten herauszufinden ohne den zusammengebauten Würfel anzuschauen.
Verwende beim Eintragen die zugehörigen Farben oder Buchstaben.
Kontrolliere deine Lösungen mithilfe des zusammengebauten Würfels.

a)

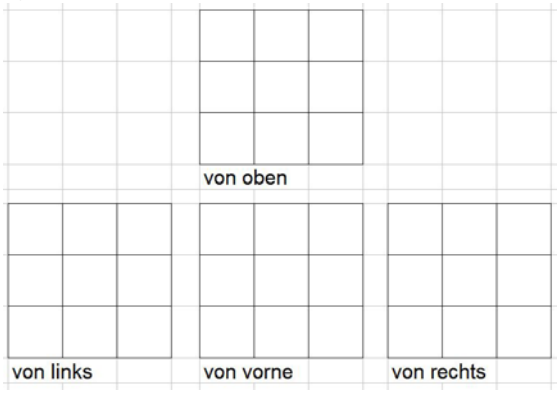


b)

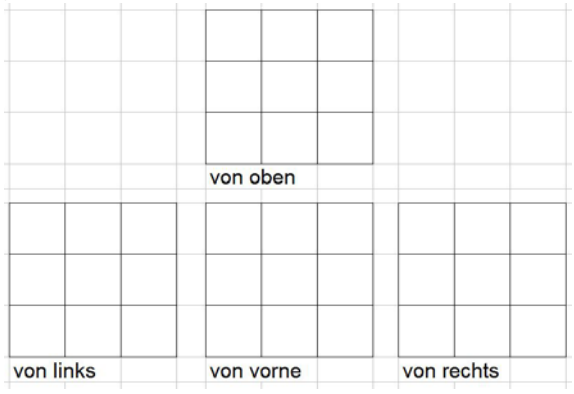


5.) **Baue** zweimal einen Würfel aus den sieben Soma-Bausteinen (es gibt insgesamt 240 Möglichkeiten!) und **notiere** die zugehörigen Ansichten, verwende hierbei die zugehörigen Farben oder Buchstaben.
Beachte dabei: Diese beiden Würfel und die Würfel aus der Aufgabe 4 sollen nicht durch eine Drehung oder Spiegelung auseinander hervorgehen.
Orientiere dich beim Vergleichen am gelben Baustein N. Er bildet immer eine Kante.

a)



b)



6.) **Lege** deinem Nachbarn die Ansichten der beiden Würfel aus der Aufgabe 5 zum Nachbauen vor.

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird man die Übungsphase kürzer halten.

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Erarbeitung I FEU 15 Min.	L stellt das Thema vor: *Ein 3-D-Puzzle – hiermit kann man seine Raumanschauung trainieren. Die Raumanschauung braucht man in vielen Berufen: Architekt, Chemiker, Arzt usw.* L entwickelt zusammen mit den SuS, welche 4-Polywürfel (im Unterricht: „vier aneinander geklebte Würfel“) es gibt. Kopfgeometrie: SoS beschreibt einen vorgestellten 4-Polywürfel mit Worten, L zeigt daraufhin den betreffenden Baustein.	Große Soma-Bausteine
2. Erarbeitung II FEU 10 Min.	L erläutert, welche davon die sieben Soma-Bausteine sind. Zusammenfassung: Es sind die 3- und 4-Polywürfel, die keine Quader sind. L erläutert die Namensgebungen mit Abkürzungen, die im Folgenden verwendet werden. L: Wie könnte man diese Bausteine in Gruppen unterteilen? → ein „Dreier“: D; „ebene Vierer“: F, H, N; „räumliche Vierer“: E, L, R	Schülerblatt – Seite 1 oben
3. Übung EA/PA 60 Min.	L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend. Die Aufgaben unterliegen überwiegend auf natürlicher Weise der Selbstkontrolle. Hilfen bei den Aufgaben 1.) und 2.) – verwendete Bausteine: 1a) D, F, N 1b) D, F, N 1c) F, L, R 2a) D, F, H, N 2b) D, F, H, N 2c) F, L, N, R Hinweis zur Aufgabe 4.): Denkt man sich das Würfelnetz zum Würfel zusammengebaut, müssen die Quadrate mit gemeinsamer Würfelkante gleichfarbig sein. Hilfe bei Aufgabe 5.) (vgl. Sachanalyse): - Mit den räumlichen Bausteinen beginnen. - N muss eine Kante des großen Würfels bilden. - F muss eine Kante des großen Würfels bilden oder die „Fußspitze“ von F muss eine Ecke im großen Würfel bilden.	Schülerblatt (ggf. Puffer s.u.)

Weitere schöne Figuren, die man aus den Soma-Bausteinen zusammenbauen kann findet man samt Lösungen unter: http://paul-matthies.de/Schule/Soma.php (Achtung: andere Färbung!)

Grundsätzliches liest man in Gardner, M. (1986): Bacons Geheimnis. Wolfgang Krüger Verlag; S. 41ff

Lehrerblatt

Über ca. 3 Stunden beschäftigt sich dieses Modul mit dem Programmieren in der graphischen Programmiersprache Scratch. Anders als im Programmier-Modul für Klasse 6 gibt es diesmal keine Variante für die Programmiersprache Pocket Code.
Da in Klasse 7 für alle SchülerInnen einfache Grundlagen der Informatik als einstündiges Fach auf dem Stundenplan stehen, wird an sehr vielen Schulen mit Scratch gearbeitet. Daher bietet es sich an, Scratch auch in Mkid zu nutzen.

Die meisten Schulen werden Scratch auf ihren Servern bzw. Rechnern installiert haben, sodass Sie nur einen Computerraum oder einen Klassensatz Notebooks/ Tablets für die Mkid-Stunden buchen müssen. Klären Sie frühzeitig, was Sie benötigen und beachten müssen, um mit SchülerInnen im Computerraum oder mit dem Notebooksatz arbeiten zu können. Sie müssen in den Stunden allen SchülerInnen zwei Dateien mit Spielfeldern zur Verfügung stellen. Fragen und testen Sie, wie das an Ihrer Schule am einfachsten geht (Tauschverzeichnis, Funktion Austeilen der Klassenraum-Software, …). Informieren Sie sich auch, wie und wo die SchülerInnen ihre Scratch-Programme speichern können.

Im letzten Schuljahr wurde in Mkid bereits ein Rechentrainer programmiert. Dieses Modul greift das Thema Programmieren wieder auf, ist aber so gestaltet, dass man ohne Vorkenntnisse aus Mkid der Klasse 6 oder dem Informatikunterricht der Klasse 7 zurechtkommt.

Bevor Sie mit Ihren SchülerInnen mit Scratch arbeiten, sollten Sie sich damit gründlich vertraut machen und alle Aufgaben aus den Arbeitsblättern selbst programmieren. Testen Sie auch die Verwendung von Scratch in Ihrer Schule (inkl. der Auswahl an Kostümen für die Figuren), da dort möglicherweise andere Pakete installiert sein könnten als auf Ihrem Computer.

Hinweise zu Scratch:

Scratch kann online genutzt werden https://scratch.mit.edu/projects/editor/?tip_bar=home oder kostenlos auf Geräten mit den Betriebssystemen Windows, macOS und Android installieren werden. Den dazu benötigten Offline-Editor finden Sie auf der Scratch Homepage https://scratch.mit.edu unter Support. Dort stehen neben der aktuellen auch ältere Versionen von Scratch zum Download zur Verfügung. An vielen Schulen sind noch ältere Versionen in Gebrauch, weswegen es sich vor dem Download empfiehlt zu klären, welche Version an der Schule installiert ist. Der Online-Editor nutzt ausschließlich die aktuellste Scratch-Version.

Um mit Scratch zu programmieren werden einfach die gewünschten Programmblöcke in den Skriptbereich gezogen. Die Programmblöcke sind in verschiedene Bereiche wie Bewegung, Aussehen, Steuerung, Daten, Fühlen etc. gruppiert. Die Zuordnung ist nicht in allen Fällen intuitiv. Machen Sie sich daher mit den verschiedenen Bereichen vertraut.
Um einen Programmblock zu entfernen, schiebt man ihn einfach wieder zurück in den Block-Vorrat.

In Scratch können allen Figuren und Bühnen (so heißen die Hintergründe) Programm-Skripte zugeordnet werden. Damit man die Skripte, die z.B. zur Figur Katze gehören, sehen und verändern kann, muss man vorher im Bereich Figuren auf die Katze klicken. Sind die gesuchten Skripte nicht zu sehen, ist wahrscheinlich gerade eine andere Figur oder eine Bühne aktiviert.

Tipps für den Unterricht:

Besprechen und üben Sie bei erster Gelegenheit das Speichern eigener Scratch-Projekte an einer Stelle, an der die SchülerInnen das Programm auch Wochen später wiederfinden.

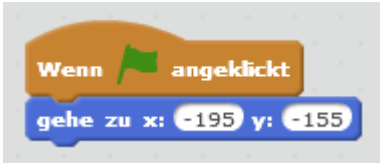
Das vorbereitet Spielfeld für das Labyrinth finden Sie in der Datei Spielfeld1, ein weiteres für Fortgeschrittene in der Datei Spielfeld2. Teilen Sie zunächst nur Spielfeld1 an die SchülerInnen aus. Sie können die Lösungen zu den einzelnen Aufgaben an der Tafel aushängen, sodass SchülerInnen bei kleinen Problemen oder Fragen selbstständig nachschauen können. Das kann Sie entlasten, weil so weniger Fragen auf einmal von Ihnen beantwortet werden müssen. Es ist sinnvoll vorzugeben, dass die Lösungen von den SchülerInnen nicht mit an den eigenen Platz genommen werden dürfen.

Wie schnell die SchülerInnen vorankommen, hängt auch von den Vorkenntnissen ab und wird von SchülerIn zu SchülerIn variieren. Daher sind am Ende der Einheit zusätzliche Aufgaben für die schnelleren vorgesehen.

Lösungen zu den Aufgaben:

Aufgabe 1

Aufgabe 2



Ungefähre Werte für die Koordinaten.

Aufgabe 3

Soll die Drehrichtung geändert werden (Drehung nach rechts), so kann man ein negatives Vorzeichen eingeben, z.B. „-90“. Das ist beim Spielen einfacher als die Alternative „270“.

Aufgabe 4

Aufgabe 5

c)

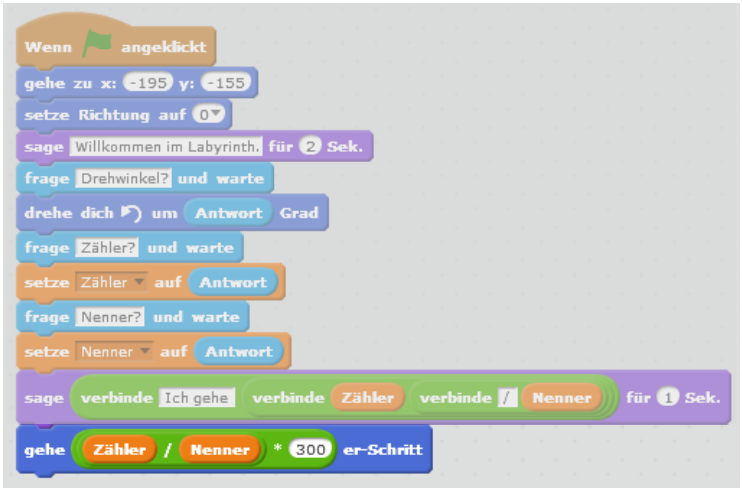
d)

Aufgabe 6

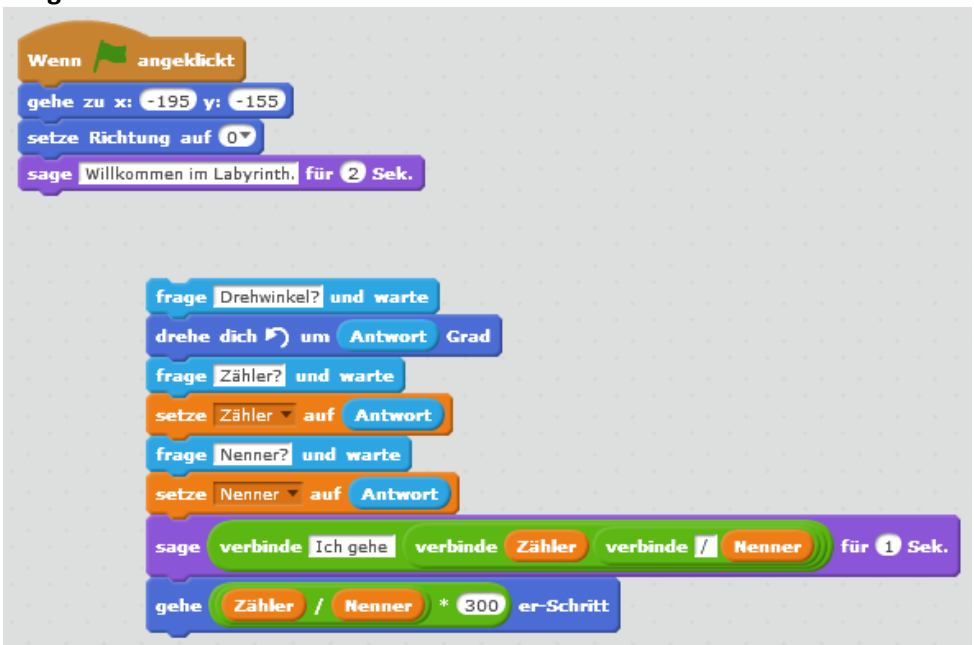
a)

b)

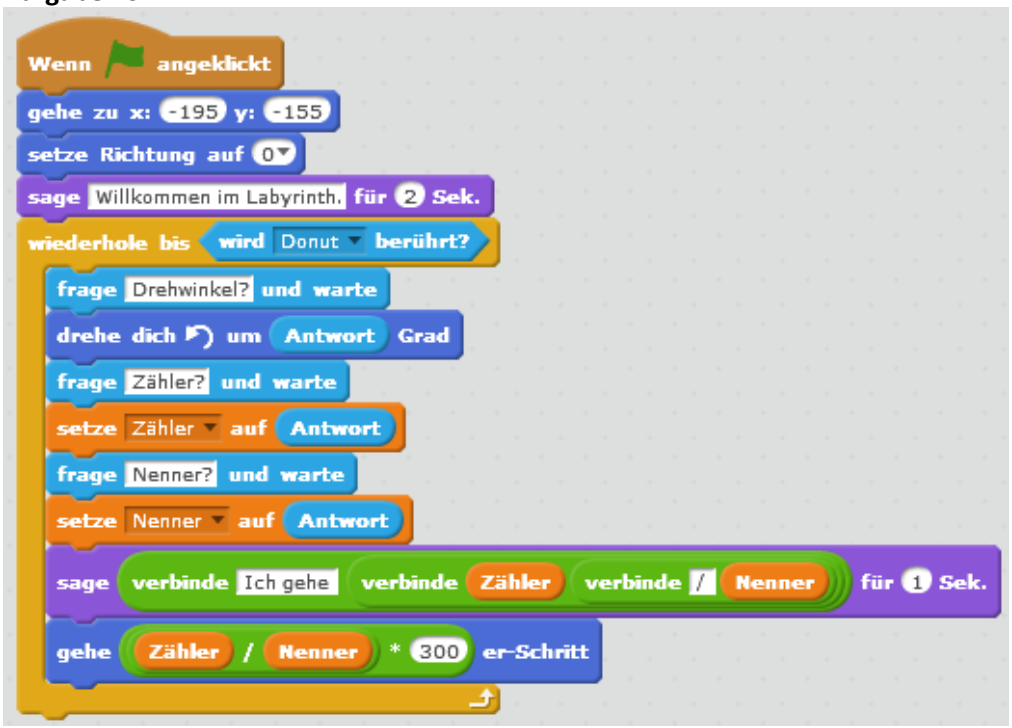
Aufgabe 7



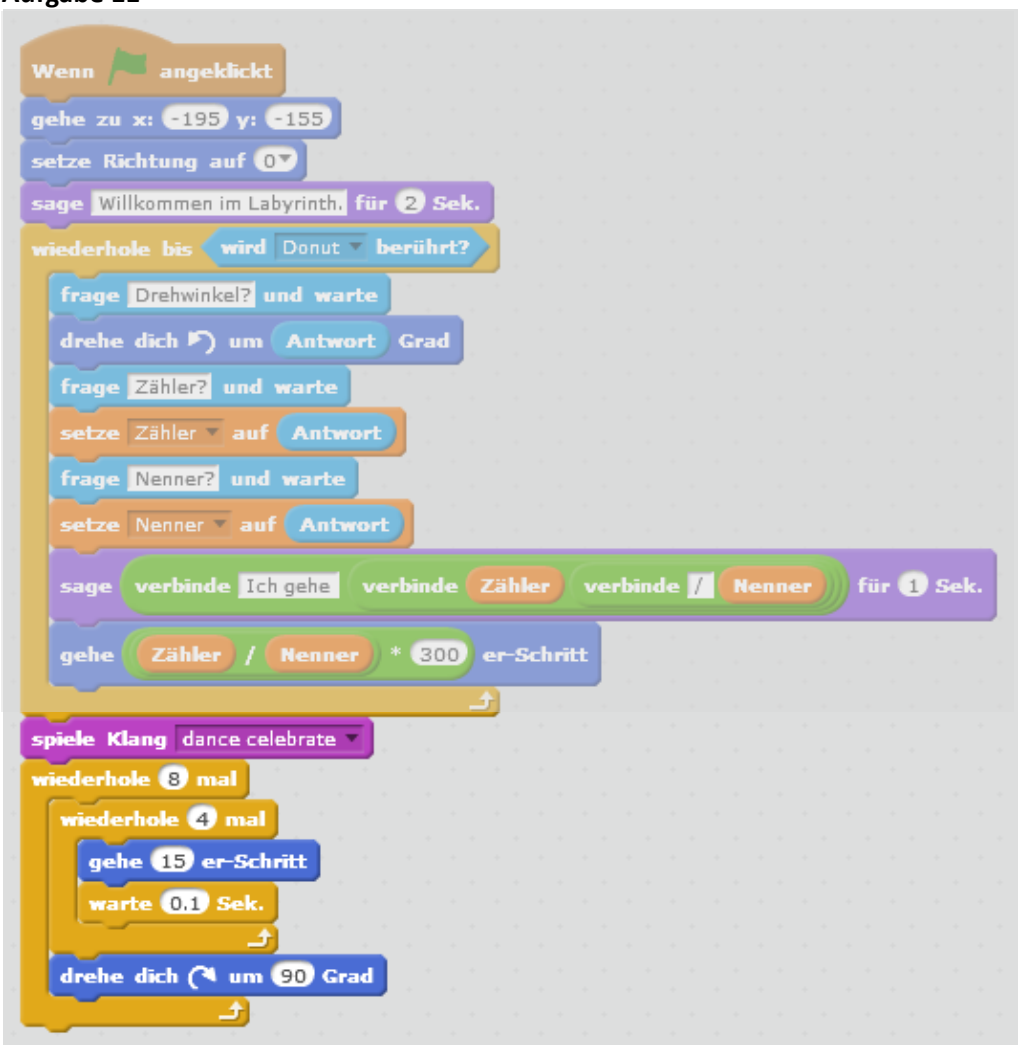
Aufgabe 8



Aufgabe 10



Aufgabe 11



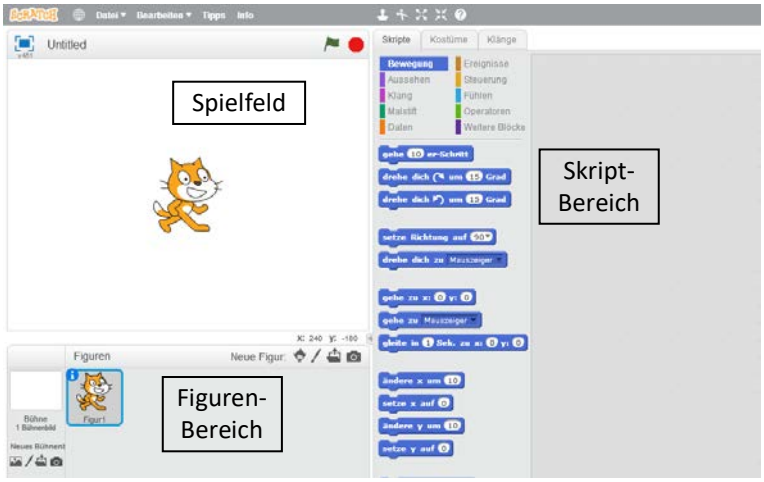
Informationen zu Scratch 2.0 und Vorbereitungen

Mit Scratch 2.0 programmieren

Der Bildschirm ist bei Scratch in drei Teile aufgeteilt. Rechts befindet sich der **Skript- Bereich**, in dem die Programme (auch Skripte genannt) erstellt werden.

Links ist oben das **Spielfeld**, in dem später die Programme ablaufen. Du kannst die Programme mit der grünen Fahne starten und mit dem roten Stopp-Zeichen anhalten.

Links unten ist der **Figuren-Bereich.** Dort kannst du beim Programmieren verschiedenen Figuren und Bühnen auswählen.



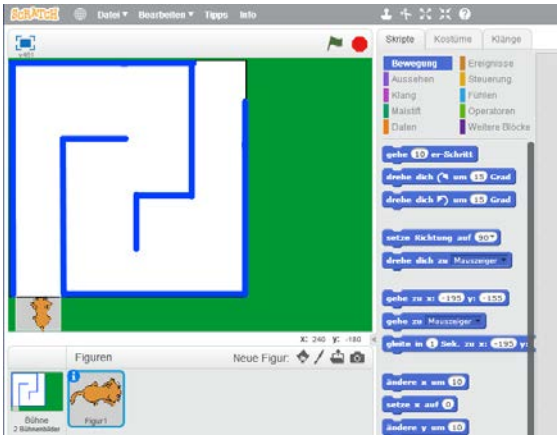
Um ein Programm zu schreiben, zieht man die farbigen Blöcke aus dem Vorrat nach rechts in den Skript-Bereich.

Probiere das kurz aus: Benutze aus dem Bereich Ereignisse den „Wenn grüne Fahne angeklickt“-Block und aus dem Bereich Bewegung den „gehe 10-er Schritt“-Block, um ein Programm zu schreiben, bei dem die Katze ein Stück nach rechts geht. Du musst dabei die Blöcke aneinanderhängen – wie bei Puzzleteilen. Um das Programm zu starten, klicke auf die grüne Fahne oberhalb des Spielfelds.

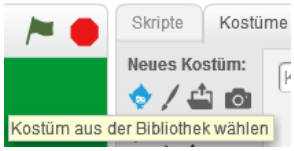
Um nicht mehr benötigte Blöcke zu löschen, kannst du sie einfach wieder in den Vorrat schieben.

Vorbereitungen für das Labyrinth-Programm:

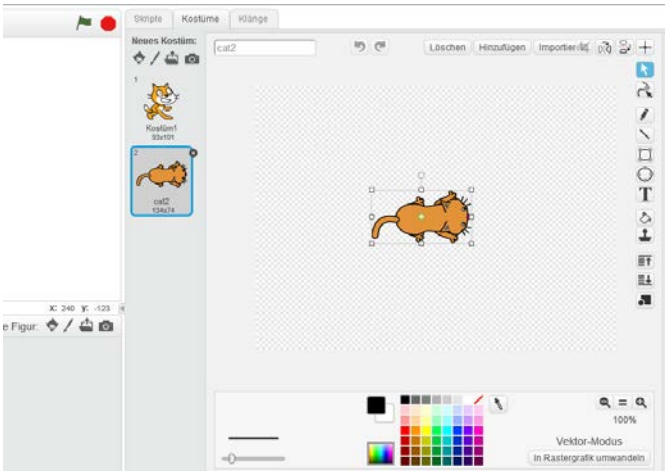
a) Für das Labyrinth gibt es bereits einen passenden Hintergrund (in Scratch „Bühne“ genannt). Er befindet sich in der Datei **Spielfeld_1**. Klicke im Figuren-Bereich unten links unter Neues Bühnenbild auf . Du erfährst von der Kursleiterin/ vom Kursleiter, wie du die Datei findest. Wähle die Datei aus und klicke auf Öffnen. Nun solltest du im Spielfeld-Bereich oben links das gleiche Labyrinth wie im folgenden Bild sehen.



b) Klicke nun im Figuren-Bereich auf die **Figur 1** und dann auf **Kostüme** (oben im Scratch-Bildschirm). Wähle unter **Neues Kostüm** das linke Symbol . Es öffnet sich ein Fenster, in dem du mit einem Doppelklick das Kostüm „cat2“ auswählst, das die Katze von oben zeigt.

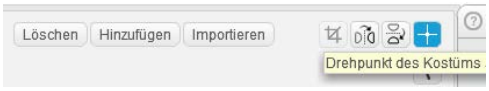


c) Die Katze ist für unser Labyrinth zu groß. Klicke zuerst ganz rechts unten auf „in Vektorgrafik umwandeln“.
Ziehe mit der Computer-Maus ein Fenster um Katze im rechten Teil des Scratch-Bildschirms. Achte darauf, dass die ganze Katze in diesem Fenster enthalten ist.
Klicke dann eine Ecke des Fensters an und verkleiner die Katze auf ungefähr die Hälfte.
Dabei hat sich die Katze wahrscheinlich ein wenig verschoben. Schiebe die Katze daher wieder in die Mitte des Bereichs mit dem karierten Hintergrund.



d) Teste nun, ob die Katze klein genug ist. Klicke im Spielfeld (linker Teil des Scratch-Bildschirms) auf die Katze und schiebe sie in den grauen Startbereich. Die Katze muss etwas kleiner sein als der Startbereich. Falls nicht, verkleinere die Katze im rechten Teil des Scratch-Bildschirms noch ein wenig mehr.

e) Stelle nun den Drehpunkt ein, um den sich die Katzen-Figur später drehen wird. Klicke dazu oben rechts auf das Drehpunkt-Symbol.

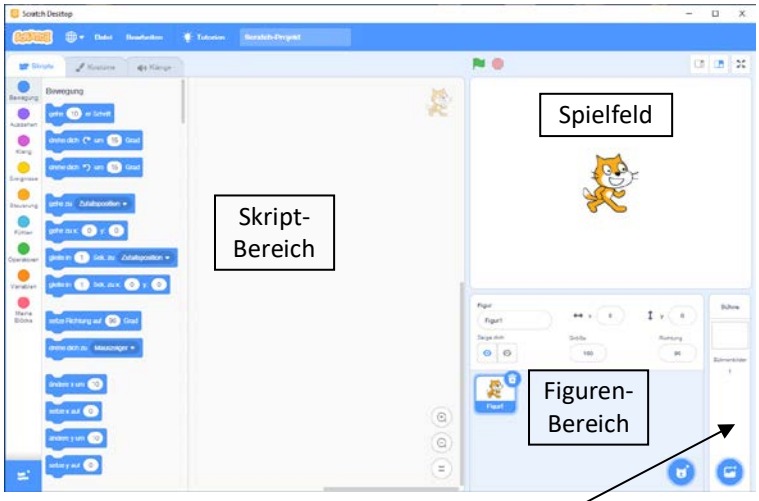


Anschließend schiebst du das schwarze Kreuz möglichst genau auf die Mitte der Katze.

Jetzt ist alles vorbereitet, um später das Labyrinth-Spiel zu programmieren. Gehe nun auf „Datei“ > „Speichern unter“ und **speichere** alles unter Labyrinth_1.
Halte dich dabei an die Hinweise deines Lehrers, in welchem Ordner du deine Programme speichern sollst.

Informationen zu Scratch 3.0 und Vorbereitungen

Mit Scratch 3.0 programmieren



Der Bildschirm ist bei Scratch 3.0 in vier Teile aufgeteilt. Links befindet sich der **Skript- Bereich**, in dem die Programme (auch Skripte genannt) erstellt werden.

Rechts ist oben das **Spielfeld**, in dem später die Programme ablaufen. Du kannst die Programme mit der grünen Fahne starten und mit dem roten Stopp-Smbol anhalten.

Rechts unten ist der **Figuren-Bereich.** Dort kannst du beim Programmieren verschiedenen Figuren und Bühnen auswählen. Ganz unten rechts findest du neben dem Figuren-Bereich den **Bühnen-Bereich**.

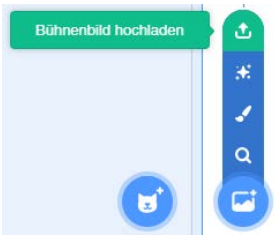
Um ein Programm zu schreiben, zieht man die farbigen Blöcke aus dem Vorrat nach rechts in den Skript-Bereich.

Probiere das kurz aus: Benutze aus dem Bereich Ereignisse den „Wenn grüne Fahne angeklickt“-Block und aus dem Bereich Bewegung den „gehe 10-er Schritt“-Block, um ein Programm zu schreiben, bei dem die Katze ein Stück nach rechts geht. Du musst dabei die Blöcke aneinanderhängen – wie bei Puzzleteilen.

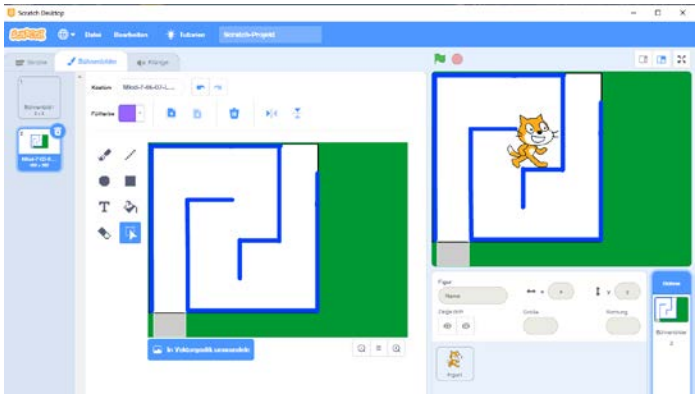
Um das Programm zu starten, klicke auf die grüne Fahne oberhalb des Spielfelds.

Um nicht mehr benötigte Blöcke zu löschen, kannst du sie einfach wieder in den Vorrat schieben.

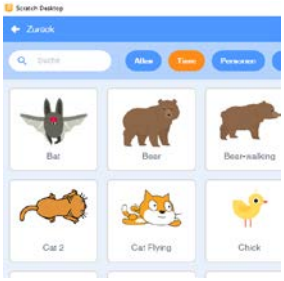
Vorbereitungen für das Labyrinth-Programm:

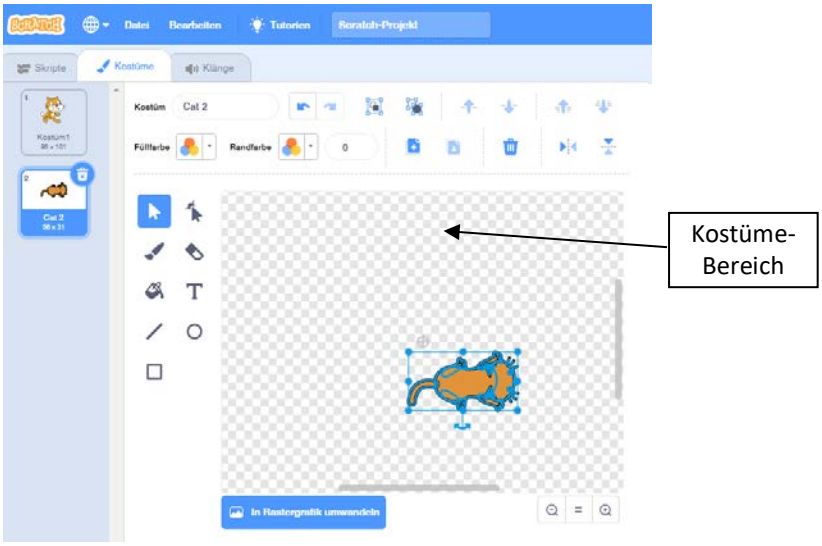


a) Für das Labyrinth gibt es bereits einen passenden Hintergrund (in Scratch „Bühne“ genannt). Er befindet sich in der Datei **Spielfeld_1**. Klicke im Bühnen-Bereich auf Bühnenbild hochladen. (Um das in der Abbildung rechts gezeigte Menü zu sehen, musst du mit der Maus ohne zu klicken auf das Bühnenbild-Wählen-Symbol fahren.)
Du erfährst von der Kursleiterin/ vom Kursleiter, wie du die Datei findest. Wähle die Datei aus und klicke auf Öffnen. Nun solltest du im Spielfeld-Bereich oben rechts das gleiche Labyrinth wie im folgenden Bild sehen.



b) Klicke nun im Figuren-Bereich auf die **Figur 1** und in der linken Hälfte des Scratch-Bildschirms oben auf „Kostüme“. Nun siehst du statt des Skript-Bereichs den **Kostüme-Bereich**. Klicke ganz links unten im Kostüme-Bereich auf das Kostüm-Wählen-Symbol . Es öffnet sich ein Fenster mit vielen Kostümen. Klicke oben auf Tiere und wählen dann das Kostüm „cat2“, welches die Katze von oben zeigt.





c) Die Katze ist für unser Labyrinth zu groß. Ziehe im Kostüme-Bereich mit der Computer-Maus ein Fenster um die Katze. Achte darauf, dass die *ganze Katze* in diesem Fenster enthalten ist. Klicke dann eine Ecke des Fensters an und verkleinere die Katze auf ungefähr die Hälfte.
Dabei hat sich die Katze wahrscheinlich ein wenig verschoben. Schiebe die Katze wieder zurück auf die Markierung in der Mitte des Kostüme-Bereichs. Der Bauch der Katze sollte *möglichst genau* auf der Markierung liegen. Denn die Markierung ist der Drehpunkt, um den sich die Katze später in deinem Programm drehen wird.

d) Teste nun, ob die Katze klein genug ist: Klicke im Spielfeld (rechts oben im Scratch-Fenster) auf die Katze und schiebe sie in den grauen Startbereich unter dem Labyrinth. Die Katze muss etwas kleiner sein als der graue Startbereich. Falls nicht, verkleinere im Kostüme-Bereich die Katze noch ein wenig mehr.

e) Jetzt ist alles vorbereitet, um später das Labyrinth-Spiel zu programmieren. Damit du nachher beginnen kannst, ein Programm für die Katze zu schreiben, klicke oben links auf „Skripte“. Jetzt solltest du wieder den Skript-Bereich sehen. Gehe nun auf „Datei“ → „Auf deinem Computer speichern“ und **speichere** alles unter Labyrinth_1. Halte dich dabei an die Hinweise deines Lehrers, in welchem Ordner du deine Programme speichern sollst.

Das mathematische Labyrinth – Teil 1

Aufgabe 1:

Wähle Ereignisse aus und ziehe den „Wenn grüne Fahne angeklickt“ Block in den Skript-Bereich.

Wähle nun Bewegungen aus und ziehe den

-Block direkt unter den ersten Block. Beide Blöcke müssen dabei wie Puzzleteile einrasten. In diesem „gehe zu“-Block kannst du x- und y-Koordinaten eintragen. Tippe in dem Block für x den Wert -180 und für y den Wert -120 ein. Starte dann das Programm, indem du auf die grüne Fahne klickst, und beobachte, was passiert.

Um herauszufinden, welche Koordinaten eine Stelle auf dem Spielfeld hat, kannst du mit Maus dorthin fahren und die Koordinaten am unteren Spielfeldrand ablesen. Versuche mit der Maus in die Nähe der Stelle x = 0, y = 0 und in die Nähe der Stelle x = +180, y = -120 zu fahren.

Nun soll die Katze ganz nach rechts laufen. Ziehe dazu den Block

direkt unter die ersten beiden. In diesem Block kann man eingeben, wie weit sich die Figur bewegen soll. Finde heraus, wie groß der Schritt sein muss.

Speichere dein fertiges Programm unter dem Namen Aufgabe1. Klicke dazu oben links auf „Datei“, dann auf „Speichern unter“. Halte dich an die Hinweise deines Lehrers, in welchem Ordner du deine Programme speichern sollst.

Zusatzaufgabe:
Schreibe ein Programm, in dem die Katze zweimal hintereinander nach rechts und wieder zurück läuft.

Aufgabe 2:

Die Katze soll am Anfang des Spiels immer im grauen Startbereich sein, egal wohin sie vorher gelaufen ist oder verschoben worden ist.

Klicke im Figuren-Bereich auf die **Figur 1** (das ist unsere Katze, die man von oben sieht). Im **Skripte**-Bereich kannst du jetzt ein Programm für die Figur 1 schreiben.

Ziehe wie in Aufgabe 1 einen „Wenn grüne Fahne angeklickt“-Block nach rechts. Ergänze das Programm so, dass die Katze beim Klicken auf die grüne Fahne in den grauen Startbereich gesetzt wird.

Teste das Programm, indem du zuerst die Katze von Hand irgendwo hin verschiebst und dann auf die grüne Fahne klickst.

Merke dir: Um für eine Figur ein Programm zu schreiben oder zu ändern, muss man erst die Figur auswählen. Die gewählte Figur erkennst du am blauen Rahmen. Das Auswählen der Figur ist immer dann wichtig, wenn vorher eine Bühne oder eine andere Figur ausgewählt worden war.

Aufgabe 3:

Im Labyrinth-Spiel soll der Spieler bei jedem Schritt gefragt werde, wie sich die Katze drehen soll, und dann wie weit sie geradeaus gehen soll.

Zunächst soll der Spieler begrüßt werden. Ziehe aus dem Bereich Aussehen den Block “sage … für … Sek.“ in das Programm. Tippe „Willkommen im Labyrinth ein.“

Ergänze das Programm um einen

-Block, den du unter Fühlen findest. Schreibe in den weißen Bereich statt „What's your name?“ die Frage „Drehwinkel?“.

Starte das Programm und gib als Antwort z.B. 45 ein (Eingabe mit Klicke auf den Haken oder mit der Enter-Taste beenden).

Nun soll sich die Katze auch drehen. Ergänze dazu im Programm den Block

.
Ersetze nun die „15“ im weißen Feld durch das Element

aus dem Bereich Fühlen.

Teste das Programm. Wie erhältst du eine Drehung um 90° nach links? Wie eine Drehung nach rechts?

Merke dir: Elemente mit runden Ecken können in weiße Felder eingesetzt werden.

Aufgabe 4:

Startet man das Programm mehrmals hintereinander und dreht man darin jeweils die Katze, schaut sie zu Beginn des nächsten Programmstarts in eine andere Richtung als zuvor.

Versuche mit einem passenden Block aus dem Bereich Bewegungen, dafür zu sorgen, dass die Katze immer nach oben schaut.

Speichere dein Programm wieder unter dem Namen Labyrith_1.

Zusatzaufgabe:

Schreibe ein neues Programm, bei dem die Katze entlang der erlaubten Wege bis zur Mitte des Labyrinths läuft.

Das mathematische Labyrinth – Teil 2

Aufgabe 5:

Im Labyrinth-Spiel muss der Spieler später mehrere Informationen eingeben, die sich das Programm merken muss. Darum geht es in dieser Aufgabe.

a) Schreibe ein Programm, das nach deinem Vornamen fragt.

b) Die Antwort soll sich das Programm nun merken. Gehe dazu in den Bereich Variablen (oder Daten), klicke auf

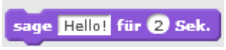
und gib „Vorname“ ein und klicke auf OK.
Mit Hilfe des Blocks

kann sich das Programm z.B. die Antwort auf die Frage nach dem Vornamen merken. Dazu muss die

in das weiße Feld gezogen werden:

.

c) Schreibe ein Programm, das dich erst nach dem Vornamen fragt und sich deinen Vornamen merkt und das danach nach deinem Nachnamen fragt und sich diesen auch merkt. Verstelle dazu wie in b) zwei Variablen, die Vorname und Nachname heißen sollen.

d) Nun soll die Katze dich mit Vor- und Nachnamen begrüßen. Ergänze dazu in deinem Programm den Block 

aus dem Bereich Aussehen. Setze für „Hello!“ aus dem Bereich Operatoren das „verbinde“-Element

ein. Ziehe ein zweites „verbinde“-Element in dein Programm uns setzte es statt „world“ in das erste „verbinde“-Element ein. Das Ergebnis sollte so aussehen:

.
Jetzt kannst du in das erste weiße Feld „Hallo “ schreiben, in das zweite

und in das dritte

.
Teste das Programm. Du solltest nun mit Hallo und deinem Vor- und Nachnamen begrüßt werden. Speichere das Programm unter dem Namen Aufgabe5.

Aufgabe 6:

Öffne jetzt dein Programm Labyrith1 vom letzten Mal: Klicke dazu auf Datei > Öffnen und suche die Datei Labyrinth1. Klicke dann auf Öffnen. Du solltest das Labyrinth sehen und dein Programm sollte so aussehen wie rechts gezeigt.

In Labyrinth-Spiel soll der Spieler bei jedem Zug zuerst einen Drehwinkel eingeben und dann den Zähler und den Nenner einer Bruchzahl. Die Katze soll sich dann um den eingegebenen Bruchteil der Spielfeldlänge geradeaus bewegen. Gibt man z.B. den Zähler 1 und den Nenner 2 ein, so läuft die Katze $\frac{1}{2}$ Spielfeldlänge geradeaus.

a) Ergänze das Programm so, dass es nach dem Zähler fragt und sich diesen merkt und danach nach dem Nenner fragt, den es sich auch merkt.

b) Gibt man z.B. für den Zähler 3 und den Nenner 4 ein, soll die Katze antworten „Ich gehe 3/4“. Ergänze das Programm, so dass dies funktioniert. Tipp: Du musst diesmal sogar drei „verbinde“-Elemente einsetzten und ähnlich wie in Aufgabe 5d) verschachteln.

c) Um zu verhindern, dass der Wert für den Zähler und der Wert für den Nenner die ganze Zeit auf dem Spielfeld angezeigt werden, gehe in den Bereich Variablen (oder Daten) und entferne vor allen Variablen die Häkchen.

d) Teste das Programm und **speichere** es, wenn es fertig ist unter dem neuen Namen „Labyrinth2“.

Aufgabe 7:

Es fehlt nun nur noch die Vorwärtsbewegung der Katze und wir haben den ersten Spielzug programmiert. Die Seitenlänge des Spielfelds beträgt 300. Wenn ein Spieler für die Vorwärtsbewegung den Bruch $\frac{1}{2}$ eingegeben hat, soll die Katze also 150 weit nach vorne gehen. Im Spiel muss der Computer diesen Wert aus dem Zähler, dem Nenner und der Spielfeldlänge selbst ausrechnen.

a) Notiere die Rechnung, die der Computer machen muss.

b) Im Bereich Operatoren findest du die Rechen-Elemente und für das Multiplizieren und Dividieren. Wie schon beim „verbinde“-Element kann man diese Elemente ineinander einsetzten.
Probiere das einfach einmal aus: Ziehe das Dividieren-Element in das erste weiße Feld des Multiplizieren-Elements und du erhältst . Dabei wird zuerst das erste Feld durch das zweite dividiert und anschließend das Ergebnis mit dem dritten Feld multipliziert. Die gerade erstellte Rechnung würde man mit Klammern so aufschreiben (□ : □) · □.

Benutze diese Operatoren, um die Katze passend zur Eingabe des Spielers vorwärts gehen zu lassen.

Erinnerung: Die Variablen und , mit denen sich das Programm die eigegebenen Werte merkt, findest du im Bereich Variablen (oder Daten).

Teste dein Programm mit verschiedenen Brüchen.

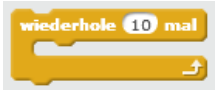
Das mathematische Labyrinth – Teil 3

Im Labyrinth-Spiel besteht ein Zug daraus, dass der Spieler einen Drehwinkel eingibt und danach Zähler und Nenner für den Vorwärtslaufen der Katze. Bisher kann der Spieler nur einen Zug machen. Um das zu ändern, verwenden wir ein **Wiederhole**-Element. Wiederhole-Elemente kann man benutzen, um einen Programmteil mehrmals zu wiederholen.

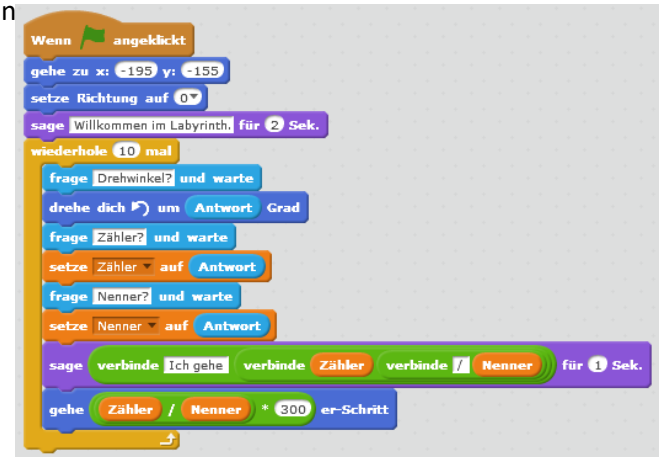
Aufgabe 8:

Öffne das Programm Labyrinth2, das du im Teil 2 geschrieben hast. Suche die Blöcke, die zu dem oben beschriebenen Spielzug gehören. Wenn du den obersten davon anpackst, kannst du alle diese Blöcke zusammen ein wenig von den ersten Blöcken wegziehen. Lass sie aber im Skript-Bereich, da du sie noch brauchst.

Aufgabe 9:

Im Bereich Steuerung findest du den Block „wiederhole … mal“ 

. Ziehe diesen direkt unter den Block mit der Begrüßung. Danach ziehst du die Blöcke für einen einzelnen Zug in die Mitte des Wiederhole-Blocks. Das Ergebnis sollte so aussehen

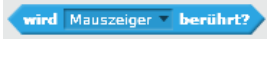


Starte das Programm und versuche in den 10 Zügen möglichst weit durch das Labyrinth zu kommen, ohne die blauen Wände zu berühren.

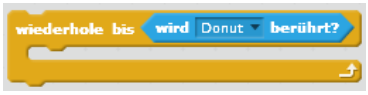
Aufgabe 10:

In Aufgabe 8 hat ein Spieler genau 10 Züge, obwohl er entweder mehr oder weniger Züge bräuchte. Um das Problem zu beheben benutzen wir einen anderen Wiederhole-Block, der solange wiederholt wird, bis die Katze eine andere Figur erreicht hat, die wir am Ziel platzieren.

a) Klicke im Figuren-Bereich unter neue Figur auf das Figur Wählen-Symbol (oder) und wähle den Donut aus. Schiebe den Donut auf die grüne Fläche hinter dem Ziel. Die Katze muss nun den Donut berühren, um das Spiel zu beenden. Wenn du magst kannst du den Donut auch verkleinern, siehe das Blatt „Informationen zu Scratch“.

b) Um nun das Programm für die Katze zu ergänzen, denke daran, erst auf die Katze (Figur 1) zu klicken. Ersetze im Programm den „wiederhole … mal“-Block durch den „wiederhole bis …“-Block aus dem Bereich Steuerung. Ziehe dazu erst die Blöcke im Inneren des alten Wiederhole-Blocks zur Seite, entferne den alten Wiederhole-Block und füge den neuen ein. Ergänze danach aus dem Bereich Fühlen die Bedingung 

und stelle dort Donut ein.



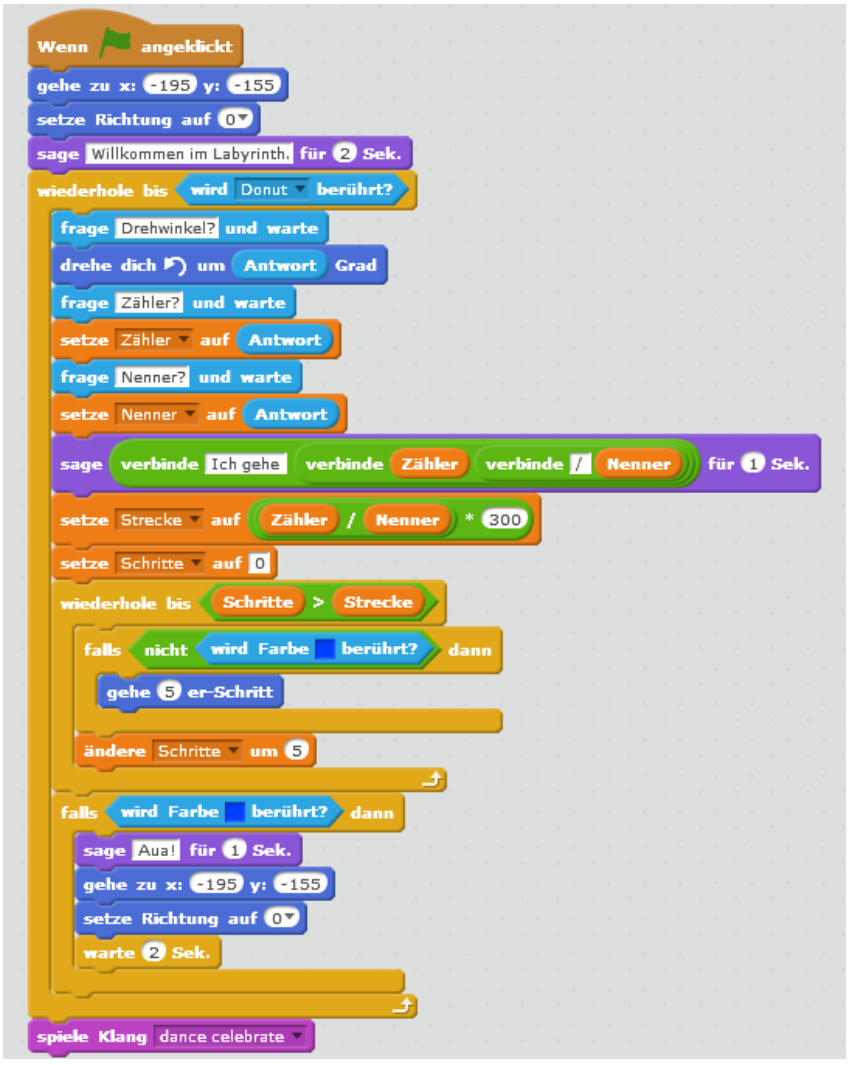
Aufgabe 11:

Ergänze dein Programm um einen kleinen Freudentanz, den Katze aufführt, nachdem sie den Donut erreicht hat. Probiere dabei gerne auch neue Blöcke aus dem Bereich Bewegung aus. Du kannst auch eine Schleife verwenden, die die Bewegung ein paar Mal wiederholt.
Teste dein Programm und **speichere** es unter dem Namen Labyrinth3.

Jetzt kannst du dein selbst programmiertes Labyrinth-Spiel spielen!

*Aufgabe 12:

Ein Nachteil beim bisherigen Programm ist, dass man die Katze ungestraft durch die Wände hindurch steuern kann. Das wurde im folgenden Programm geändert.



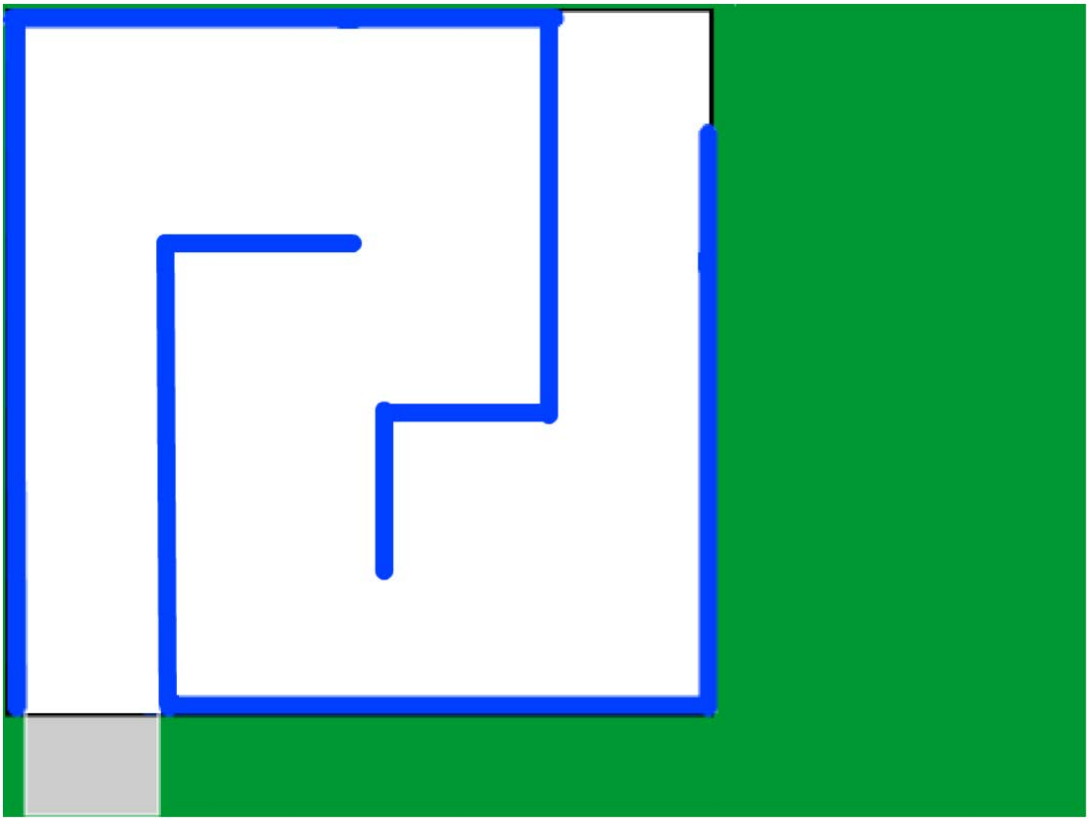
Schaue das Programm genau durch. Markiere die Stellen, an denen es von deinem abweicht.

Ändere dein Programm so ab, dass es den hier gezeigten entspricht. **Speichere es unter dem neuen Namen** Labyrinth4.

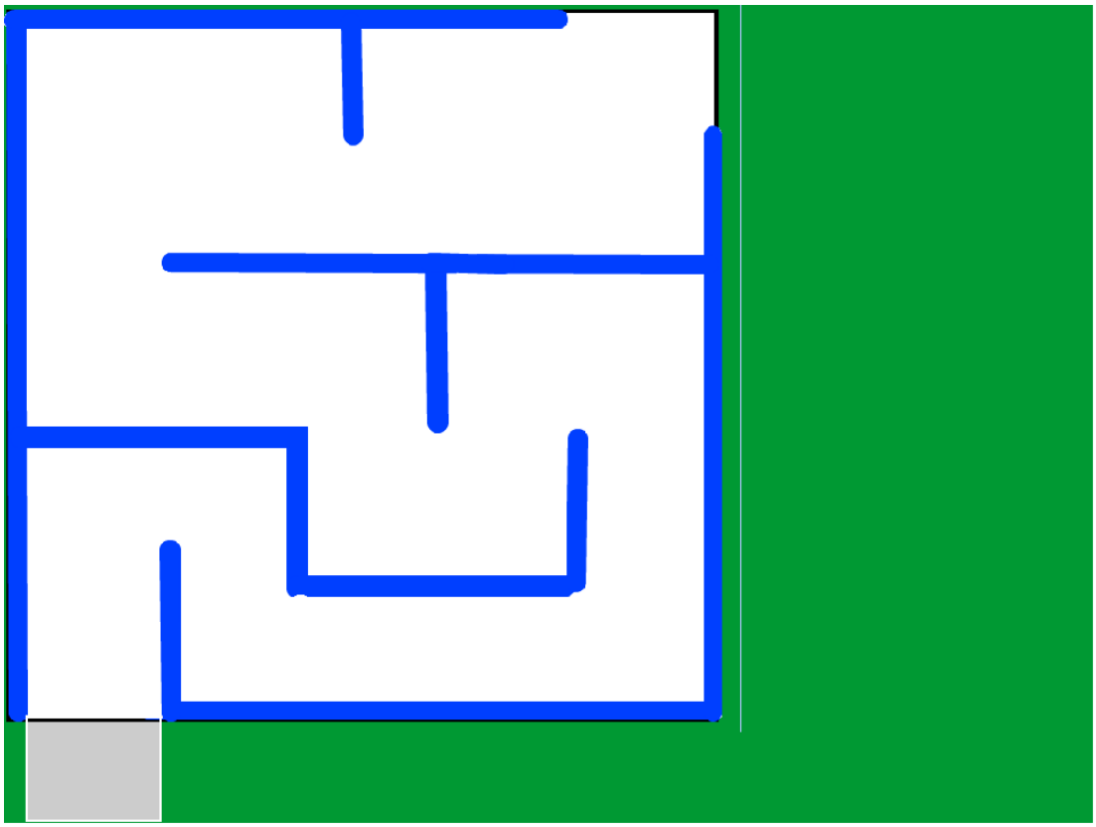
Spielt das Spiel und beschreibt möglichst genau die Unterschiede zu eurem Programm aus Aufgabe 11.

** Versuche deinem Nebensitzer zu erklären, wie die Änderungen im Programm-Skript funktionieren. Das ist eine wirklich schwere Aufgabe. Wenn du nicht weiterkommst, frage deine Kursleiterin/ deinen Kursleiter.

Spielfeld 1



Spielfeld 2



Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit UG … Unterrichtsgespräch

Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung! Das Modul kann auch nur 2 statt 3 Stunden dauern. Wie viel Zeit benötigt wird, hängt stark von den Vorkenntnissen und vom Unterrichtsverlauf ab.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
	1. Stunde	
1. Einstieg Demo und UG 10 min	L stellt Scratch vor und fragt nach Vorkenntnissen. SuS oder L erklären die Scratch-Programmierung an einem Beispiel. L nennt Labyrinth-Spiel als Ziel des Moduls	Computer und Beamer
2. Erarbeiten, Üben PA/EA 10 min	SuS bearbeiten Schülerblatt 1, bis einschl. Aufg. 1 L gibt individuelle Hilfen und lobt	Schülerblatt 1, Computer bzw. Tablets
3. Vorbereitung Labyrinth Demo und Anleitung 15 min	L geht mit den SuS die Vorbereitung für das Labyrinth-Programm schrittweise gemeinsam durch und demonstriert die Schritte über den Beamer. L gibt Hinweise zum Speichern am richtigen Speicherort und zum Öffnen von Dateien. Kurze Zusammenfassung an der Tafel	Schülerblatt 1, Beamer Tafel
4. Erarbeitung EA/PA 15 min	SuS bearbeiten Schülerblatt 1, Aufg. 2-4 L gibt Hilfen und lobt	Schülerblatt 1, Computer bzw. Tablets
5. Besprechung Plenum 10 min	Lösungen werden vorgestellt	Beamer
	2. Stunde	
1. Einstieg UG 10 min	Erkenntnisse und Ergebnisstand der letzten Stunden wiederholen L erläutert Spielablauf beim Labyrinth-Spiel genauer	Computer und Beamer
2. Erarbeitung EA/PA 20 min	SuS bearbeiten Schülerblatt 2, Aufg. 5-6 L gibt Hilfen und lobt	Schülerblatt 2, Computer bzw. Tablets
3. Besprechung Plenum 10 min	Lösungen werden vorgestellt L erinnert an Speicherort	Beamer
4. Erarbeitung EA/PA 10 min	SuS bearbeiten Schülerblatt 2, Aufg. 7 L gibt Hilfen und lobt	Schülerblatt 2, Computer bzw. Tablets
5. Besprechung Plenum 10 min	Lösungen werden vorgestellt	Beamer

	3. Stunde	
1. Einstieg UG 5 min	Erkenntnisse und Ergebnisstand der letzten Stunden wiederholen L wiederholt Infos zum Speichern/ Öffnen von Dateien	Computer und Beamer
2. Erarbeitung EA/PA 10 min	SuS bearbeiten Schülerblatt 3, Aufg. 8-11 L gibt Hilfen und lobt	Schülerblatt 3, Computer bzw. Tablets
3. Vorstellung Plenum 5 min	Lösungen/ fertige Programme werden vorgestellt	Computer und Beamer
4. Üben EA/PA 10 min	SuS spielen ihr selbst erstelltes Labyrinth-Spiel	Computer bzw. Tablets
4. Erarbeitung EA/PA 20 min	SuS bearbeiten Schülerblatt 3, Aufg. 12 L gibt Hilfen und lobt	Schülerblatt 3, Computer bzw. Tablets
5. Besprechung Plenum 10 min	Programmvariante aus Aufg. 12 wird vorgestellt und Unterschiede diskutiert	Computer und Beamer
Erweiterungen	SuS ergänzen ihre Programme mit eigenen Ideen SuS spielen ihre Programme auf dem anspruchsvolleren Spielfeld2 SuS schreiben Programm um in eine Variante mit 2 Levels (entsprechend der beiden Spielfelder) SuS erstellen weitere eigenen Spielfelder …	Computer und Beamer

Sachanalyse

Satz: Zeichnet man n Geraden ($n \geq 2$), so entstehen dabei eventuell Schnittpunkte. Deren Anzahl sei s.

(1) Für die Maximalzahl der Schnittpunkte $s_{max}(n)$ gilt: $s_{max}(n) = \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

(2) Für $2 \leq s \leq n-2$ gibt es keine solche Zeichnung.

Beweis:
Zu (1): Möchte man die maximale Anzahl von Schnittpunkten ausschöpfen, wird man beim Zeichnen Parallelen und mehr als zwei Geraden durch einen Punkt („Büschel“) vermeiden. So gibt es zu je zwei Geraden einen Schnittpunkt und umgekehrt, $\binom{n}{2}$ ist damit die Maximalzahl der Schnittpunkte.

Alternative zu (1) durch vollständige Induktion:

Es wird gezeigt, dass gilt $s_{max}(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$ und das ist bekanntermaßen $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

Induktionsanfang: n = 2: 2 Geraden haben maximal 1 Schnittpunkt und $\binom{2}{2} = 1$.

Induktionsschluss: Die Behauptung gelte für n = k, es sei also $s_{max}(k) = 1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1)$.
Fügt man zu k Geraden eine weitere hinzu, so kommen unter Vermeidung von Parallelen und Büscheln k Schnittpunkte hinzu, damit ist also $s_{max}(k+1) = s_{max}(k) + k = 1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1) + k$.
Damit gilt die Behauptung auch für n = k + 1.

Zu (2): Einzelheiten zum komplizierten Beweis dieser Behauptung findet sich bei
Kurzschenkel, O. und H. Walter: Zur Nichtexistenz gewisser Schnittpunktskonfigurationen in der Ebene. MNU 25 (1972), Heft 6, S. 365-367▪

Beispiel:
Die Abb. 1 zeigt den Fall n = 5 und s = 7.

Wenn man die Gerade h, das ist eine der beiden parallelen Geraden (in Abb. 1 gestrichelt), um S dreht, erhält man einen weiteren Schnittpunkt.
Noch zwei weitere Schnittpunkte erhält man, wenn man die Gerade g um S dreht und damit das Büschel auflöst.
Dann ist die Maximalzahl von 10 Schnittpunkten erreicht.

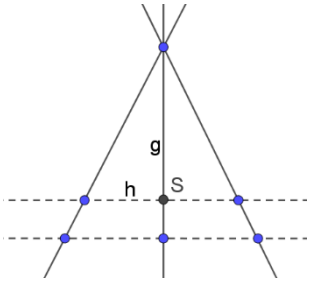


Abb. 1: n = 5 Geraden mit s = 7 Schnittpunkten

Bemerkungen:
Für s = 0 (n Parallelen) und s = 1 (ein Büschel mit n Geraden) sowie $s = s_{max}$ sind die Zeichnungen eindeutig.

Zu anderen Kombinationen von n und s sind ggf. unterschiedliche Zeichnungen möglich. Zum Beispiel erhält man n = 5 Geraden mit s = 7 Schnittpunkten auch mithilfe von drei parallelen Geraden (selbst ausprobieren!).

Für s = n – 1 bzw. s = n „sieht“ man eine Lösung „direkt“:
Zeichne ein Büschel mit n – 1 Geraden und 1 Gerade parallel zu einer der Büschelgeraden bzw. zu keiner Büschelgeraden parallel.

Ansonsten hat das Auffinden einer Zeichnung durchaus den Charakter einer mittelschweren Knobelaufgabe, z. B. n = 6 und s = 11, vgl. Abb. 2.

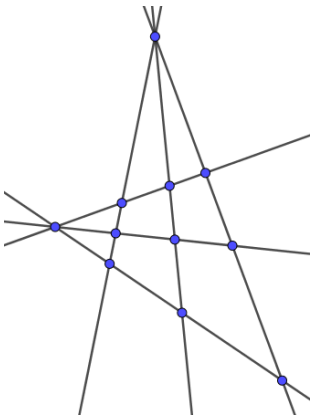


Abb. 2: n = 6 Geraden mit s = 11 Schnittpunkten

Lehrerblatt

Das Thema Schnittpunkte „lebt“ von den Vorteilen der Handlungsorientierung und der – auch außerhalb der Mathematik wichtigen – Strategie „mithilfe von Beispielen allgemeine Strukturen erkennen“.

Schritt 1 – Ausfüllen der Tabelle auf dem Schülerarbeitsblatt
Auf jeden Fall wird man einige Beispiele gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern bearbeiten (u.a. n = 6 und s = 11, vgl. Sachanalyse).
Eine Möglichkeit wäre auch, die Abbildung auf dem Schülerarbeitsblatt (n = 5 und s = 7) zu variieren, vgl. Überlegungen im Abschnitt Beispiel der Sachanalyse.
Insgesamt sollte klar werden, dass man durch die Verwendung von Büscheln und Parallelen (diese beiden Begriffe sollten im Unterrichtsgespräch vorkommen) bei festem n zu unterschiedlichen Anzahlen s kommen kann.
Das Pflichtprogamm wären die Fälle n = 2 bis n = 5, die Zeile n = 6 dient der Binnendifferenzierung.
Achtung – ein **typischer Schülerfehler** beim Zeichnen: ein Schnittpunkt liegt außerhalb des Blattes und wird ignoriert.

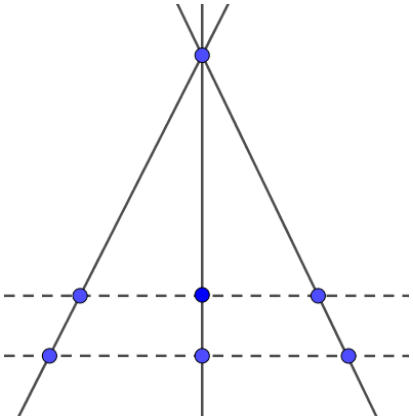
Die korrekt ausgefüllte Tabelle:

	s=0	s=1	s=2	s=3	s=4	s=5	s=6	s=7	s=8	S=9	s=10	s=11	s=12	s=13	s=14	s=15
n=2	✓	✓	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=3	✓	✓	✓	✓	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=4	✓	✓	0	✓	✓	✓	✓	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=5	✓	✓	0	0	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	0	0	0	0	0
n=6	✓	✓	0	0	0	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Schritt 2 – Fragen auf dem Schülerarbeitsblatt
Zu 1.) Vermeidet man Parallelen und Büschel, so kommt man zur Maximalzahl von Schnittpunkten.
Zu 2.) Für n = 100 Geraden gilt:
s = 0: 100 Parallelen
s = 1: ein Büschel aus 100 Geraden;
s = 99: ein Büschel aus 99 Geraden und eine weitere Gerade parallel zu einer der 99 Geraden
oder: 99 parallele Geraden und eine Gerade, die alle diese Parallelen schneidet
s = 100: ein Büschel aus 99 Geraden und eine weitere Gerade nicht parallel zu einer der 99 Geraden

Schritt 3 – ein möglicher Exkurs
Kann und möchte man auf die Mkid-Stunde *Mkid 7-04B Kombinatorik 2* Bezug nehmen, so kann man die Maximalzahl der möglichen Schnittpunkte wie folgt bestimmen, hier am Beispiel n = 6:
Vermeidet man Parallelen und Büschel, so gibt es zu jeder der 6 Geraden g, h, i, j, k und l je 5 Geraden für einen Schnittpunkt.
Dabei wird jeder Schnittpunkt doppelt gezählt, zum Beispiel ist der Schnittpunkt von g und h derselbe wie der Schnittpunkt von h und g.
Es sind also $(6 \cdot 5) : 2 = 15$ Schnittpunkte.

Wenn du einige Geraden auf ein Blatt Papier gezeichnet hast, kannst du die Anzahl der Schnittpunkte abzählen.
Im Folgenden ist **n** die **Anzahl der Geraden** und **s** die **Anzahl der Schnittpunkte**.



Die Abbildung rechts zeigt n = 5 Geraden mit s = 7 Schnittpunkten, die beiden gestrichelten Geraden sind zu einander parallel.

Ziel: Bestimme alle möglichen Anzahlen s von Schnittpunkten, die durch n Geraden erzeugt werden.

Manchmal gibt es zu einer Kombination von n und s mehrere Lösungen, manchmal gar keine.

Zeichne auf Konzeptpapier und **markiere** dann **in der Tabelle**:

✓ … es gibt eine Lösung
0 … es gibt keine Lösung

	s=0	s=1	s=2	s=3	s=4	s=5	s=6	s=7	s=8	s=9	s=10	s=11	s=12	s=13	s=14	s=15
n=2																
n=3																
n=4																
n=5																
n=6																

Fragen:

1.) Man möchte möglichst viele Schnittpunkte erreichen, worauf muss man beim Zeichnen achten?

……

2.) Beschreibe in Worten und mit einer kleinen Skizze eine Zeichnung mit 100 Geraden und …
a) … 0 Schnittpunkten b) … 1 Schnittpunkt c) … 99 Schnittpunkten d) … 100 Schnittpunkten

a) ……

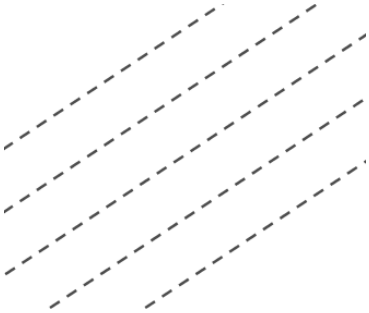
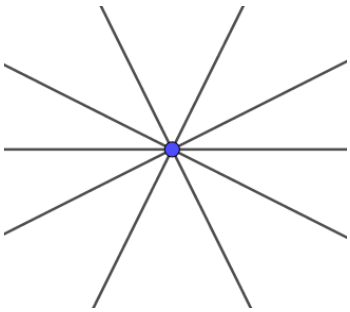
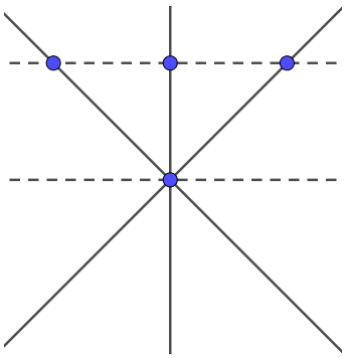
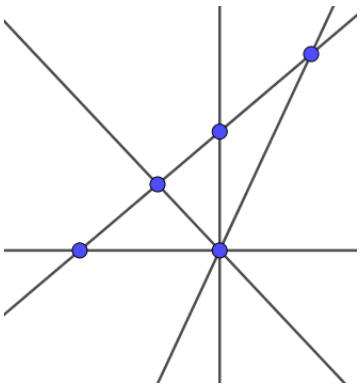
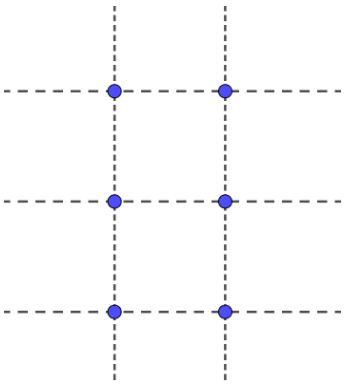
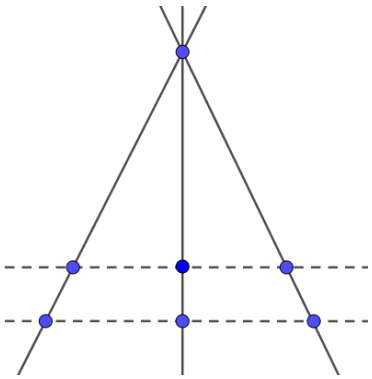
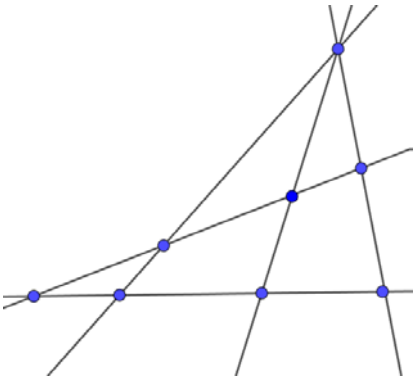
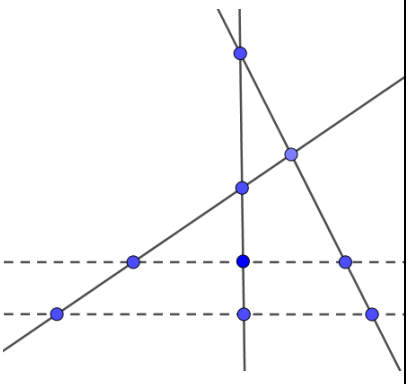
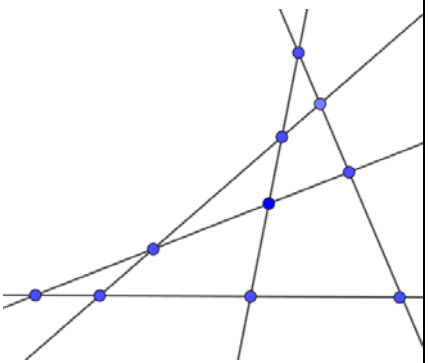
b) ……

c) ……

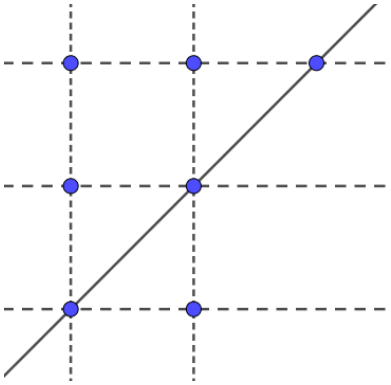
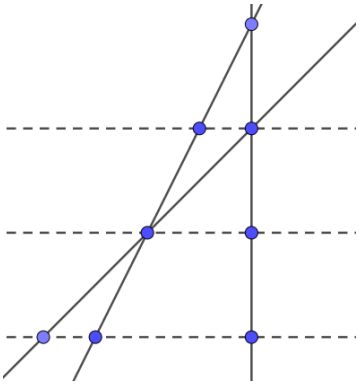
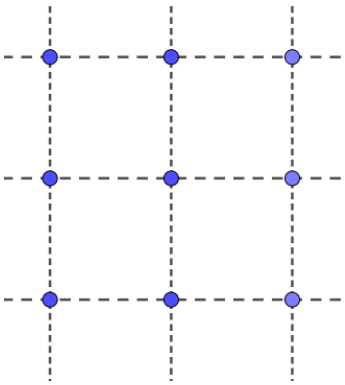
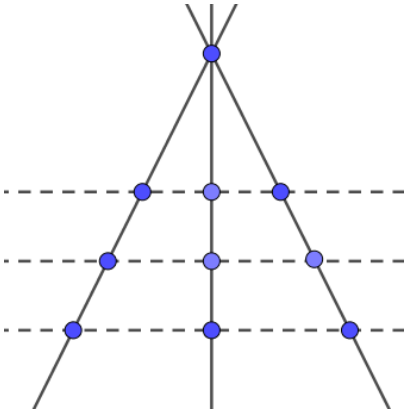
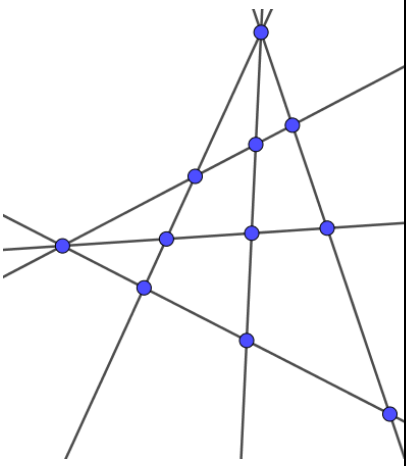
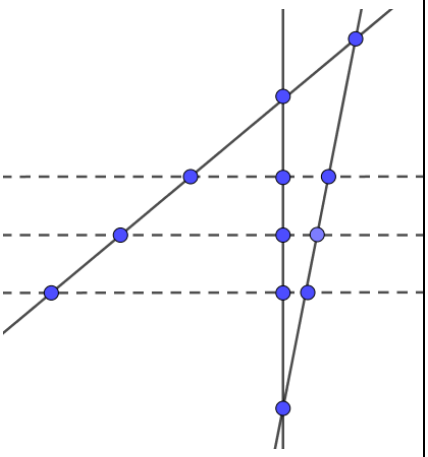
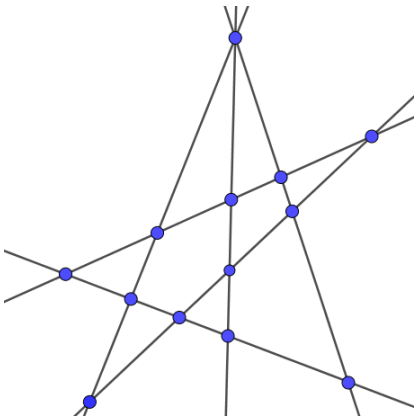
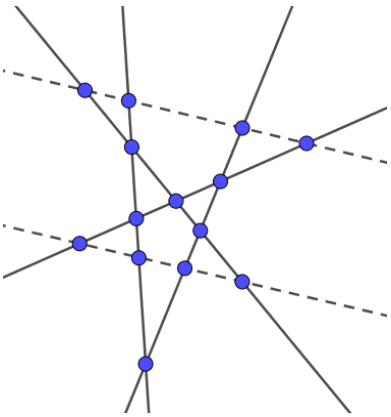
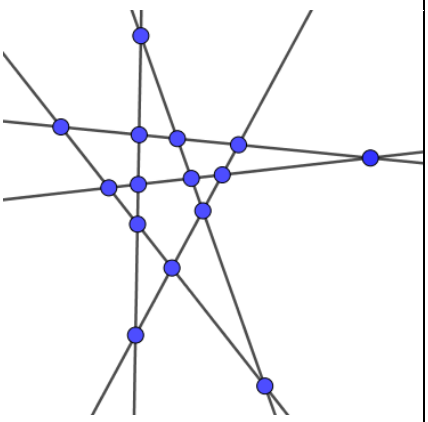
d) ……

Auswahl von Lösungszeichnungen zum Schülerblatt

n … Anzahl der Geraden; s … Anzahl der Schnittpunkte; Parallelen sind gestrichelt

n = 5; s = 0  5 Parallelen	n = 5; s = 1  1 Büschel mit 5 Geraden	n = 5; s = 4  1 Büschel mit 4 Geraden und 1 Gerade parallel zu einer der Büschelgeraden
n = 5; s = 5  1 Büschel mit 4 Geraden	n = 5; s = 6  3 Parallelen und 2 Parallelen	n = 5; s = 7  1 Büschel mit 3 Geraden und 2 Parallelen
n = 5; s = 8  1 Büschel mit 3 Geraden	n = 5; s = 9  2 Parallelen	n = 5; s = 10  5 Geraden in allgemeiner Lage

n … Anzahl der Geraden; s … Anzahl der Schnittpunkte; Parallelen sind gestrichelt

n = 6; s = 7  3 Parallelen und 2 Parallelen und 2 Büschel mit jeweils 3 Geraden	n = 6; s = 8  3 Parallelen und 2 Büschel mit jeweils 3 Geraden	n = 6; s = 9  3 Parallelen und 3 Parallelen
n = 6; s = 10  3 Parallelen und 1 Büschel mit 3 Geraden	n = 6; s = 11  2 Büschel mit jeweils 3 Geraden	n = 6; s = 12  3 Parallelen
n = 6; s = 13  1 Büschel mit 3 Geraden	n = 6; s = 14  2 Parallelen	n = 6; s = 15  6 Geraden in allgemeiner Lage

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit feU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird man variieren beim eigenständigen Ausfüllen der Tabelle. Auch ist der Exkurs ein möglicher Zeitpuffer.
Das Material reicht gut auch für zwei Nachmittage zu je 45 Minuten.

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Erarbeitung I feU 25 Min.	L führt mit dem Schülerblatt in das Thema ein. L und SuS bearbeiten einige Fälle* gemeinsam. SuS probieren natürlich zunächst selbst. *Vorschlag: n=4; s=0 … nur Parallelen n=5; s=4 … Büschel mit 4 Geraden und 1 Gerade parallel zu einer der Büschelgeraden n=5; s=2 … keine Zeichnung möglich n=5; s=10 … kein Büschel, keine Parallelen n= 6; s=11 … 2 Büschel mit 3 Geraden, vgl. Sachanalyse → In der Tabelle abhaken bzw. abkreuzen. (vgl. auch Lehrerblatt – Schritt 1)	Schülerblatt Tafel o.ä. Konzeptpapier
2. Erarbeitung II EA/PA 30 Min.	SuS füllen die Tabelle weiter aus und haken (bzw. kreuzen) in der Tabelle ab. n = 2 bis n = 5: Pflicht n = 6: Kür SuS beantworten die beiden auf dem Schülerblatt gestellten Fragen. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt Konzeptpapier
3. Erarbeitung III feU 15 Min.	L und SuS vergleichen die Ergebnisse und vervollständigen die Tabelle. L und SuS besprechen die Antworten auf die beiden Fragen (vgl. auch Lehrerblatt – Schritt 2).	Schülerblatt Tafel o.ä.
4. Exkurs feU 15 Min.	Beispielgebundene rechnerische Bestimmung der Maximalzahl der Schnittpunkte in Abhängigkeit von n (vgl. auch Lehrerblatt – Schritt 3).	Tafel

Sachanalyse

Satz: Zeichnet man n Geraden ($n \geq 2$), so entsteht dabei eine Anzahl von Schnittpunkten s.

(1) Für die Maximalzahl der Schnittpunkte $s_{max}(n)$ gilt: $s_{max}(n) = \binom{n}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

(2) Für $2 \leq s \leq n-2$ gibt es keine solche Zeichnung.

Beweis:
Zu (1): Möchte man die maximale Anzahl von Schnittpunkten ausschöpfen, wird man beim Zeichnen Parallelen und mehr als zwei Geraden durch einen Punkt („Büschel“) vermeiden. So gibt es zu je zwei Geraden einen Schnittpunkt und umgekehrt, $\binom{n}{2}$ ist damit die Maximalzahl der Schnittpunkte.

Alternative zu (1) durch vollständige Induktion:

Es wird gezeigt, dass gilt $s_{max}(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)$ und das ist bekanntermaßen $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$.

Induktionsanfang: n = 2: 2 Geraden haben maximal 1 Schnittpunkt und $\binom{2}{2} = 1$.

Induktionsschluss: Die Behauptung gelte für n = k, es sei also $s_{max}(k) = 1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1)$.
Fügt man zu k Geraden eine weitere hinzu, so kommen unter Vermeidung von Parallelen und Büscheln k Schnittpunkte hinzu, damit ist also $s_{max}(k+1) = s_{max}(k) + k = 1 + 2 + 3 + \ldots + (k-1) + k$.
Damit gilt die Behauptung auch für n = k + 1.

Zu (2): Einzelheiten zum komplizierten Beweis dieser Behauptung findet sich bei
Kurzschenkel, O. und H. Walter: Zur Nichtexistenz gewisser Schnittpunktskonfigurationen in der Ebene. MNU 25 (1972), Heft 6, S. 365-367▪

Beispiel:
Die Abb. 1 zeigt den Fall n = 5 und s = 7.

Wenn man die Gerade h, das ist eine der beiden parallelen Geraden (in Abb. 1 gestrichelt), um S dreht, erhält man einen weiteren Schnittpunkt.
Zwei weitere Schnittpunkte erhält man, wenn man die Gerade g um S dreht und damit das Büschel auflöst.
Dann ist die Maximalzahl von 10 Schnittpunkten erreicht.

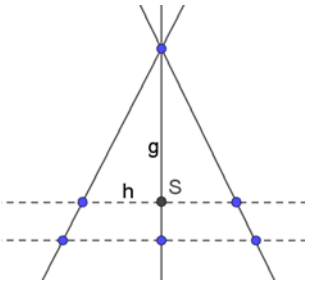


Abb. 1: n = 5 Geraden mit s = 7 Schnittpunkten

Bemerkungen:
Für s = 0 (n Parallelen) und s = 1 (ein Büschel mit n Geraden) sowie $s = s_{max}$ sind die Zeichnungen eindeutig.

Zu anderen Kombinationen von n und s sind ggf. unterschiedliche Zeichnungen möglich. Zum Beispiel erhält man n = 5 Geraden mit s = 7 Schnittpunkten auch mithilfe von drei parallelen Geraden (selbst ausprobieren!).

Für s = n – 1 bzw. s = n „sieht“ man eine Lösung „direkt“:
Zeichne ein Büschel mit n – 1 Geraden und 1 Gerade parallel zu einer der Büschelgeraden bzw. zu keiner Büschelgeraden parallel.

Ansonsten hat das Auffinden einer Zeichnung durchaus den Charakter einer mittelschweren Knobelaufgabe, z. B. n = 6 und s = 11, vgl. Abb. 2.

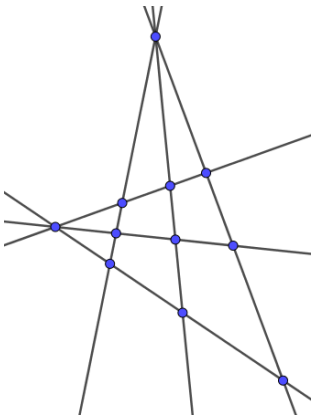


Abb. 2: n = 6 Geraden mit s = 11 Schnittpunkten

Lehrerblatt

Das Thema Schnittpunkte „lebt“ von den Vorteilen der Handlungsorientierung und der – auch außerhalb der Mathematik wichtigen – Strategie „mithilfe von Beispielen allgemeine Strukturen erkennen“, „data mining“ im Kleinen also ☺.
Die Vorgehensweise ähnelt dabei derer zum Thema „Der Euler’sche Polyedersatz“ aus der Klasse 6.

Schritt 1 – Ausfüllen der Tabelle auf dem Schülerarbeitsblatt
Auf jeden Fall wird man einige Beispiele gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern bearbeiten (u.a. n = 6 und s = 11, vgl. Sachanalyse).
Eine Möglichkeit wäre auch, die Abbildung auf dem Schülerarbeitsblatt (n = 5 und s = 7) zu variieren, vgl. Überlegungen im Abschnitt Beispiel der Sachanalyse.
Insgesamt sollte klar werden, dass man durch die Verwendung von Büscheln und Parallelen bei festem n zu unterschiedlichen Anzahlen s kommen kann.
Das Pflichtprogramm wären die Fälle n = 2 bis n = 5, die Zeile n = 6 dient der Binnendifferenzierung.
Ein typischer Schülerfehler beim Zeichnen: ein Schnittpunkt liegt außerhalb des Blattes und wird ignoriert.

Die korrekt ausgefüllte Tabelle:

	s=0	s=1	s=2	s=3	s=4	s=5	s=6	s=7	s=8	S=9	s=10	s=11	s=12	s=13	s=14	s=15
n=2	✓	✓	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=3	✓	✓	✓	✓	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=4	✓	✓	0	✓	✓	✓	✓	0	0	0	0	0	0	0	0	0
n=5	✓	✓	0	0	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	0	0	0	0	0
n=6	✓	✓	0	0	0	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓

Schritt 2 – Fragen auf dem Schülerarbeitsblatt
Bevor sich die Schülerinnen und Schüler an das Beantworten der Fragen machen, werden die Ergebnisse verglichen und ggf. durch die Lehrkraft ergänzt.

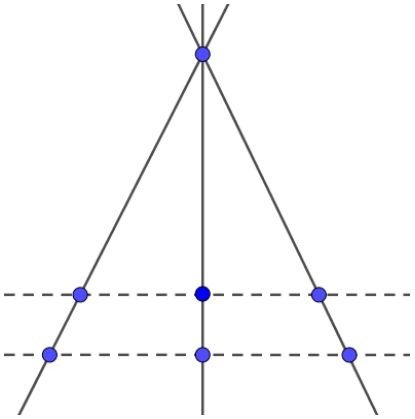
Mögliche Antworten:
Zu 1.) Vermeidet man Parallelen und Büschel kommt man zur Maximalzahl von Schnittpunkten.

Zu 2.)	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9
Maximalzahl der Schnittpunkte:	1	1+2 =3	3+3 =6	6+4 =10	10+5 =15	15+6 =21	21+7 =28	28+8 =36

Schülerinnen und Schüler würden ggf. an einem Beispiel argumentieren: Hat man bereits 6 Geraden und 15 Schnittpunkte und fügt dann eine weitere Gerade hinzu, kommen maximal 6 Schnittpunkte dazu.
Bei Nachfragen kann man auch auf die Formel abheben und diese am Zahlenbeispiel durch Bildung von Pärchen mit gleicher Summe entwickeln:
n = 7 Geraden; Anzahl der Schnittpunkte: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = (1 + 6) + (2 + 5) + (3 + 4) = (6:2) \cdot 7$
Bei n Geraden gibt es maximal $(n–1):2 \cdot n$ Schnittpunkte. Ggf. verifiziert man dies auch für gerade n.
Zu 3.) Stets eine Lösung gibt es für die Fälle s = 0; s = 1; s = n – 1; s = n (vgl. Sachanalyse) und natürlich für die Maximalzahl.
Die Vermutung, dass es zwischen n und der Maximalzahl stets eine Lösung gibt muss man offenlassen.
Zu 4.) Vermutung: Es gibt keine Lösungen für die Fälle $2 \leq s \leq n–2$.
Die Lehrkraft gibt die Information, dass man das beweisen kann.

Mkid 7-08 Schnittpunkte

Wenn du einige Geraden auf ein Blatt Papier gezeichnet hast, kannst du die Anzahl der Schnittpunkte abzählen.
Im Folgenden ist **n** die **Anzahl der Geraden** und **s** die **Anzahl der Schnittpunkte**.



Die Abbildung rechts zeigt n = 5 Geraden mit s = 7 Schnittpunkten, die beiden gestrichelten Geraden sind zu einander parallel.

Ziel: Bestimme alle möglichen Anzahlen s von Schnittpunkten, die durch n Geraden erzeugt werden.

Manchmal gibt es zu einer Kombination von n und s mehrere Lösungen, manchmal gar keine.

Zeichne auf Konzeptpapier und **markiere** dann **in der Tabelle**:

✓ … es gibt eine Lösung
0 … es gibt keine Lösung

	s=0	s=1	s=2	s=3	s=4	s=5	s=6	s=7	s=8	s=9	s=10	s=11	s=12	s=13	s=14	s=15
n=2																
n=3																
n=4																
n=5																
n=6																

Fragen:

1.) Man möchte möglichst viele Schnittpunkte erreichen, worauf muss man beim Zeichnen achten?

……

2.) Trage die Maximalzahl der Schnittpunkte in die Tabelle ein. Wie könnte diese Zahlenfolge weiter gehen? Kannst du diese Vermutung begründen?

	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8	n=9
Maximalzahl der Schnittpunkte:								

……

3.) Welche Lösungen gibt es auf jeden Fall immer? Wie sehen die zugehörigen Zeichnungen aus?

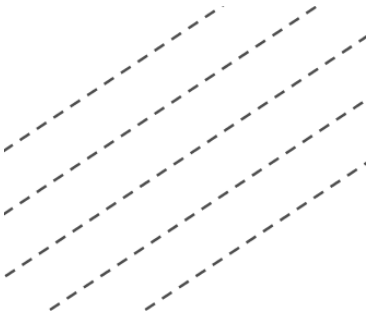
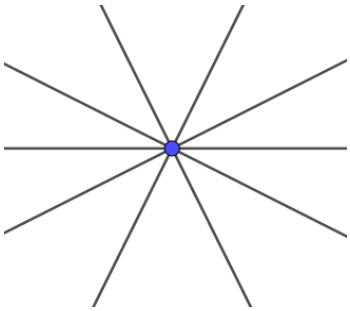
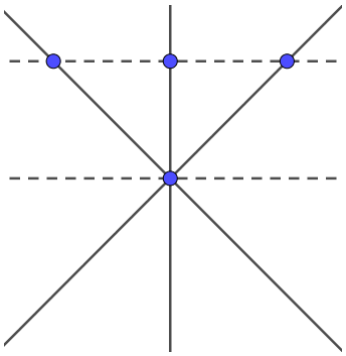
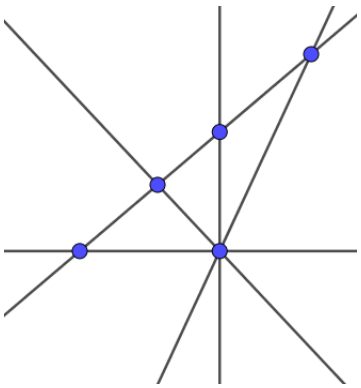
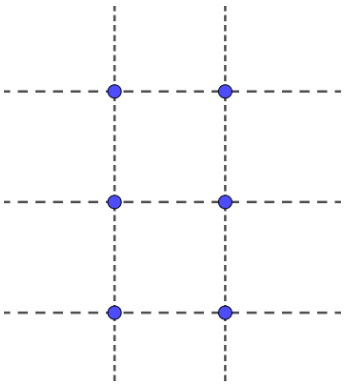
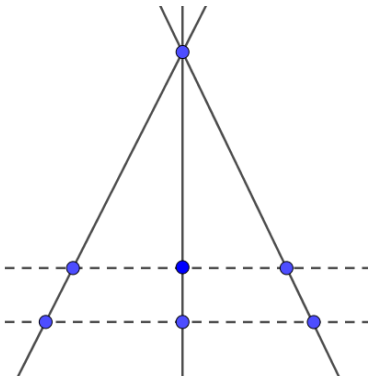
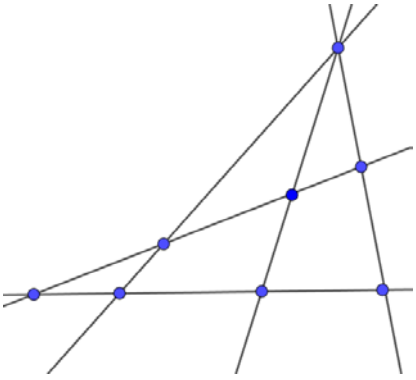
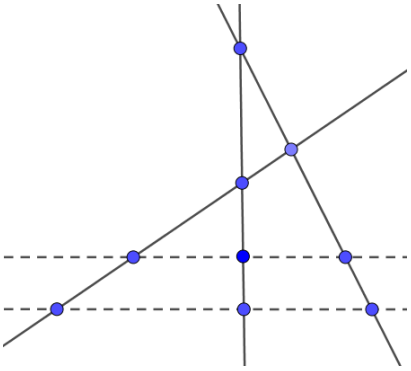
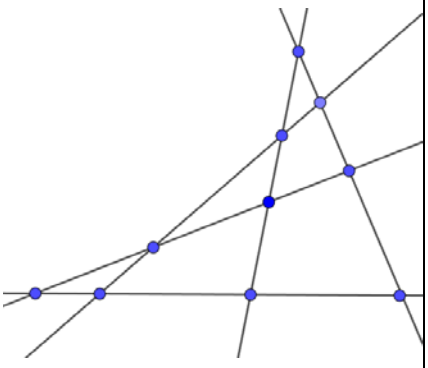
……

4.) Welche Lösungen gibt es nicht? Versuche eine Regel zu erkennen.

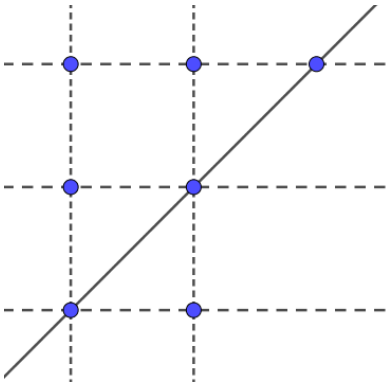
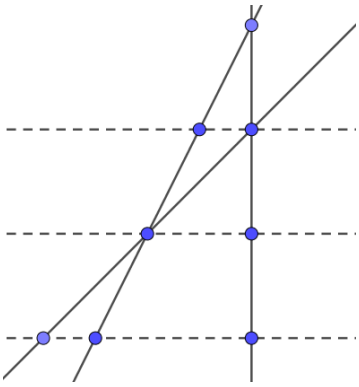
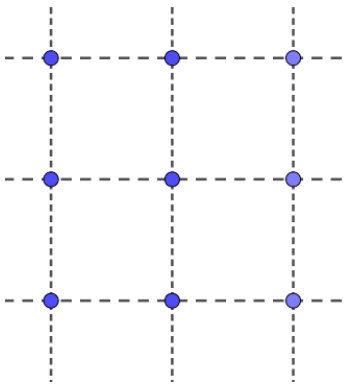
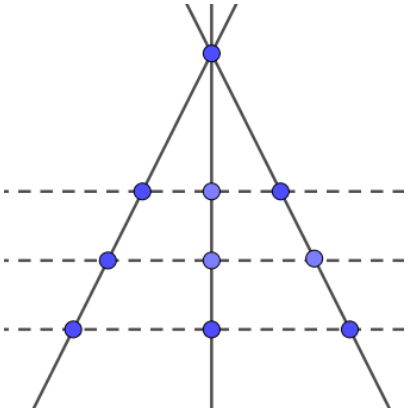
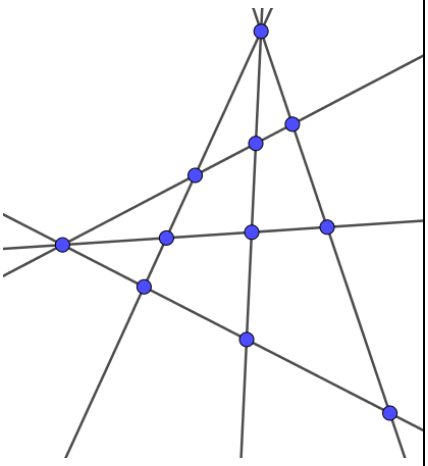
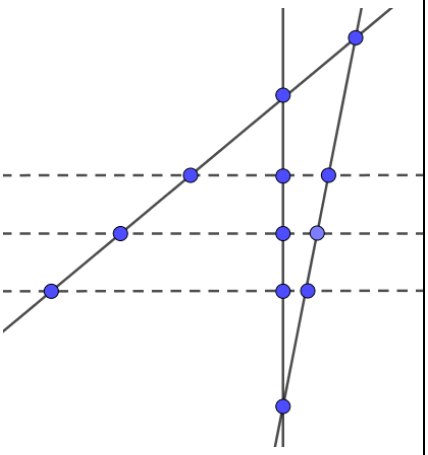
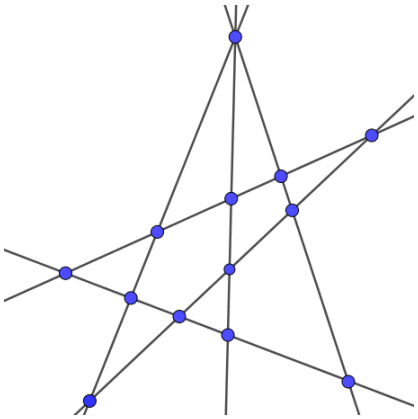
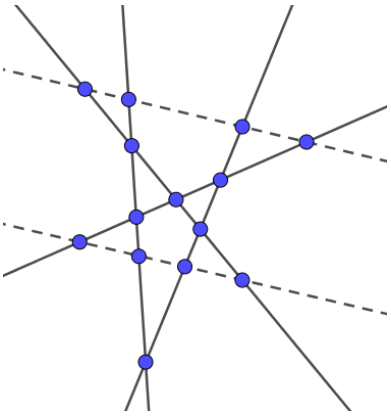
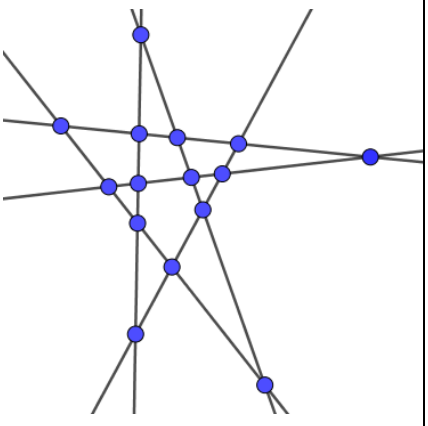
……

Auswahl von Lösungszeichnungen zum Schülerblatt

n … Anzahl der Geraden; s … Anzahl der Schnittpunkte; Parallelen sind gestrichelt

n = 5; s = 0  5 Parallelen	n = 5; s = 1  1 Büschel mit 5 Geraden	n = 5; s = 4  1 Büschel mit 4 Geraden und 1 Gerade parallel zu einer der Büschelgeraden
n = 5; s = 5  1 Büschel mit 4 Geraden	n = 5; s = 6  3 Parallelen und 2 Parallelen	n = 5; s = 7  1 Büschel mit 3 Geraden und 2 Parallelen
n = 5; s = 8  1 Büschel mit 3 Geraden	n = 5; s = 9  2 Parallelen	n = 5; s = 10  5 Geraden in allgemeiner Lage

n … Anzahl der Geraden; s … Anzahl der Schnittpunkte; Parallelen sind gestrichelt

n = 6; s = 7	n = 6; s = 8	n = 6; s = 9
		
3 Parallelen und 2 Parallelen und 2 Büschel mit jeweils 3 Geraden	3 Parallelen und 2 Büschel mit jeweils 3 Geraden	3 Parallelen und 3 Parallelen
n = 6; s = 10	n = 6; s = 11	n = 6; s = 12
		
3 Parallelen und 1 Büschel mit 3 Geraden	2 Büschel mit jeweils 3 Geraden	3 Parallelen
n = 6; s = 13	n = 6; s = 14	n = 6; s = 15
		
1 Büschel mit 3 Geraden	2 Parallelen	6 Geraden in allgemeiner Lage

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird man variieren beim eigenständigen Ausfüllen der Tabelle sowie im Hinblick auf die Beantwortung der gestellten Fragen beim Umfang, bei der Durchdringung und beim Abstraktionsgrad.

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Erarbeitung I FEU 25 Min.	L führt mit dem Schülerblatt in das Thema ein. L und SuS bearbeiten einige Fälle* gemeinsam. SuS probieren natürlich zunächst selbst. *Vorschlag: n=4; s=0 … nur Parallelen n=5; s=4 … Büschel mit 4 Geraden und 1 Gerade parallel zu einer der Büschelgeraden n=5; s=2 … keine Zeichnung möglich n=5; s=10 … kein Büschel, keine Parallelen n= 6; s=11 … zwei Büschel mit 3 Geraden, vgl. Sachanalyse → In der Tabelle abhaken bzw. abkreuzen. (vgl. auch Lehrerblatt – Schritt 1)	Schülerblatt Tafel o.ä. Konzeptpapier
2. Erarbeitung II EA/PA 30 Min.	SuS füllen die Tabelle weiter aus und haken (bzw. kreuzen) in der Tabelle ab. n = 2 bis n = 5: Pflicht n = 6: Kür L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt Konzeptpapier
3. Erarbeitung III FEU 15 Min.	L und SuS vergleichen die Ergebnisse und vervollständigen die Tabelle. L und SuS gehen die vier gestellten Fragen durch. L überzeugt sich davon, dass SuS wissen, was zu tun ist.	Schülerblatt Tafel o.ä.
4. Erarbeitung IV EA/PA 15 Min.	SuS gehen den gestellten vier Fragen nach. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt
5. Erarbeitung V FEU 15 Min.	L und SuS besprechen die Antworten. (vgl. auch Lehrerblatt – Schritt 2)	

Lehrerblatt

Voraussetzung:

Voraussetzung für die Behandlung der Zahlen-Zaubertricks ist, dass die Unterrichtseinheit Terme und Termumformungen im Regelunterricht behandelt wurde, insbesondere die Einführung von Variablen, das Aufstellen von Termen – unter Beachtung von Vorrangregeln (!) – und das Distributivgesetz in der Anwendungsrichtung „ausmultiplizieren“. Auftretende einfache lineare Gleichungen werden nicht mit Äquivalenzumformungen, sondern mithilfe von Versprachlichung oder Rückwärtsrechnen gelöst.

Zahlen-Zaubertrick „festes Ergebnis“:

Denke dir eine Zahl. Verdopple sie. Addiere zum Ergebnis 12. Halbiere das Ergebnis. Subtrahiere jetzt noch die gedachte Zahl. Du erhältst die Zahl 6.
Dramaturgie bei der Vorführung – z.B. so: Die Zahl 6 auf einen Zettel schreiben, diesen in einen Umschlag stecken und den Umschlag zukleben. Wenn man diesen Zaubertrick zunächst mit nur einem Schüler durchführt, kann man als Zauberer behaupten, ihn beim Ausdenken der Zahl gedanklich beeinflusst zu haben. Ein bisschen Show muss sein beim Zaubern ☺.
Führt man ihn anschließend mehrfach, z.B. mit der ganzen Klasse durch (jeder Schüler denkt sich eine Zahl), wird sofort klar, dass sich unabhängig von der gedachten Zahl immer die 6 ergeben muss.
Tipps: Die gedachte Zahl sollte nicht zu groß (also zum Beispiel einstellig) sein, so dass sich Rechnungen leicht bewerkstelligen lassen. Wenn der Schüler sich verrechnet, verpufft der Effekt des Zaubertricks. Deshalb ggf.: Rechnungen an die Tafel schreiben, zu zweit rechnen lassen, gedachte Zahl und Zwischenergebnisse notieren lassen, nur hier – Taschenrechner benutzen lassen, usw. Erfahrungsgemäß ist es wichtig zu betonen, dass immer mit dem jeweiligen Ergebnis weitergerechnet werden soll.
Auflösung: Bezeichnet man die gedachte Zahl mit x und führt die Anweisungen durch, so erhält man den Term $((x \cdot 2 + 12) : 2 - x$ und durch vereinfachen $(2 \cdot x + 12) : 2 - x = x + 6 - x = 6$.

Zahlen-Zaubertrick „gedachte Zahl herausfinden“:

Denke dir eine Zahl. Nimm sie mal 5. Addiere zum Ergebnis 15. Verdopple dieses Ergebnis. Streiche die Null am Ende des Ergebnisses weg. Welche Zahl hast du jetzt?
Antwort, z.B.: *14.* Feststellung des Zahlenzauberers: *Du hast dir die Zahl 11 gedacht.*
Dramaturgie bei der Vorführung – z.B. so: Wenn man diesen Zaubertrick zunächst mit nur einem Schüler durchführt, kann man als Zauberer zur Verwirrung der Zuhörer auf irgendeine spontan erfundene Weise aus der 14 die 11 „kreativ herleiten“. Z.B. so: *14 ist 2 mal 7. 2 plus 7 plus 2 ist 11* ☺.
Führt man ihn anschließend mehrfach, z.B. mit der ganzen Klasse durch (jeder Schüler denkt sich eine Zahl), wird bald klar, dass die gedachte Zahl immer um 3 kleiner ist als das errechnete Ergebnis.
Tipps: siehe oben
Auflösung: Bezeichnet man die gedachte Zahl mit x und führt die Anweisungen durch, so erhält man den Term $((x \cdot 5 + 15) \cdot 2) : 10$ und durch vereinfachen $(10 \cdot x + 30) : 10 = x + 3$.
Die gedachte Zahl ist also um 3 kleiner (Achtung: Denkfalle!) als das Ergebnis.

Ziele:

- Praktizieren der algebraischen Universalstrategie, die, etwas flapsig formuliert, so lautet: *Wenn du eine Zahl nicht kennst, ist das kein Problem. Du bezeichnest die unbekannte Zahl einfach mit einer Variablen und rechnest weiter, als sei nichts passiert* ☺.
- Dabei die Power des Variablenkonzeptes (wieder) erfahren.
- Kopf- bzw. halbschriftliches Rechnen, Einsetzungsaspekt, Terme aufstellen, Terme umformen
- Freude am Betreiben von Mathematik empfinden; ideal: den Zaubertrick zu Hause vorführen ☺

Ideen aus: Isabelle Hetzler – Mathematische Zaubertricks für die Klassen 5 bis 10. Klett Stuttgart 2002, Inhalt: interessante mathematische Zaubertricks, Arbeitsblätter und Hinweise zur Zauberatmosphäre

1.) *Denke dir eine Zahl. Addiere 4. Nimm das Ergebnis mal 3. Subtrahiere 6. Dividiere das Ergebnis durch 3. Subtrahiere die gedachte Zahl.*

a) Denke dir die Zahl 3. Was erhältst du? ……

b) Denke dir die Zahl 5. Was erhältst du? ……

c) Denke dir die Zahl 7. Was erhältst du? ……

d) Schreibe einen Term auf und vereinfache ihn. Passt das Ergebnis zu den Ergebnissen für a) bis c)?

……

2.) Erfinde selbst so einen Rechen-Zaubertrick, bei dem sich zum Schluss immer dieselbe Zahl ergibt, egal welche Zahl man sich ausdenkt. Probiere den Trick mit deinem Nachbarn aus.

(Bild zur Wiederverwendung freigegeben: https://pixabay.com/de/vectors/hase-h%C3%A4schen-magier-zauberer-hexe-2040912/)

3.) *Denke dir eine Zahl. Verdopple sie. Addiere zum Ergebnis 8. Nimm das Ergebnis mal 3. Subtrahiere 18. Dividiere das Ergebnis durch 6.*

a) Denke die die Zahl 3. Was erhältst du? ……

b) Denke die die Zahl 5. Was erhältst du? ……

c) Denke die die Zahl 7. Was erhältst du? ……

d) Schreibe einen Term auf und vereinfache ihn. Passt das Ergebnis zu den Ergebnissen für a) bis c)?

……

4.) Schreibe einen Rechen-Zaubertrick in Worten auf, der zum Term $((5 \cdot x - 2) - 3 \cdot x) : 2$ passt und vereinfache den Term dann.

……

……

5.) Erfinde selbst so einen Rechen-Zaubertrick, bei dem man zum Schluss mit Hilfe des Ergebnisses leicht die gedachte Zahl ausrechnen kann. Probiere den Trick mit deinem Nachbarn aus.

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit feU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Man kann die Unternehmung auch in zwei Einzelstunden zu je 45 Minuten aufteilen und ggf. Knobelaufgaben als Puffer verwenden.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Erarbeitung I feU 15 Min.	L führt den → **Zahlen-Zaubertrick „festes Ergebnis“** vor – vgl. Lehrerblatt. L fordert SuS auf, die Rechenanweisung mit verschiedenen gedachten Zahlen (Farbe!) zu notieren, z.B.: → (3 · 2 + 12) : 2 – 3 = 18 : 2 – 3 = 9 – 3 = 6 → (5 · 2 + 12) : 2 – 5 = 22 : 2 – 5 = 11 – 5 = 6 usw. L: *Wie kann man das allgemein aufschreiben?* → x sei die gedachte Zahl → (x · 2 + 12) : 2 – x = x + 6 – x = 6 → **Auflösung** des Tricks: **Es ergibt sich immer die Zahl 6.** L: *Wie kommt es, dass sich immer dieselbe Zahl ergibt?* SuS z.B.: - *Der Clou ist, dass die gedachte Zahl zum Schluss gar keine Rolle mehr spielt.* - *Zunächst hat man zweimal die gedachte Zahl, dann nur noch einmal und dann ist sie weg.* usw.	Tafel (→) Heft
2. Übung I EA/PA 15 Min.	SuS bearbeiten die Aufgaben 1.) und 2.) des Schülerblattes L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend	Schülerblatt
3. Besprechung I feU 10 Min.	Die Ergebnisse werden vorgestellt und diskutiert.	
4. Erarbeitung II feU 15 Min.	L führt den → **Zahlen-Zaubertrick „gedachte Zahl herausfinden“** vor – vgl. Lehrerblatt. L fordert SuS auf, die Rechenanweisung mit verschiedenen gedachten Zahlen (Farbe!) zu notieren, z.B. so: → ((3 · 5 + 15) · 2) : 10 = (30 · 2) : 10 = 60 : 10 = 6 → ((5 · 5 + 15) · 2) : 10 = (40 · 2) : 10 = 80 : 10 = 8 usw. L: *Kann man erraten, wie man aus dem Ergebnis die gedachte Zahl berechnet?* gedachte Zahl = Ergebnis – 3 L: *Kann man diesen Zusammenhang beweisen?* SuS: *Term aufstellen und umformen* → x sei die gedachte Zahl → ((x · 5 + 15) · 2) : 10 = (10 · x + 30) : 10 = x + 3 → **Auflösung** des Tricks: **gedachte Zahl = Ergebnis – 3**	Tafel (→) Heft
5. Übung II EA/PA 15 Min.	SuS bearbeiten die Aufgaben 3.) bis 5.) des Schülerblattes. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend	Schülerblatt
6. Besprechung II und Reflexion feU 10 Min.	Die Ergebnisse werden vorgestellt und diskutiert. L: *Wie kann man die Zahlen-Zaubertricks erklären?* SuS: *mithilfe von Variablenkonzept und Termumformungen* → Wenn du eine Zahl nicht kennst, ist das kein Problem. Du bezeichnest die unbekannte Zahl einfach mit x und rechnest weiter, als sei nichts passiert ☺.	evtl. Tafel (→) Heft

Lehrerblatt

Voraussetzung:
Voraussetzung für die Behandlung der Zahlen-Zaubertricks ist, dass die Unterrichtseinheit Terme und Termumformungen im Regelunterricht behandelt wurde, insbesondere die Einführung von Variablen, das Aufstellen von Termen – unter Beachtung von Vorrangregeln (!) – und das Distributivgesetz in der Anwendungsrichtung „ausmultiplizieren“. Auftretende einfache lineare Gleichungen werden nicht mit Äquivalenzumformungen, sondern mithilfe von Versprachlichung oder Rückwärtsrechnen gelöst.

Zahlen-Zaubertrick „festes Ergebnis“:
Denke dir eine Zahl. Verdopple sie. Addiere zum Ergebnis 10. Verdopple dieses Ergebnis wieder. Teile durch 4. Addiere zum Ergebnis 2. Subtrahiere die gedachte Zahl. Du erhältst die Zahl 7.
Dramaturgie bei der Vorführung – z.B. so: Die Zahl 7 auf einen Zettel schreiben, diesen in einen Umschlag stecken und den Umschlag zukleben. Wenn man diesen Zaubertrick zunächst mit nur einem Schüler durchführt, kann man als Zauberer behaupten, ihn beim Ausdenken der Zahl gedanklich beeinflusst zu haben. Ein bisschen Show muss sein beim Zaubern ☺.
Führt man ihn anschließend mehrfach, z.B. mit der ganzen Klasse durch (jeder Schüler denkt sich eine Zahl), wird sofort klar, dass sich unabhängig von der gedachten Zahl immer die 7 ergeben muss.
Tipps: Die gedachte Zahl sollte nicht zu groß (also zum Beispiel einstellig) sein, so dass sich Rechnungen leicht bewerkstelligen lassen. Wenn der Schüler sich verrechnet, verpufft der Effekt des Zaubertricks. Deshalb ggf.: Rechnungen an die Tafel schreiben, zu zweit rechnen lassen, gedachte Zahl und Zwischenergebnisse notieren lassen, nur hier – Taschenrechner benutzen lassen, usw. Erfahrungsgemäß ist es wichtig zu betonen, dass immer mit dem jeweiligen Ergebnis weitergerechnet werden soll.
Auflösung: Bezeichnet man die gedachte Zahl mit x und führt die Anweisungen durch, so erhält man den Term $((x \cdot 2 + 10) \cdot 2) : 4 + 2 - x$ und durch vereinfachen $(4 \cdot x + 20) : 4 + 2 - x = x + 5 + 2 - x = 7$.

Zahlen-Zaubertrick „gedachte Zahl herausfinden“:
Denke dir eine Zahl. Nimm sie mal 5. Addiere zum Ergebnis 15. Verdopple dieses Ergebnis. Streiche die Null am Ende des Ergebnisses weg. Welche Zahl hast du jetzt?
Antwort, z.B.: *14.* Feststellung des Zahlenzauberers: *Du hast dir die Zahl 11 gedacht.*
Dramaturgie bei der Vorführung – z.B. so: Wenn man diesen Zaubertrick zunächst mit nur einem Schüler durchführt, kann man als Zauberer zur Verwirrung der Zuhörer auf irgendeine spontan erfundene Weise aus der 14 die 11 „kreativ herleiten“. Z.B. so: *14 ist 2 mal 7. 2 plus 7 plus 2 ist 11* ☺.
Führt man ihn anschließend mehrfach, z.B. mit der ganzen Klasse durch (jeder Schüler denkt sich eine Zahl), wird bald klar, dass die gedachte Zahl immer um 3 kleiner ist als das errechnete Ergebnis.
Tipps: siehe oben
Auflösung: Bezeichnet man die gedachte Zahl mit x und führt die Anweisungen durch, so erhält man den Term $((x \cdot 5 + 15) \cdot 2) : 10$ und durch vereinfachen $(10 \cdot x + 30) : 10 = x + 3$.
Die gedachte Zahl ist also um 3 kleiner (Achtung: Denkfalle!) als das Ergebnis.

Ziele:

- Praktizieren der algebraischen Universalstrategie, die, etwas flapsig formuliert, so lautet: *Wenn du eine Zahl nicht kennst, ist das kein Problem. Du bezeichnest die unbekannte Zahl einfach mit einer Variablen und rechnest weiter, als sei nichts passiert* ☺.
- Dabei die Power des Variablenkonzeptes (wieder) erfahren
- Kopf- bzw. halbschriftliches Rechnen
- Übungen: Einsetzungsaspekt, Terme aufstellen, Terme umformen
- Freude am Betreiben von Mathematik empfinden; ideal: den Zaubertrick zu Hause vorführen ☺

Ideen aus: Isabelle Hetzler – Mathematische Zaubertricks für die Klassen 5 bis 10. Klett Stuttgart 2002, Inhalt: mathematische Zaubertricks, Arbeitsblätter und Hinweise zur Zauberatmosphäre

1.) *Denke dir eine Zahl. Addiere 4. Nimm das Ergebnis mal 3. Subtrahiere 6. Teile das Ergebnis durch 3. Subtrahiere die gedachte Zahl.*

a) Denke dir die Zahl 3. Was erhältst du? ……

b) Denke dir die Zahl 5. Was erhältst du? ……

c) Denke dir die Zahl 7. Was erhältst du? ……

d) Schreibe einen Term auf und vereinfache ihn. Passt das Ergebnis zu den Ergebnissen für a) bis c)?

……

2.) *Denke dir eine Zahl. Addiere 6. Verdopple das Ergebnis.*

a) Schreibe noch zwei weitere Schritte auf, sodass sich zum Schluss immer die Zahl 1 ergibt, egal welche Zahl man sich ausdenkt.

……

b) Mache die Probe mit 5 als ausgedachte Zahl. ……

c) Stimmt das auch, wenn man sich eine negative Zahl ausdenkt? Überprüfe mit -10. ……

d) Stimmt das auch, wenn man sich eine Kommazahl ausdenkt? Überprüfe mit 0,5. ……

3.) Erfinde selbst so einen Rechen-Zaubertrick, bei dem sich zum Schluss immer dieselbe Zahl ergibt, egal welche Zahl man sich ausdenkt. Probiere den Trick mit deinem Nachbarn aus.

4.) *Denke dir eine Zahl. Verdopple sie. Addiere zum Ergebnis 8. Nimm das Ergebnis mal 3. Subtrahiere 18. Teile das Ergebnis durch 6.*

a) Denke die die Zahl 3. Was erhältst du? ……

b) Denke die die Zahl 5. Was erhältst du? ……

c) Denke die die Zahl 7. Was erhältst du? ……

d) Schreibe einen Term auf und vereinfache ihn. Passt das Ergebnis zu den Ergebnissen für a) bis c)?

……

5.) *Denke dir eine Zahl. Verdopple sie. Addiere zum Ergebnis 7. Verdopple das Ergebnis noch einmal.*

a) Erfinde noch zwei weitere Schritte, sodass zum Schluss das Ergebnis immer dreimal so groß ist wie die Zahl, die man sich ausgedacht hat.

……

b) Mache die Probe mit 5 als ausgedachter Zahl. ……

6.) Erfinde selbst so einen Rechen-Zaubertrick, bei dem man zum Schluss mit Hilfe des Ergebnisses leicht die gedachte Zahl ausrechnen kann. Probiere den Trick mit deinem Nachbarn aus.

7.) Schreibe einen Rechen-Zaubertrick auf, der zum Term passt und vereinfache den Term dann.

a) $((5 \cdot x + 4) - 3 \cdot x) : 2$ = ……

b) $((2 \cdot x - 4 \cdot x) \cdot 5 - 20) : 10 + x$ = ……

c) $(x \cdot x - 2 \cdot x) : x + 2$ = ……

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit wird man die Übungsphasen kurz halten, die Unternehmung vielleicht auch in zwei Einzelstunden aufteilen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Erarbeitung I FEU 15 Min.	L führt den → **Zahlen-Zaubertrick „festes Ergebnis“** vor – vgl. Lehrerblatt. L fordert SuS auf, die Rechenanweisung mit verschiedenen gedachten Zahlen (Farbe!) zu notieren, z.B.: → ((3 · 2 + 10) · 2) : 4 + 2 – 3 = … = 7 → ((5 · 2 + 10) · 2) : 4 + 2 – 5 = … = 7 usw. L: *Wie kann man das allgemein aufschreiben?* → x sei die gedachte Zahl → ((x · 2 + 10) · 2) : 4 + 2 – x = (4x + 20) : 4 + 2 – x = x + 5 + 2 – x = 7 → **Auflösung** des Tricks: **Es ergibt sich immer 7.** L: *Wie kommt es, dass sich immer dieselbe Zahl ergibt?* SuS z.B.: - *Der Clou ist, dass die gedachte Zahl zum Schluss gar keine Rolle mehr spielt.* - *Irgendwann hat man viermal die gedachte Zahl, dann nur noch einmal und dann ist sie weg.* usw.	Tafel (→) Heft
2. Übung I EA/PA 20 Min.	SuS bearbeiten das Schülerblatt Nr. 1 bis 3 L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend	Schülerblatt
3. Erarbeitung II FEU 15 Min.	L führt den → **Zahlen-Zaubertrick „gedachte Zahl herausfinden“** vor – vgl. Lehrerblatt. L fordert SuS auf, die Rechenanweisung mit verschiedenen gedachten Zahlen (Farbe!) zu notieren, z.B. so: → ((3 · 5 + 15) · 2) : 10 = … = 6 → ((5 · 5 + 15) · 2) : 10 = … = 8 usw. L: *Kann man erraten, wie man aus dem Ergebnis die gedachte Zahl berechnet?* gedachte Zahl = Ergebnis – 3 L: *Kann man diesen Zusammenhang beweisen?* SuS: *Term aufstellen und umformen* → x sei die gedachte Zahl → ((x · 5 + 15) · 2) : 10 = (10 · x + 30) : 10 = x + 3 → **Auflösung** des Tricks: **gedachte Zahl = Ergebnis – 3**	Tafel (→) Heft
4. Übung II EA/PA 20 Min.	SuS bearbeiten das Schülerblatt Nr. 4 bis 7 Für Notizen und Ausrechnungen benutzen die SuS Konzeptpapier, für Texte die Rückseite des Schülerblattes. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend	Schülerblatt
5. Reflexion FEU 10 Min.	L: *Was hat geholfen bei der Auflösung der beiden Zahlen-Zaubertricks?* SuS: *Variablenkonzept, Termumformung* →Wenn du eine Zahl nicht kennst, ist das kein Problem. Du bezeichnest die unbekannte Zahl einfach mit einer Variablen und rechnest weiter, als sei nichts passiert ☺.	evtl. Tafel (→) Heft

Lehrerblatt

Voraussetzung und Ziele:

Die „Zaubertricks 2“ bauen auf den „Zaubertricks 1“ auf und verfolgen dieselben Ziele.
Es geht nach wie vor konkret um Termumformungen und metakognitiv um das Erleben der Stärke des Variablenkonzeptes. Das Kalkül der Äquivalenzumformungen zum Lösen von Gleichungen wird nicht benötigt.

Zahlen-Zaubertrick „linke Hand – rechte Hand“:

Du hast 11 Streichhölzer (Münzen, Papierschnipsel o.ä.).
Nimm einige davon in die linke Hand, den Rest in die rechte Hand.
Verdopple die Anzahl der Hölzer in der linken Hand und zähle die Anzahl der Hölzer in der rechten Hand dazu.
Sage mir die Summe und ich sage dir, wie viele Hölzer du in der linken Hand hast.
Antwort, z.B.: *14.* Feststellung des Zahlenzauberers: *Du hast 3 Hölzer in der linken Hand.*

Dramaturgie bei der Vorführung:

Zum Beispiel so: Wenn man diesen Zaubertrick zunächst mit nur einem Schüler durchführt, kann man als Zauberer zur – hier zunächst ausnahmsweise gewollten – Verwirrung der Zuhörer auf irgendeine spontan erfundene Weise aus der 14 die 3 „kreativ herleiten“.
Vielleicht so:
14 enthält die Ziffern 1 und 4. Es gilt 4 – 1 = 3 ☺. Diese „kreative Herleitung“ funktioniert bei den Summen bis 19. Bei der Summe 20 vielleicht so: *2 ist die 10er-Ziffer: 10 – 2 = 8* 😊.
Führt man den Trick anschließend mehrfach durch, so wird an den notierten Beispielen wohl klar, dass man die Anzahl der Hölzer in der linken Hand erhält, indem man die Zahl 11 von der genannten Summe subtrahiert. Anders gesagt: die Anzahl der Hölzer in der linken Hand ist der Unterschied zwischen dieser Summe und der Zahl 11.

Auflösung:

Bezeichnet man die Hölzer in der linken Hand mit x, die in der rechten Hand dann (!) mit 11 – x, so erhält man die Summe $2 \cdot x + (11 - x)$ und durch Vereinfachen $x + 11$.
Die Anzahl der Hölzer in der linken Hand ist also um 11 kleiner (Achtung: Denkfalle!) als die Summe.
Man erkennt das auch ohne Variable: Man hat in beiden Händen immer 11 Hölzchen, die Anzahl der Hölzchen in der linken Hand zählt man zu diesen 11 noch einmal hinzu.

Zahlen-Zaubertrick „magische Summe 4-5-6“:

Denke dir eine natürliche Zahl. Bilde dann die Summe dieser und der beiden nachfolgenden Zahlen. Dividiere die Summe durch 3. Sage mir das Ergebnis und ich sage die die gedachte Zahl.
Antwort, z.B.: *11.* Feststellung des Zahlenzauberers: *Du hast dir die Zahl 10 gedacht.*

Dramaturgie bei der Vorführung:

Zum Beispiel so: Wenn man diesen Zaubertrick zunächst mit nur einem Schüler durchführt, kann man diesen bitten, die gedachte Zahl auf einen Zettel zu schreiben und diesen im Schrank einzuschließen. Ein bisschen Show muss sein beim Zaubern ☺. Führt man ihn anschließend mehrfach durch, dann wird wohl klar, dass die gedachte Zahl immer um 1 größer ist als das Ergebnis.
Tipps: Die gedachte Zahl sollte nicht zu groß (also zum Beispiel einstellig) sein, so dass sich Rechnungen leicht bewerkstelligen lassen. Wenn der Schüler sich verrechnet, verpufft der Effekt des Zaubertricks.

Auflösung:

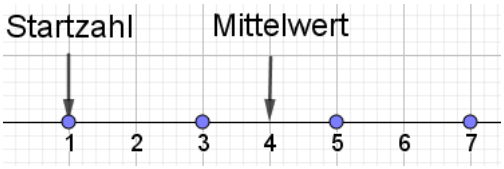
Bezeichnet man die gedachte Zahl mit x und führt die Anweisungen durch,
so erhält man den Term $(x + (x+1) + (x+2)) : 3 = (3 \cdot x + 3) : 3 = x + 1$.
Die gedachte Zahl ist also um 1 kleiner (Achtung: Denkfalle!) als das Ergebnis.

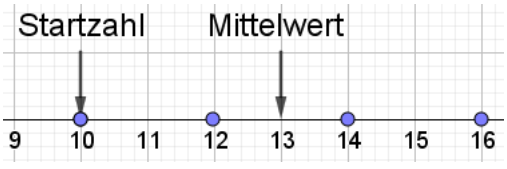
Variationen:

Wenn man bei der Variation der Anzahl der verwendeten Zahlen möchte, dass die Division „aufgeht“, so ist die Erkenntnis hilfreich, dass die Summe von n aufeinander folgenden Zahlen genau dann durch n teilbar ist, wenn n ungerade ist.
Beweis mit Hilfe der Summenformel für die ersten n natürlichen Zahlen
$0 + 1 + 2+ \ldots + (n - 1) = 0{,}5 \cdot (n - 1) \cdot n$:
$(x + 0) + (x + 1) + \ldots + (x + (n–2)) + (x + (n–1)) = n \cdot x + 0{,}5 \cdot (n–1) \cdot n = n \cdot (x + 0{,}5 \cdot (n–1))$.

Man kann auch die jeweils übernächsten Zahlen addieren lassen, dann ist die Summe aus diesen n Summanden immer durch n teilbar. Beweis:
$(x + 2\cdot0) + (x + 2\cdot1) + (x + 2\cdot2) + \ldots + (x + 2\cdot(n–2)) + (x + 2\cdot(n–1)) = n \cdot x + 2\cdot 0{,}5 \cdot (n–1) \cdot n = n \cdot (x + n – 1)$

Die Aufgaben 1 und 2 des Schülerblattes 2 lassen sich auch mithilfe einer Zahlenstrahl-Skizze lösen. Man verwendet dabei – ggf. intuitiv wie bei den hier vorliegenden symmetrischen Verteilungen – die Ausgleichseigenschaft des Mittelwertes („Summe der Abweichungen nach links = Summe der Abweichungen nach rechts“).
Hier zwei erläuternde Zahlenstrahl-Skizzen zur Aufgabe 2 und den Startzahlen 1 und 10.
Der Abstand zwischen Startzahl x und dem Ergebnis (= Mittelwert der aufsummierten Zahlen!) ist immer derselbe und hängt nicht von x ab.





Man kann auch die jeweils k-nächsten Zahlen addieren lassen, dann ist der Summe aus diesen n Summanden genau dann durch n teilbar, wenn $k \cdot (n-1)$ gerade ist.
Beweis: $(x + k\cdot0) + (x + k\cdot1) + (x + k\cdot2) + \ldots + (x + k\cdot(n–2)) + (x + k\cdot(n–1)) = n \cdot x + k\cdot 0{,}5 \cdot (n–1) \cdot n$
Auch derlei Aufgaben lassen sich mit einer Skizze am Zahlenstrahl lösen.

Ideen aus: Isabelle Hetzler – Mathematische Zaubertricks für die Klassen 5 bis 10. Klett Stuttgart 2002.
Inhalt: interessante mathematische Zaubertricks, Arbeitsblätter und Hinweise zur Zauberatmosphäre

1.) *Du hast 13 Streichhölzer (Münzen, Papierschnipsel oder ähnliches).*
Nimm einige davon in die linke, den Rest in die rechte Hand.
Multipliziere die Anzahl der Hölzer in der linken Hand mit 3 und addiere die Anzahl der Hölzer in der rechten Hand dazu.
Sage mir die Summe und ich sage dir, wie viele Hölzer du in der linken Hand hast.

a) Wie groß muss diese Summe mindestens sein? ……..

b) Wie groß kann diese Summe höchstens sein? ……..

c) Die Anzahl der Hölzer in der linken Hand sei x. Schreibe einen Term für die Summe auf und vereinfache ihn.

……

d) Wenn die Summe 23 ist, dann ist x = …… . Wenn die Summe 35 ist, dann ist x = …… .

e) Schreibe in Worten auf, wie man mit der genannten Summe die Anzahl x berechnen kann.

……

……

2.) *Du hast 10 Streichhölzer (Münzen, Papierschnipsel oder ähnliches).*
Nimm einige davon in die linke, den Rest in die rechte Hand.
Multipliziere die Anzahl der Hölzer in der linken Hand mit 5, die in der rechten Hand mit 3.
Sage mir die Summe dieser beiden Werte und ich sage dir, wie viele Hölzer du in der linken Hand hast.

a) Wie groß muss diese Summe mindestens sein? ……..

b) Wie groß kann diese Summe höchstens sein? ……..

c) Die Anzahl der Hölzer in der linken Hand sei x. Schreibe einen Term für die Summe auf und vereinfache ihn.

……

d) Wenn die Summe 38 ist, dann ist x = …… . Wenn die Summe 46 ist, dann ist x = …… .

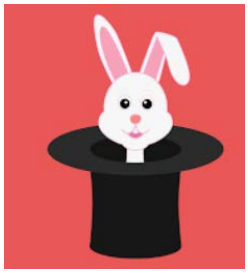
e) Schreibe in Worten auf, wie man mit der genannten Summe die Anzahl x berechnen kann.

……

……

(Bild oben: https://pixabay.com/de/vectors/hase-h%C3%A4schen-magier-zauberer-hexe-2040912/ zur Wiederverwendung freigegeben)

1.) *Denke dir eine Zahl. Bilde dann die Summe dieser und der 4 nachfolgenden Zahlen.*
Dividiere die Summe durch 5.
Sage mir das Ergebnis und ich sage dir die gedachte Zahl.



a) Denke dir die Zahl 2. Das Ergebnis heißt …… .

Denke dir die Zahl 9. Das Ergebnis heißt ….. .

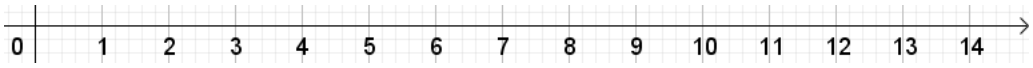
b) Die gedachte Zahl sei x. Schreibe einen Term für das Ergebnis auf und vereinfache ihn.

……

c) Schreibe in Worten auf, wie man mit dem Ergebnis die gedachte Zahl x ausrechnen kann.

……

d) Kannst du den Zaubertrick auch mithilfe einer Skizze am Zahlenstrahl lösen? Skizziere für die Startzahlen 2 und 9 und beachte dabei, dass das Ergebnis der Mittelwert der 5 addierten Zahlen ist.



2.) *Denke dir eine Zahl. Bilde dann die Summe dieser und der 3 jeweils übernächsten Zahlen.*
Dividiere die Summe durch 4.
Sage mir das Ergebnis und ich sage dir die gedachte Zahl.

a) Denke dir die Zahl 1. Das Ergebnis heißt ……. .

Denke dir die Zahl 8. Das Ergebnis heißt …….. .

b) Die gedachte Zahl sei x. Schreibe einen Term für das Ergebnis auf und vereinfache ihn.

……

c) Schreibe in Worten auf, wie man mit dem Ergebnis die gedachte Zahl x ausrechnen kann.

……

d) Kannst du den Zaubertrick auch mithilfe einer Skizze am Zahlenstrahl lösen? Skizziere für die Startzahlen 1 und 8 und beachte dabei, dass das Ergebnis der Mittelwert der 4 addierten Zahlen ist.

(Bild oben: https://pixabay.com/de/vectors/hase-h%C3%A4schen-magier-zauberer-hexe-2040912/ zur Wiederverwendung freigegeben)

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit feU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit wird man die Übungsphasen kurz halten, die Unternehmung vielleicht auch in zwei Einzelstunden aufteilen. Die Küraufgabe ist als Puffer einsetzbar.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Erarbeitung I feU 15 Min.	L führt den → **Zahlen-Zaubertrick** **„linke Hand – rechte Hand“** vor – vgl. Lehrerblatt. L fordert SuS auf, die Rechenanweisung mit verschiedenen Anzahlen der Hölzer in der linken Hand (Farbe!) zu notieren, z.B.: → 8 · 2 + (11 – 8) = 16 + 3 = 19 → 1 · 2 + (11 – 1) = 2 + 10 = 12 usw. L: *Vermutung?* SuS: *Hölzer in der linken Hand = Summe – 11* L: *Beweis?* SuS nennen das Variablenkonzept: → x … Anzahl der Hölzer in der linken Hand → 11-x … Anzahl der Hölzer in der rechten Hand → Summe = x · 2 + (11 – x) = 2·x + 11 – x = x + 11. → **Auflösung** des Tricks: **Anzahl der Hölzer in der linken Hand = Summe – 11** (Eventuell: Begründung ohne Variablen – vgl. Lehrerblatt)	Tafel (→) Heft
2. Übung I EA/PA 15 Min.	SuS bearbeiten die Aufgaben des Schülerblattes 1. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt 1
3. Erarbeitung II feU 15 Min.	L führt den → **Zahlen-Zaubertrick** **„magische Summe 4-5-6“** vor – vgl. Lehrerblatt. Notation mit einigen gedachten Zahlen (Farbe!), z.B. so: → (15 + (15+1) + (15+2)) : 3 = (15 + 16 + 17) : 3 = 48 : 3 = 16 → (7 + (7+1) + (7+2)) : 3 = (7 + 8 + 9) = 24 : 3 = 8 usw. L: *Vermutung?* SuS: *gedachte Zahl = Ergebnis – 1* L: *Beweis?* → x sei die gedachte Zahl → (x + (x+1) + (x+2)) : 3 = (3 · x + 3) : 3 = x + 1 → **Auflösung** des Tricks: **gedachte Zahl = Ergebnis – 1**	Tafel (→) Heft
4. Übung II EA/PA 15 Min.	SuS bearbeiten die Aufgaben des Schülerblattes 2. Für Notizen und Ausrechnungen benutzen die SuS die Rückseite des Schülerblattes. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt 2
5. Kür-Übung feU ggf. EA/PA	Zusatz-„Kür“: SuS erfinden selbst Variationen der Aufgabe 2 und formulieren den zugehörigen Zahlen-Zaubertrick – Bemerkungen hierzu vgl. Lehrerblatt, auch zur Möglichkeit der Lösung mithilfe einer Skizze am Zahlenstrahl	

Lehrerblatt

Voraussetzung und Ziele:
Die „Zaubertricks 2“ bauen auf den „Zaubertricks 1“ auf und verfolgen dieselben Ziele. Es geht nach wie vor konkret um Termumformungen und metakognitiv um das Erleben der Stärke des Variablenkonzeptes. Das Kalkül der Äquivalenzumformungen zum Lösen von Gleichungen wird nicht benötigt.

Zahlen-Zaubertrick „linke Hand – rechte Hand“:
Du hast 11 Streichhölzer (Münzen, Papierschnipsel o.ä.). Nimm einige davon in die linke, den Rest in die rechte Hand. Multipliziere die Anzahl der Hölzer in der linken Hand mit 5, die in der rechten Hand mit 4. Sage mir die Summe dieser beiden Werte und ich sage dir, wie viele Hölzer du in der linken Hand hast.
Antwort, z.B.: *52.* Feststellung des Zahlenzauberers: *Du hast 8 Hölzer in der linken Hand.*
Dramaturgie bei der Vorführung – z.B. so: Wenn man diesen Zaubertrick zunächst mit nur einem Schüler durchführt, kann man als Zauberer zur – hier zunächst ausnahmsweise gewollten – Verwirrung der Zuhörer auf irgendeine spontan erfundene Weise aus der 52 die 8 „kreativ herleiten“.
Z.B. so: *52 enthält die Ziffern 5 und 2. 2 ist die Einerziffer. Wir rechnen „also“: 5 + 2 + 1 = 8* ☺.
Führt man ihn anschließend mehrfach durch, so wird an den notierten Beispielen (hoffentlich) klar, dass man die Anzahl der Hölzer in der linken Hand erhält, indem man die Zahl 44 von der genannten Summe subtrahiert.
Auflösung: Bezeichnet man die Hölzer in der linken Hand mit x, die in der rechten Hand dann (!) mit 11-x, so erhält man die Summe $5 \cdot x + (11 - x) \cdot 4$ und durch Vereinfachen $x + 44$.
Die Anzahl der Hölzer in der linken Hand ist also um 44 kleiner (Achtung: Denkfalle!) als die Summe.
Es geht auch ohne Variable: Ist in der linken Hand kein Hölzchen, so ergibt sich 44. Für jedes Hölzchen was von der rechten in die linke Hand „wandert“, erhöht sich die Summe um 1.

Zahlen-Zaubertrick „magische Summe 4-5-6“:
Denke dir eine natürliche Zahl. Bilde dann die Summe dieser und der 4 nachfolgenden Zahlen. Dividiere die Summe durch 5 und subtrahiere 6. Sage mir das Ergebnis und ich sage die die gedachte Zahl.
Antwort, z.B.: *11.* Feststellung des Zahlenzauberers: *Du hast dir die Zahl 15 gedacht.*
Dramaturgie bei der Vorführung – z.B. so: Wenn man diesen Zaubertrick zunächst mit nur einem Schüler durchführt, kann man diesen bitten, die gedachte Zahl auf einen Zettel zu schreiben und diesen im Schrank einzuschließen. Ein bisschen Show muss sein beim Zaubern ☺.
Führt man ihn anschließend mehrfach durch, wird an den notierten Beispielen (hoffentlich) klar, dass die gedachte Zahl immer um 4 größer ist als das errechnete Ergebnis.
Tipps: Wie gehabt: Die gedachte Zahl sollte nicht zu groß sein; Zwischenergebnisse ggf. notieren.
Auflösung: Bezeichnet man die gedachte Zahl mit x und führt die Anweisungen durch, so erhält man den Term $(x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4)) : 5 – 6 = (5 \cdot x + 10) : 5 – 6 = x + 2 – 6 = x – 4$.
Die gedachte Zahl ist also um 4 größer (Achtung: Denkfalle!) als das Ergebnis.
Variationen: Wenn man möchte, dass die Division „aufgeht“, so ist die Erkenntnis hilfreich, dass die Summe von n aufeinander folgenden Zahlen ist genau dann durch n teilbar, wenn n ungerade ist.
Beweis mit Hilfe der Summenformel für die ersten n natürlichen Zahlen $0+1+2+…+(n-1)=0{,}5\cdot(n-1)\cdot n$:
$(x +0) + (x + 1) + … + (x + (n–2)) + (x + (n–1)) = n \cdot x + 0{,}5 \cdot (n–1) \cdot n$.
- Man kann auch die jeweils übernächsten Zahlen addieren lassen, dann „geht“ die Division der Summe aus diesen n Summanden durch n immer „auf“.
Beweis: $(x + 2\cdot0) + (x + 2\cdot1) + (x + 2\cdot2) + … + (x + 2\cdot(n–2)) + (x + 2\cdot(n–1)) = n \cdot x + 2\cdot 0{,}5 \cdot (n–1) \cdot n$
- Man kann auch die jeweils k-nächsten Zahlen addieren lassen, dann „geht“ die Division der Summe aus diesen n Summanden durch n immer dann „auf“, wenn $k \cdot (n-1)$ gerade ist.
Beweis: $(x + k\cdot0) + (x + k\cdot1) + (x + k\cdot2) + … + (x + k\cdot(n–2)) + (x + k\cdot(n–1)) = n \cdot x + k\cdot 0{,}5 \cdot (n–1) \cdot n$

Ideen aus: Isabelle Hetzler – Mathematische Zaubertricks für die Klassen 5 bis 10. Klett Stuttgart 2002, Inhalt: interessante mathematische Zaubertricks, Arbeitsblätter und Hinweise zur Zauberatmosphäre

1.) *Du hast 13 Streichhölzer (Münzen, Papierschnipsel oder ähnliches). Nimm einige davon in die linke, den Rest in die rechte Hand. Multipliziere die Anzahl der Hölzer in der linken Hand mit 4, die in der rechten Hand mit 3. Sage mir die Summe dieser beiden Werte und ich sage dir, wie viele Hölzer du in der linken Hand hast.*

a) Wie groß muss diese Summe mindestens sein? ……..

b) Wie groß kann diese Summe höchstens sein? ……..

c) Die Anzahl der Hölzer in der linken Hand sei x. Schreibe einen Term für die Summe auf und vereinfache ihn.

……

d) Wenn die Summe 42 ist, dann ist x = …… . Wenn die Summe 50 ist, dann ist x = …… .

e) Schreibe in Worten auf, wie man mit der genannten Summe die Anzahl x berechnen kann.

……

2.) *Du hast 10 Streichhölzer (Münzen, Papierschnipsel oder ähnliches). Nimm einige davon in die linke, den Rest in die rechte Hand. Multipliziere die Anzahl der Hölzer in der linken Hand mit 3, die in der rechten Hand mit 5. Sage mir die Summe dieser beiden Werte und ich sage dir, wie viele Hölzer du in der linken Hand hast.*

a) Wie groß muss diese Summe mindestens sein? ……..

b) Wie groß kann diese Summe höchstens sein? ……..

c) Die Anzahl der Hölzer in der linken Hand sei x. Schreibe einen Term für die Summe auf und vereinfache ihn.

……

d) Wenn die Summe 46 ist, dann ist x = …… . Wenn die Summe 38 ist, dann ist x = …… .

e) Schreibe in Worten auf, wie man mit der genannten Summe die Anzahl x berechnen kann.

……

3.) *Denke dir eine Zahl. Bilde dann die Summe dieser und der 6 nachfolgenden Zahlen. Dividiere die Summe durch 7 und subtrahiere 8. Sage mir das Ergebnis und ich sage die die gedachte Zahl.*

a) Denke dir die Zahl 5. Das Ergebnis heißt …… . Denke dir die Zahl 19. Das Ergebnis heißt ….. .

b) Die gedachte Zahl sei x. Schreibe einen Term für das Ergebnis auf und vereinfache ihn.

……

c) Schreibe in Worten auf, wie man mit dem Ergebnis die gedachte Zahl x ausrechnen kann.

……

4.) *Denke dir eine Zahl. Bilde dann die Summe dieser und der 5 jeweils übernächsten Zahlen. Dividiere die Summe durch 3 und subtrahiere 10. Sage mir das Ergebnis und ich sage die die gedachte Zahl.*

a) Denke dir die Zahl 7. Das Ergebnis heißt …… . Denke dir die Zahl 15. Das Ergebnis heißt ….. .

b) Die gedachte Zahl sei x. Schreibe einen Term für das Ergebnis auf und vereinfache ihn.

……

c) Schreibe in Worten auf, wie man mit dem Ergebnis die gedachte Zahl x ausrechnen kann.

……

Verlaufsplan

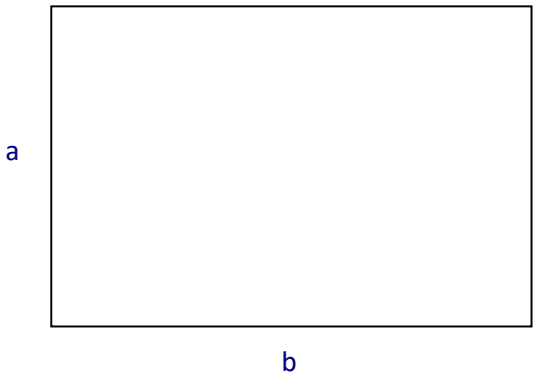
SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit wird man die Übungsphasen kurz halten, die Unternehmung vielleicht auch in zwei Einzelstunden aufteilen. Die Küraufgabe ist als Puffer einsetzbar.

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Erarbeitung I FEU 15 Min.	L führt den → **Zahlen-Zaubertrick** **„linke Hand – rechte Hand“** vor – vgl. Lehrerblatt. L fordert SuS auf, die Rechenanweisung mit verschiedenen Anzahlen der Hölzer in der linken Hand (Farbe!) zu notieren, z.B.: → 8 · 5 + (11 – 8) · 4 = 40 + 12 = 52 → 1 · 5 + (11 – 1) · 4 = 5 + 40 = 45 usw. L: *Vermutung?* SuS: *Hölzer in der linken Hand = Summe – 44* L: *Beweis?* SuS nennen das Variablenkonzept: → x … Anzahl der Hölzer in der linken Hand → 11-x … Anzahl der Hölzer in der rechten Hand → Summe = x · 5 + (11 – x) · 4 = 5x + 44 – 4x = x + 44. → **Auflösung** des Tricks: **Anzahl der Hölzer in der linken Hand = Summe – 44** (Eventuell: Begründung ohne Variablen – vgl. Lehrerblatt)	Tafel (→) Heft
2. Übung I EA/PA 20 Min.	SuS bearbeiten die Aufgaben 1 und 2 des Schülerblattes L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt
3. Erarbeitung II FEU 15 Min.	L führt den → **Zahlen-Zaubertrick** **„magische Summe 4-5-6“** vor – vgl. Lehrerblatt. Notation mit einigen gedachten Zahlen (Farbe!), z.B. so: → (15 + (15+1) + (15+2) + (15+3) + (15+4)) : 5 – 6 = (15 + 16 + 17 + 18 + 19) : 5 – 6 = 85 : 5 – 6 = 17 – 6 = 11 → (7 + (7+1) + (7+2) + (7+3) + (7+4)) : 5 – 6 = … = 3 usw. L: *Vermutung?* SuS: *gedachte Zahl = Ergebnis + 4* L: *Beweis?* → x sei die gedachte Zahl → (x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4)) : 5 – 6 = (5 · x + 10) : 5 – 6 = x + 2 – 6 = x – 4 → **Auflösung** des Tricks: **gedachte Zahl = Ergebnis + 4**	Tafel (→) Heft
4. Übung II EA/PA 20 Min.	SuS bearbeiten die Aufgaben 3 und 4 des Schülerblattes Für Notizen und Ausrechnungen benutzen die SuS die Rückseite des Schülerblattes. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend	Schülerblatt
5. Kür-Übung EA/PA	Zusatz-„Kür“: SuS erfinden selbst Variationen der Aufgabe 4 und formulieren den zugehörigen Zahlen-Zaubertrick – Bemerkungen hierzu vgl. Lehrerblatt	

Lehrerblatt

Lösung:

Die Abbildung und die Formeln legen folgende Lösung nahe: Umfang eines Rechtecks



a = 5cm b = 7cm
U = 2a + 2b = 10cm + 14cm = 24cm

Der Umfang des Rechtecks beträgt U = 24cm

Didaktische Überlegungen:

Die Unterrichtsstunde soll den SuS verdeutlichen, dass die Mathematik eine internationale Sprache „die Algebra“, besitzt, die nach strengen mathematischen Regeln geschrieben wird. Wenn man diese Regeln beherrscht, kann man Rechenaufgaben lösen. Das Arbeitsblatt kann man auch nur als Folie auflegen und die Übersetzung des Textes im Plenum durchführen.
In der Folge soll nun die Grammatik der Sprache Algebra gelernt werden. Man beginnt mit dem Aufschreiben der Grammatik-Regeln für die Berechnung von Termen:

- Von links nach rechts rechnen
- Klammern zuerst (innere vor äußeren)
- Punkt vor Strich

Evtl. können auch die Regeln für Äquivalenzumformungen von Gleichungen notiert werden: ACHTUNG: Man bringt nicht x auf die andere Seite, sondern man addiert den gleichen Term/die gleiche Zahl auf beiden Seiten der Gleichung.
Nun kann man einige einfache Terme nach diesen Regeln berechnen. Die Auswahl der Terme hängt vom derzeitigen Stand der Gruppe ab. Es bieten sich Terme mit natürlichen Zahlen, mit Bruchzahlen evtl. sogar mit rationalen Zahlen und auch mit Variablen an.

Als Sprechweise führt man ein: Welche Zahl ist in diesem Term versteckt (gemeint ist das Ergebnis)? Nun kann man ausgehend von einer Zahl Terme konstruieren, die als Ergebnis diese Zahl haben. „Man versteckt die Zahl“. In der Folge kann nun eine schülerzentrierte Phase folgen, in der in Partnerarbeit ein Schüler eine Zahl versteckt und der andere Schüler sie dann durch Ausrechnen des Terms findet.

Typische Beispiele sind:

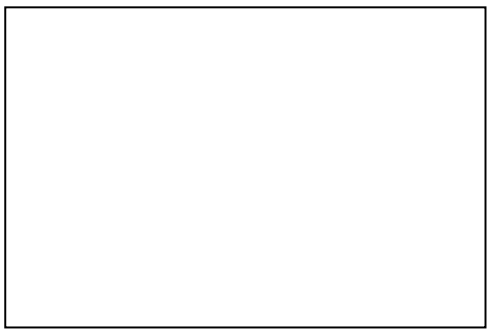
	723	Mit Variablen:	x = 5	Mit Text:
Einfach versteckt	(800 – 77)		3·x = 15	Wähle eine beliebige Zahl.
Doppelt versteckt	(800 - 11·7)		4·x = 15 + x	Addiere 4. Multipliziere das
Dreifach versteckt	(800 - 11·(16 – 9))	Usw.		Ergebnis mit 6. Subtrahiere
Usw.				dann 14. Dividiere das
				Ergebnis durch 2.

Diese Phase kann man auch in ein Spiel einkleiden (vgl. Mkid 6: Spiele)

Aus dem Mathematik-Heft einer chinesischen Schülerin:

矩形的圆周

守



六

守 = 5 自

六 = 7 自

九 = 2 守 + 2 六 = 10 自 + 14 自 = 24 自

矩形的周长是 九 = 24 自

Kannst du den Hefteintrag ins Deutsche übersetzen?

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird man die 3. und 4. Phase kurz halten oder weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg FEU oder Einzelarbeit 10 Min.	L stellt den Hefteintrag einer chinesischen Schülerin vor. SUS übersetzen den Hefteintrag ins Deutsche	Folie und/oder Arbeitsblatt
2. Voraussetzungen aufschreiben FEU 10 Min	Es werden die Regeln für das Berechnen von Termen notiert.	Tafel
3. Beispiele FEU 10 Min.	L führt einige Beispiele an der Tafel vor. (s. Lehrerblatt)	Tafel
4. Übungsphase PA 15 Min.	SuS verstecken und finden im Wechsel Zahlen (evtl. auch als Spiel)	Heft
5. Vertiefung (optional) FEU 10 Min.	Es werden die Regeln für Äquivalenzumformungen von Gleichungen aufgeschrieben / Übersetzung von Termen in Texte und umgekehrt.	Tafel
6. Beispiele FEU 10 Min.	L führt einige Beispiele an der Tafel vor. (s. Lehrerblatt)	Tafel
7. Übungsphase PA 15 Min.	SuS führen eigenständig im Wechsel solche Beispiele durch.	Heft

Lehrerblatt

Material:
1 Suppenteller (oder flaches Gefäß), 1 Trinkglas, Knet, Streichhölzer, Wasser, wenn möglich gefärbt (aus Physiksammlung)

Sachanalyse und didaktische Reduktion:

Beobachtung:
1. Nachdem man das Glas über die Flamme gestülpt hat, blubbert es außerhalb des Glases, solange das Feuer brennt.
2. Das Feuer geht dann aus.
3. Wenn das Feuer aus ist, steigt das Wasser im Glas hoch, sodass der Wasserspiegel innen höher ist als außen.

Problem für die Schüler: Das geht alles sehr schnell und man muss genau auf die Reihenfolge der Beobachtungen achten. Da 1. nicht besonders spektakulär ist, wird es oft nicht beobachtet.

A Falsche Erklärung aus dem Internet: Die Flamme verbraucht den Sauerstoff. Ohne Sauerstoff kann sie nicht mehr brennen. Das Wasser nimmt dann den Platz des verbrauchten Sauerstoffs aus.

B Richtige Erklärung: Der Sauerstoff wird in der Flamme zu CO_2 verbrannt. Die Flamme geht aus, weil nicht mehr genügend Sauerstoff vorhanden ist. Es blubbert, während die Flamme brennt, weil die Luft im Glas erwärmt wird, sich ausdehnt bzw. den Druck erhöht. Deshalb strömt Luft vom Glas nach außen. Wenn die Flamme aus ist, nimmt das Volumen der Luft wieder ab, weil sie abkühlt. Das Wasser nimmt den entstehenden freien Raum ein.

Wichtig für die Entscheidung zwischen den beiden Erklärungen: Würde A stimmen, müsste das Wasser im Glas schon hochsteigen, während die Flamme noch brennt.

Didaktische Reduktion:
Die Entstehung von CO2 kann man für die Erklärung weglassen. Es reicht, wenn man sich ausschließlich auf die Abhängigkeit des Volumens der Luft von der Temperatur konzentriert. Dabei geht man nicht auf den Druck ein.
Man kann sich auch alleine auf die Widerlegung der falschen Erklärung konzentrieren.

Hilfexperimente: Man kann auf eine leere Flasche aus dem Kühlschrank eine Münze legen. Diese wird bei der Erwärmung der Flasche angehoben.
Umgekehrt kann man einen Luftballon als Membran über eine leere Flasche ziehen und diese in den Kühlschrank stellen. Der Luftballon wird nach innen gezogen.

Ziele:
1. Die SuS lernen, dass es bei Beobachtungen auf die Reihenfolge ankommt.
2. Erfolgserlebnis: Durch genaues Beobachten kann man eine Erklärung aus dem Internet widerlegen.

Didaktischer Kommentar

Da bei diesem Experiment mit Feuer und Wasser gearbeitet wird, ist es besonders wichtig, auf die Disziplin zu achten. Das sollte auf jeden Fall zum Beginn der Stunde thematisiert werden. Es ist wünschenswert, dass ein Lehrer in der Nähe ist. Das Experiment läuft sehr schnell ab. Man wird es deshalb mehrfach durchführen oder alternativ den SuS erlauben, das Experiment mit dem Smartphone zu filmen. Der Vorteil des Filmens ist, dass man den Film abhängig von den einzelnen Abschnitten anhalten kann.

Die Erklärung des Experiments wird bewusst auf dem Arbeitsblatt nicht gefordert. Es geht vielmehr darum, genau zu beobachten. Um die Wichtigkeit von Beobachtungen zu begründen, reicht es vollkommen aus, die falsche Erklärung zu widerlegen. Natürlich werden die SuS dann eine bessere Erklärung wünschen. Diese kann von der Lehrkraft gegeben werden. Erfahrungsgemäß gibt es aber immer auch SuS, die eine solche Erklärung liefern können.

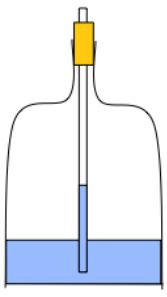
Im Hinblick auf das Erfolgserlebnis sollte die Widerlegung der falschen Erklärung entsprechend gefeiert werden. Insbesondere könnte man hier darauf hinweisen, dass sich diese widerlegte Erklärung in Hinweisen für die Ausbildung von Erziehern findet.

Insgesamt sollte die Unterrichtsstunde unter dem Gedanken stehen, wie Forscher vorgehen und wie wichtig dabei die genaue Beobachtung und Dokumentation ist. Vor allem sind Erklärungen erst dann möglich, wenn genaue Beobachtungen vorliegen.

Deshalb sind zwei passende Einstiege möglich:
1. Man fragt, wie wohl Forscher bei der Erforschung eines physikalischen Phänomens vorgehen und bespricht mit den SuS die Vorgehensweise: Beobachtetes Phänomen, Planung eines Experiments, Vorhersagen, Beobachtung, Abgleich Beobachtung-Vorhersage, evtl. Anpassung des Experiments oder der Vorhersagen, Beobachtung….
2. Man erzählt, dass man im Internet auf ein Experiment für Grundschüler gestoßen ist und die Erklärung des Experiments nicht so richtig versteht. Dann teilt man das Arbeitsblatt aus und bespricht die unter 1. beschriebene Vorgehensweise erst gegen Ende der Stunde.

Zur Dokumentation: In einer AG-Stunde sind SuS nicht besonders motiviert, eine Dokumentation zu erstellen. Es hängt stark von der Gruppe ab, wie man vorgeht. Man kann ein Forscherbuch führen. Das sollte dann aber bei allen Experimentalstunden einen Platz haben. Man kann, wenn man Zeit hat, eine Dokumentation mit dem Computer (auch evtl. freiwillig zu Hause) mit Bildern des Experiments erstellen. Für Gruppen, die sich dafür nicht motivieren lassen, genügt es aber auch, das Ergebnis der Stunde an der Tafel in groben Zügen festzuhalten.
Als physikalische Erkenntnis könnte man z.B. formulieren „Luft braucht Platz. Sie dehnt sich bei Erwärmung aus und zieht sich umgekehrt bei Erwärmung zusammen“.

Wichtig scheint aber eher die Vorgehensweise: Beobachtungen müssen genau sein, d.h. jedes Detail muss erfasst werden (z.B. das Blubbern). Es kommt auf die Reihenfolge bei Beobachtungen an!



Bleibt am Ende noch Zeit, dann kann man Phänomene sammeln, bei denen die Ausdehnung der Luft bei Erwärmung eine Rolle spielt.
Alternativ kann man auch ein Flaschenthermometer bauen: Eine Flasche wird mit einem Korken verschlossen. Der Korken hat ein Loch, in dem ein Trinkhalm steckt. In Flasche befindet sich etwas Wasser, in das der Trinkhalm taucht. Erwärmt man nun die Flasche z.B. mit der warmen Hand, dann steigt das Wasser im Trinkhalm hoch.

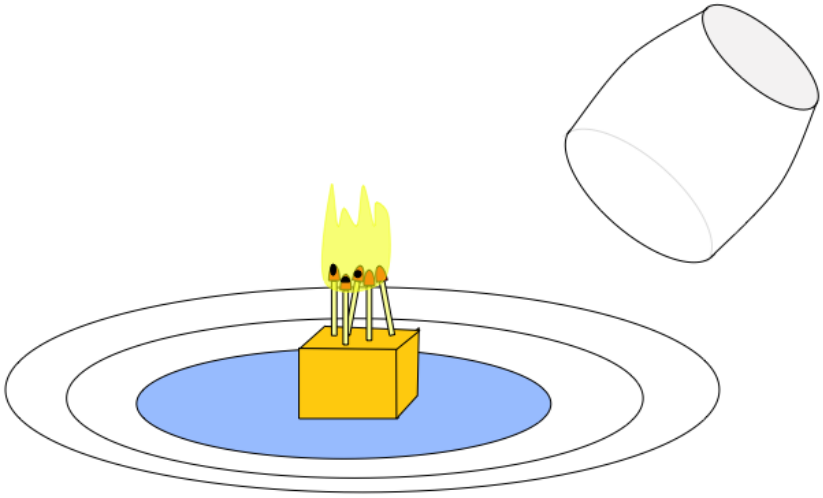
Das Feuertreppenexperiment

Lies zuerst das ganze Blatt durch. Sei vorsichtig beim Experimentieren, dass du nicht deine Haare oder Kleidung anbrennst. Halte einen Becher mit Wasser zum Löschen bereit.

1. Lest die Experiment-Anleitung durch und macht eine Vorhersage, was vermutlich passieren wird. (Noch nicht mit dem Experiment beginnen!)

Experiment:

- Lege ein Stück Knet auf einen Teller.
- Fülle etwas gefärbtes Wasser um den Knet, so dass er aus dem Wasser schaut.
- Stecke nun Streichhölzer mit dem Kopf nach oben, eng benachbart in den Knet.
- Zünde ein Streichholz mit einem extra Streichholz an und warte bis alle Streichhölzer brennen.
- Stülpe nun ein Glas kopfüber das Feuer und lass es im Wasser stehen.



2. Führt das Experiment durch und beobachtet genau was passiert.

3. Beschreibt das Experiment und schreibt eure Beobachtungen genau auf. Vergleicht die Beobachtungen mit euren Vorhersagen.

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf 5. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Einstieg FEU 5 Min.	L diskutiert die Vorgehensweise von Forschern und die Bedeutung der Beobachtung. Alternativ: Vorstellen eines Experiments und seiner Erklärung aus dem Internet. **Hinweis auf Gefahren beim Experimentieren**	Tafel
2. Erarbeitung I PA 20 Min.	SuS - bearbeiten das Arbeitsblatt - führen das Experiment durch - dokumentieren ihre Ergebnisse	AB Experiment
3. Ergebnissicherung FEU 10 Min.	L sichert gemeinsam mit den SuS das Ergebnis an der Tafel. Die falsche Erklärung wird an diesem Ergebnis überprüft.	Tafel / Heft?
4. Erarbeitung II PA 10 Min.	SuS führen das Experiment ein weiteres Mal durch und überprüfen, ob die Beobachtung mit der Sicherung an der Tafel übereinstimmt	Experiment
5. Ergänzungen (optional) PA 15 Min.	Bau eines Flaschenthermometers oder Sammlung von Phänomenen, bei den die Ausdehnung von Luft bei Erwärmung eine Rolle spielt.!	Flasche, Trinkhalm, Korken

Lehrerblatt

Ziele und Voraussetzungen:

Dies ist eine weitere „Werbeveranstaltung“ für den Einsatz von Variablen und Termen zur Fassung unterschiedlicher Sachsituationen, „Jeder Term erzählt eine Geschichte“. Der Hin- und Herübersetzung Term – Text wird dabei besondere Bedeutung beigemessen.
Die prägnante Kürze der Term-Zeichenkette in Verbindung mit der universellen Verwendung der dabei verwendeten Variablen soll zur Erkenntnis führen „Terme sind cool“.
Variable und Terme sollten den Schülern aus dem Regelunterricht bekannt sein. Das Kalkül zur Lösung von Gleichungen mithilfe von Äquivalenzumformungen wird nicht vorausgesetzt und soll auch nicht verwendet werden.
Erfahrungsgemäß bereitet es den Schülerinnen und Schüler auch Schwierigkeiten, in Sachsituationen verwendet Größen hinreichend genau zu beschreiben:

- „die Euro“ vs. „Kosten der Taxifahrt in Euro“ (Einheit vs. Größe)
- „die Schüler“ vs. „Anzahl der Schüler“ (Subjekte bzw. Objekte vs. Anzahl)

Einstieg:

Im fragendentwickelnden Unterricht stellt die Lehrperson die folgende Situation bezüglich der Kosten für eine Taxifahrt vor und schreibt bzw. projiziert Wesentliches für alle sichtbar:
Taxi-Müller: Grundgebühr 3 €, Kosten pro Kilometer 2 €
Taxi-Schulze: Kosten pro Kilometer 3 €, 2 € Rabatt für jede Fahrt
Anschließend stellt die Lehrperson die „üblichen“ Fragen:
- Wie viele km gefahren werden, weiß man noch nicht. Kann man die Situation trotzdem in den Griff bekommen?
Einführung einer Variablen, hier x … gefahrenen Kilometer
- Wie lauten die Terme für die Kosten einer Taxifahrt bei den beiden Unternehmen?
Taxi-Müller: $3 + 2 \cdot x$; Taxi-Schulze: $3 \cdot x - 2$
- Welches Unternehmen wählen wir?
Hier soll auf keinen Fall eine Gleichung gelöst werden, sondern durch Einsetzen von Zahlen die Situation „erspürt“ werden. Für kürzere Strecken bis 5 km ist Taxi-Schulze günstiger.
- Was ist das Coole an den Termen?
Hier wird in knappster Form – es sind nur 5 Zeichen (!) - die wesentliche Information für die beiden Taxiunternehmen erfasst. Es kommt auf jedes einzelne Zeichen an und auf deren Reihenfolge (!).

Übung:

Das Schülerblatt 1 „Term – Situation – Beschreibung“ erfordert eine genaue Betrachtung der Termstruktur. Dadurch dass immer die Zahl 8 und die Variable x vorkommen, muss bei den Situationen genau analysiert werden, was fest und was variabel ist.
Anstelle des handlungsbetonten Ausschneidens und Aufklebens kann man die Situationskärtchen auch mit den Großbuchstaben A, B, C, D, E und F belegen und dann diese Großbuchstaben in die Tabelle eintragen.

Im Schülerblatt 2 „Terme mit Variablen“ enthält in Aufgabenteil c) eine lineare Gleichung, welche die Schülerinnen und Schüler durch systematisches Probieren oder durch Rückwärtsrechnen lösen sollen.

Ideen aus:

Blomberg, J. & Marxer, M. (2017): Wie aus Zahlen Variablen werden. Mathematik lehren 202, S. 14 – 19.
Blomberg, J. (2017): Warum sind Terme so cool? Mathematik 41, S. 24 – 25.

Aufgabe:

a) Klebe die Situationskärtchen in den passenden Feldern ein und fülle die restliche Tabelle aus.

b) Bei welchen Termen wird der Termwert größer, wenn x größer wird? – Markiere diese mit grün.
Bei welchen Termen wird der Termwert kleiner, wenn x größer wird? – Markiere diese mit rot.

	Term	**Situation**	**a) Wofür steht x?** **b) Was berechnet der Term?**	**Beschreibung in Worten**
1.	8 + x			
2.	8 – x			
3.	x – 8			
4.	8 : x			
5.	x : 8			
6.	x·2 + 8	Der Eintritt in ein Museum kostet pro Kind 2 €. Zusätzlich muss die Begleitperson 8 € bezahlen.	a) x: Anzahl der Kinder b) das gesamte Eintrittsgeld	Multipliziere eine beliebige Zahl mit 2 und addiere zum Ergebnis 8.
7.	(8 + x)·2			

Von den Einnahmen bei einem Flohmarkt müssen immer 8 € Standgebühr bezahlt werden.

In der Reitgruppe sind 8 Kinder angemeldet. Es fehlen aber immer unterschiedlich viele Kinder.

Maya verdient bei der Nachhilfe 8 € und bekommt noch unterschiedlich viel Trinkgeld.

Bei einem Fest werden 8 Pizzen an die anwesenden Gäste verteilt.

Lilly kauft in der ersten Ferienwoche ein Comicheft für 8 € und noch Süßigkeiten. In der zweiten Ferienwoche kauft sie genau dasselbe nochmal.

Opa Ludwig hat mit seinen 7 Kumpels eine Lotto-Tippgemeinschaft. Gewinne werden immer gerecht aufgeteilt.

Terme mit Variablen: Term – Situation – Beschreibung (Lösungen)

Aufgabe:

a) Klebe die Situationskärtchen in den passenden Feldern ein und fülle die restliche Tabelle aus.

b) Bei welchen Termen wird der Termwert größer, wenn x größer wird? – Markiere diese mit grün.
Bei welchen Termen wird der Termwert kleiner, wenn x größer wird? – Markiere diese mit rot.

	Term	Situation	a) Wofür steht x? b) Was berechnet der Term?	Beschreibung in Worten
1.	$8 + x$	Maya verdient bei der Nachhilfe 8 € und bekommt noch unterschiedlich viel Trinkgeld.	a) x: Höhe des Trinkgeldes b) den gesamten Nachhilfeverdienst	Addiere zu 8 eine beliebige Zahl.
2.	$8 - x$	In der Reitgruppe sind 8 Kinder angemeldet. Es fehlen aber immer unterschiedlich viele Kinder.	a) x: Anzahl der fehlenden Kinder b) die Anzahl der anwesenden Kinder	Subtrahiere von 8 eine beliebige Zahl.
3.	$x - 8$	Von den Einnahmen bei einem Flohmarkt müssen immer 8 € Standgebühr bezahlt werden.	a) x: Höhe der Einnahmen b) den Gewinn	Subtrahiere von einer beliebigen Zahl die Zahl 8.
4.	$8 : x$	Bei einem Fest werden 8 Pizzen an die anwesenden Gäste verteilt.	a) x: Anzahl der Gäste b) die Anzahl der Pizzen, die jeder Gast bekommt	Dividiere 8 durch eine beliebige Zahl. Achtung: da man nicht durch 0 dividieren darf, darf 0 nicht für x eingesetzt werden!
5.	$x : 8$	Opa Ludwig hat mit seinen 7 Kumpels eine Lotto-Tippgemeinschaft. Gewinne werden immer gerecht aufgeteilt.	a) x: Gesamtgewinn b) den Gewinn, den jeder einzelne bekommt	Dividiere eine beliebige Zahl durch 8
6.	$x \cdot 2 + 8$	Der Eintritt in ein Museum kostet pro Kind 2 €. Zusätzlich muss die Begleitperson 8 € bezahlen.	a) x: Anzahl der Kinder b) das gesamte Eintrittsgeld	Multipliziere eine beliebige Zahl mit 2 und addiere zum Ergebnis 8.
7.	$(8 + x) \cdot 2$	Lilly kauft in der ersten Ferienwoche ein Comicheft für 8 € und Süßigkeiten. In der zweiten Ferienwoche kauft sie genau dasselbe nochmal.	a) x: Ausgaben für Süßigkeiten (in einer Woche) b) gesamten Ausgaben in den beiden Ferienwochen	Addiere zu 8 eine beliebige Zahl und multipliziere das Ergebnis mit 2.

a) Die drei Situationen sollen mit einem Term dargestellt werden, der so aufgebaut ist: (□ - □) : □

Trage zu jeder Situation die gegebenen Zahlen 14 und 90 und die Variable x passend in die Kästchen ein.

x	14	90

Einmal im Monat treffen sich Lene und ihre Freundinnen montags zum Bowlen. Die Bahn kostet für 3 Stunden 90 €. Montags gibt es einen Rabatt von 14 €.

Mit welchem Term kann man berechnen, wie viel jeder bezahlen muss, wenn immer unterschiedlich viele Personen mitbowlen?

$(\square - \square) : \square$

Die 14 Bedienungen in einem Café öffnen einmal im Monat die gemeinsame Trinkgeldkasse. Von dem darin enthaltenen Geld legen sie 90 € für den gemeinsamen Jahresausflug zurück. Der Rest wird gleichmäßig an alle verteilt.

Mit welchem Term kann man berechnen, wie viel jeder erhält, wenn das Trinkgeld in jedem Monat unterschiedlich hoch ist?

$(\square - \square) : \square$

Eine Cafeteria stellt täglich 90 kg Obstsalat her. Der Obstsalat, der am Ende des Tages noch übrig ist, wird gleichmäßig an die 14 Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter verteilt.

Mit welchem Term kann man berechnen, wie viel jeder erhält, wenn jeden Tag unterschiedlich viel Obstsalat verkauft wird?

$(\square - \square) : \square$

b) Berechne, wie viel Obstsalat jeder Mitarbeiter (Aufgabe a) – Beispiel rechts) bekommt, wenn 75 kg (80 kg, 85 kg) Obstsalat verkauft werden. Runde dabei sinnvoll!

c) An einem Tag kann jeder Mitarbeiter 1,5 kg Obstsalat mit nach Hause nehmen. Berechne, wie viel Obstsalat an diesem Tag verkauft wurde und beschreibe, wie du beim Lösen der Aufgabe vorgehst.

Quelle: Blomberg, J. & Marxer, M. (2017): Wie aus Zahlen Variablen werden. Mathematik lehren 202, S. 14 – 19.

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit feU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Einstieg und Erarbeitung feU 15 Min.	Taxi-Beispiel, vgl. Lehrerblatt	Tafel
2. Erarbeitung 1 EA/PA 10 Min.	SuS bearbeiten das Schülerblatt 1 und kontrollieren anhand ausgehängter Lösungen. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt 1 ausgehängte Lösungen
3. Besprechung 1 feU 5 Min.	Besprechung einiger Aspekte des Schülerblattes 1 *Wofür steht x?* *Was beschreibt der Term?*	
4. Erarbeitung 2 EA/PA 10 Min.	SuS bearbeiten das Schülerblatt 2 L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt 2
5. Besprechung 2 feU 5 Min.	Besprechung der Ergebnisse des Schülerblattes 2	
6. Abschluss feU 5 Min.	L: *Warum sind Terme cool?* SuS: *Mit Termen kann man Situationen beschreiben.* *Terme enthalten nur wenige Zeichen, aber viel Information.* *Wenn man eine Größe nicht kennt, ist das nicht schlimm, man führt einfach eine Variable ein.* *Mit Termen kann man weiter gehende Fragestellungen lösen.*	

Didaktischer Kommentar

Viele Schülerinnen und Schüler können den Wert von Termen zwar „automatisiert“ berechnen, haben aber kein Verständnis für den Aufbau von Termen. Auch der Sinn von Variablen wird von vielen nicht erfasst. Hier setzt diese Stunde an – sie sollte also eher zu Beginn des Mkid-Kurses unterrichtet werden.

Um zu verdeutlichen, dass Terme durchaus auch Alltagsbezug haben können, dient die Modellierung einer realen Situation (Kosten für eine Exkursion in die Experimenta) als Ausgangspunkt. Dabei sind auf dem Arbeitsblatt nicht alle notwendigen Informationen angegeben – fehlende Informationen sollen geschätzt oder mit dem Smartphone recherchiert werden. In der Regel rechnen Schülerinnen und Schüler bei derartigen Aufgaben schrittweise, da sich viele vor dem Aufstellen komplexerer Terme scheuen. Hier wird nun auch die Darstellung der Rechnung in einem einzigen Term „erzwungen“.

Bei der anschließenden Besprechung soll zunächst argumentiert werden, welche Terme die Sachlage überhaupt korrekt beschreiben. Die Fragen „Was ist gleich?“ und „Was ist unterschiedlich“ führen zur Betrachtung der Unterschiede und letztendlich zu folgenden Erkenntnissen:

- Terme mit unterschiedlichen Zahlen (aber mit gleicher Termstruktur) entstehen durch unterschiedliche Schätzwerte bei den fehlenden Angaben.
- Unterschiedliche Rechenwege führen zu Termen mit unterschiedlichen Termstrukturen. Diese sind äquivalent, können also durch zulässige Termumformungen ineinander überführt werden.

Das vertiefende Arbeitsblatt „Veränderungen der Situation – Veränderungen im Term“ schärft den Blick für den Aufbau von Termen und stellt gleichzeitig eine geschickte Überleitung zur Leitfrage „Warum sind Terme cool?“ dar: Rechnungen mit Termen ermöglichen eine hohe Flexibilität. Veränderte Situationen erfordern lediglich den Austausch einer Zahl im Term und können somit viel schneller erfasst werden als bei einer schrittweisen Rechnung. Zudem ermöglichen Terme eine schnelle mathematische Beschreibung vieler unterschiedlicher Situationen. Die Hinführung zu Variablen durch die Frage „Wie sieht der Term für x-beliebig viele Personen aus?“ sollte kein Problem darstellen, da Variablen bereits in Klasse 5/6 gelegentlich (propädeutisch) auftauchen.

Das Arbeitsblatt „Term – Situation – Beschreibung“ erfordert eine genaue Betrachtung der Termstruktur. Dadurch dass immer die Zahl 8 und die Variable x vorkommen, muss bei den Situationen genau analysiert werden, was fix und was variabel ist. Aus Zeitgründen erfolgt hier keine ausführliche gemeinsame Besprechung. Allerdings sollte in der anschließenden kurzen Plenumsphase herausgearbeitet werden, dass die Variable immer eine Anzahl beschreibt (z.B. x = Anzahl der Kinder). Viele Schülerinnen und Schüler neigen nämlich dazu, den Variablen Objekte zuzuordnen (z.B. x = Kinder), was beispielsweise bei Termen der Form $3x \cdot 4y$ zu Problemen führt.

Den Abschluss bildet eine kurze Reflexionsphase. Die Schülerinnen und Schüler sollen in einer SMS prägnant formulieren, weshalb Terme und Variablen cool sind.

In 90-Minuten-Stunden kann mehr Zeit für die Schülerblätter 2 und 3 und für die Plenumsphasen verwandt werden. Zudem kann das Arbeitsblatt „Terme mit Variablen“ bearbeitet werden. Letzteres enthält in Aufgabenteil d) bereits eine lineare Gleichung, welche die Schülerinnen und Schüler durch „scharfes Hinschauen“ oder durch Rückwärtsrechnen lösen können.

Ideen aus:

Blomberg, J. & Marxer, M. (2017). Wie aus Zahlen Variablen werden. Mathematik lehren 202, 14 – 19.
Blomberg, J. (2017). Warum sind Terme so cool? Mathematik 41, 24 – 25.

Exkursion in die Experimenta

Die Klasse 7b (28 Schülerinnen und Schüler) möchte die Experimenta* in Heilbronn besuchen und dort an einem Workshop zum Thema „Roboter“ teilnehmen.
(*Die Experimenta ist eine Technik- und Science-Ausstellung mit vielen Möglichkeiten zum Ausprobieren und Mitmachen.)

Berechnet in eurer Gruppe, wie teuer dieser Ausflug für jede mitfahrende Person wird. Denkt auch daran, dass jeder auch etwas Geld für Verpflegung benötigt.

Folgende Informationen helfen euch dabei:

- Eintritt Experimenta: 3 € pro Person
- Workshop: 100 € pro Klasse
- Preiskalkulation eines Busunternehmers (57er-Bus):
  - Gefahrene Strecke: 1,50 € pro km
  - Reisezeit (Fahr- und Standzeit): 25 € pro Stunde.

Hier ist Platz für eure Überlegungen und eure Rechnung:

Schreibt eure Rechnung in einem einzigen Term auf und bestimmt den Wert des Terms:

Term: Wert:

(Bild zur Wiederverwendung gekennzeichnet: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Experimenta_Heilbronn_Tafel.png)

Aufgabe:

Lea hat für die Kosten der Exkursion folgenden Term aufgestellt:

Term:	Wert des Terms:
$(4 \cdot 25 + 80 \cdot 1{,}5 + 100 + 28 \cdot 1) : 28$	14,43 [€]

Beschreibe für jede Zahl in Leas Term, was sie bedeutet.

Lea ändert die 100 € in dem Term auf 80 €. Was könnte passiert sein?

Das Busunternehmen erhöht aufgrund steigender Benzinpreise die Kosten pro gefahrenem Kilometer auf 2,00 €. Dafür sinkt der Preis pro Stunde auf 23,00 €.
Stelle den veränderten Term auf und berechne die Kosten pro Person.

Wie verändern sich die Kosten pro Person, wenn die Parallelklasse (24 Personen) mitfährt und am gleichen Workshop teilnimmt? Stelle zunächst den veränderten Term auf.

Für Schnelle:

Beim Workshop besteht die Möglichkeit, in 4er-Gruppen einen Roboter zu bauen. Dafür fallen Materialkosten in Höhe von 12 € pro Gruppe an. Die Klasse 7b beschließt, die Roboter zu bauen.
Stelle einen Term für die Kosten auf und berechne, wieviel die einzelnen Schülerinnen und Schüler dann bezahlen müssen.

Aufgabe:

a) Klebe die Situationskärtchen in den passenden Feldern ein und fülle die restliche Tabelle aus.

Für Schnelle:

b) Bei welchen Termen wird der Termwert größer, wenn x größer wird? – Markiere diese mit grün.
Bei welchen Termen wird der Termwert kleiner, wenn x größer wird? – Markiere diese mit rot.

c) Erfinde für jeden Term eine weitere Situation.

	Term	**Situation**	**a) Wofür steht x? b) Was berechnet der Term?**	**Beschreibung in Worten**
1.	$x + 8$			
2.	$8 - x$			
3.	$x - 8$			
4.	$8 : x$			
5.	$x : 8$			
6.	$8 + x \cdot 2$	Der Eintritt in ein Museum kostet pro Kind 2 €. Zusätzlich muss die Begleitperson 8 € bezahlen.	a) x: Anzahl der Kinder b) berechnet Gesamthöhe des Eintrittsgeldes	Multipliziere eine beliebige Zahl mit 2 und addiere zum Ergebnis 8.
7.	$(8 + x) \cdot 2$			

Von den Einnahmen bei einem Flohmarkt müssen immer 8 € Standgebühr bezahlt werden.

In der Reitgruppe sind 8 Kinder angemeldet. Es fehlen aber immer unterschiedlich viele Kinder.

Maya verdient bei der Nachhilfe 8 € pro Stunde und bekommt noch unterschiedlich viel Trinkgeld.

Bei einem Fest werden 8 Pizzen an die anwesenden Gäste verteilt.

Lilly kauft in der ersten Ferienwoche ein Comicheft für 8 € und noch Süßigkeiten. In der zweiten Ferienwoche kauft sie genau dasselbe nochmal.

Opa Ludwig hat mit seinen 7 Kumpels eine Lotto-Tippgemeinschaft. Gewinne werden immer gerecht aufgeteilt.

Aufgabe:

a) Klebe die Situationskärtchen in den passenden Feldern ein und fülle die restliche Tabelle aus.

Für Schnelle:

b) Bei welchen Termen wird der Termwert größer, wenn x größer wird? – Markiere diese mit grün.
Bei welchen Termen wird der Termwert kleiner, wenn x größer wird? – Markiere diese mit rot.

c) Erfinde für jeden Term eine weitere Situation.

	Term	**Situation**	**a) Wofür steht x?** **b) Was berechnet der Term?**	**Beschreibung in Worten**
1.	$x + 8$	Maya verdient bei der Nachhilfe 8 € pro Stunde und bekommt noch unterschiedlich viel Trinkgeld.	a) x: Höhe des Trinkgeldes b) berechnet Gesamthöhe ihres Nachhilfeverdiensts pro Stunde	Addiere 8 zu einer beliebigen Zahl.
2.	$8 - x$	In der Reitgruppe sind 8 Kinder angemeldet. Es fehlen aber immer unterschiedlich viele Kinder.	a) x: Anzahl der fehlenden Kinder b) berechnet die Anzahl der anwesenden Kinder	Subtrahiere von 8 eine beliebige Zahl.
3.	$x - 8$	Von den Einnahmen bei einem Flohmarkt müssen immer 8 € Standgebühr bezahlt werden.	a) x: Höhe der Einnahmen b) berechnet die Höhe des Gewinns	Subtrahiere 8 von einer beliebigen Zahl.
4.	$8 : x$	Bei einem Fest werden 8 Pizzen an die anwesenden Gäste verteilt.	a) x: Anzahl der Gäste b) berechnet Anzahl der Pizzen, die jeder Gast bekommt	Dividiere 8 durch eine beliebige Zahl. Achtung: da man nicht durch 0 dividieren darf, darf 0 nicht für x eingesetzt werden!
5.	$x : 8$	Opa Ludwig hat mit seinen 7 Kumpels eine Lotto-Tippgemeinschaft. Gewinne werden immer gerecht aufgeteilt.	a) x: Höhe des Gewinns b) berechnet Höhe des Gewinns, den Opa Ludwig und jeder Kumpel bekommen.	Dividiere eine beliebige Zahl durch 8
6.	$8 + x \cdot 2$	Der Eintritt in ein Museum kostet pro Kind 2 €. Zusätzlich muss die Begleitperson 8 € bezahlen.	a) x: Anzahl der Kinder b) berechnet Gesamthöhe des Eintrittsgeldes	Multipliziere eine beliebige Zahl mit 2 und addiere zum Ergebnis 8.
7.	$(8 + x) \cdot 2$	Lilly kauft in der ersten Ferienwoche ein Comicheft für 8 € und Süßigkeiten. In der zweiten Ferienwoche kauft sie genau dasselbe nochmal.	a) x: Höhe der Ausgaben für Süßigkeiten (in einer Woche) b) berechnet Gesamthöhe der Ausgaben in den beiden Ferienwochen	Addiere eine beliebige Zahl zu 8 und multipliziere das Ergebnis mit 2.

SMS:

Warum sind Terme und Variablen so cool?

SMS:

Warum sind Terme und Variablen so cool?

SMS:

Warum sind Terme und Variablen so cool?

a) Die drei Situationen unten sollen mit Hilfe eines Terms dargestellt werden, der so aufgebaut ist:

$(\square - \square) : \square$

Trage in deinem Heft zu jeder Situation die gegebenen Zahlen und die Variable passend in die Kästchen ein.

x	14	90

Einmal im Monat treffen sich Lene und ihre Freundinnen montags zum Bowlen. Die Bahn kostet für 3 Stunden 90 €. Montags gibt es einen Rabatt von 14 €.

Mit welchem Term kann man berechnen, wie viel jeder bezahlen muss, wenn immer unterschiedlich viele Personen mitbowlen?

Die 14 Pflegekräfte in einem Pflegeheim öffnen einmal im Monat die gemeinsame Trinkgeldkasse. Von dem darin enthaltenen Geld legen sie 90 € für den gemeinsamen Jahresausflug zurück. Der Rest wird gleichmäßig an alle verteilt.

Mit welchem Term kann man berechnen, wie viel jeder erhält, wenn das Trinkgeld in jedem Monat unterschiedlich hoch ist?

Eine Cafeteria stellt täglich 90 kg Obstsalat her. Der Obstsalat, der am Ende des Tages noch übrig ist, wird gleichmäßig an die 14 Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter verteilt.

Mit welchem Term kann man berechnen, wie viel jeder erhält, wenn jeden Tag unterschiedlich viel Obstsalat verkauft wird?

b) Erfinde ähnliche Beispiele wie in a) für diesen Term:

$(\square - \square) \cdot \square$

Wähle dazu auch geeignete Zahlen aus.

c) Berechne, wie viel Obstsalat jeder Mitarbeiter im rechten Beispiel in Aufgabe a) bekommt, wenn 75 kg (80 kg, 85 kg) Obstsalat verkauft werden. (Runde sinnvoll!)

d) An einem Tag kann jeder Mitarbeiter 1,5 kg Obstsalat mit nach Hause nehmen. Berechne, wie viel Obstsalat an diesem Tag verkauft wurde und beschreibe, wie du beim Lösen der Aufgabe vorgehst.

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf 5. – 7. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Einstieg und Erarbeitung GA 15 Min.	Wer von euch kennt die Experimenta? Wer war bereits dort? SuS bearbeiten in Gruppen (3er – 4er Gruppen) das Schülerblatt 1 „Exkursion in die Experimenta“	Schülerblatt 1
2. Ergebnis 1 FEU 12 Min.	SuS schreiben ihre Terme an Tafel und erläutern ihren Rechenweg. z.B.: $(5 \cdot 25 + 90 \cdot 1{,}5 + 100 + 28 \cdot 3) : 28$ $(4 \cdot 25 + 80 \cdot 1{,}5 + 100 + 28 \cdot 3) : 28$ $(4 \cdot 25 + 80 \cdot 1{,}5 + 100) : 28 + 3$ Diskussion: Wie kommen die Unterschiede in den Termen zustande? Welche Terme sind richtig? - Unterschiedliche Zahlen wegen unterschiedlicher Annahmen - Unterschiedliche Termstrukturen wegen unterschiedlicher Rechenwege L.: Warum sind verschiedene Rechenwege erlaubt? SuS: z.B. „Die unterschiedlichen Terme sind äquivalent, können durch Umformungen ineinander umgeformt werden.“	Tafel
3. Erarbeitung 2 PA 10 Min.	SuS bearbeiten das Schülerblatt 2 L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt 2
4. Ergebnis 2 FEU 5 Min.	Besprechung des Schülerblattes 2 Wie sieht der Term für eine x-beliebige Personenanzahl aus? L: Warum sind Terme eigentlich so cool? - Berechnung mit einem einzelnen Ausdruck - Kurze mathematische Beschreibung von vielen Situationen - Bei veränderten Situationen ändern sich einfach die Zahlen, die Termstruktur bleibt gleich (→ hierfür kann auch Variable eingeführt werden)	
5. Erarbeitung 3 EA / PA 12 Min.	SuS bearbeiten das Schülerblatt 3 und kontrollieren anhand ausgehängter Lösungen. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt 3 Ausgehängte Lösungen

6. Ergebnis 3 FEU 3 Min.	Besprechung einiger Aspekte des Schülerblatt 3: Wofür steht x? Was beschreibt der Term? Ggfs. Besprechung der Zusatzaufgaben des Schülerblattes 3	
7. optional: Vertiefung EA / PA	Intensivere Bearbeitung Schülerblätter 2 und 3 Bearbeitung des Schülerblattes 5 L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblätter 2 und 3 Schülerblatt 5
8. Reflexion und Abschluss EA / PA 3 Min.	Stellt euch vor, ein Freund fragt euch mit einer SMS, warum Terme und Variablen so cool sind. SuS schreiben eine Antwort-SMS	Schülerblatt 4

Lehrerblatt und Stundenablauf

Sachanalyse und allgemeine Bemerkungen:
Neben dem Messen sowie dem Erstellen und Auswerten von Diagrammen, werden die SchülerInnen hier in einigen Stationen nichtlineare Zusammenhänge kennen lernen. Gerade bei solchen Zusammenhängen sind Diagramme mit Ausgleichskurven hilfreich, um Zwischenwerte zu ermitteln. Beim Gummiband aus Station 1 ist z.B. die Verlängerung nicht proportional zur angehängten. Auch in Station 3 und 5 ergibt sich kein linearer Zusammenhang. Bei Station 3 ist dies umso deutlicher, je mehr der Becher von einer zylindrischen Form abweicht.

Probieren Sie in der Vorbereitung alle Versuche ausführlich aus und erstellen Sie eigene Diagramme. Ermutigen Sie später die SchülerInnen, Abweichungen von geradlinigen Diagrammen zu akzeptieren und, wo angebracht, gekrümmte Ausgleichskurven zu zeichnen. Eventuell müssen Sie auch einzelne Werte der Arbeitsblätter (vor allem bei den Aufträgen f) und g)) an die von Ihnen genutzten Materialien anpassen.

Zeitbedarf:
Dieses Modul benötigt ca. 120 Minuten Zeit. Wie viel Zeit genau, hängt unter anderem vom experimentellen Geschick der SchülerInnen und der Gruppengröße ab. Es empfiehlt sich zunächst von ca. zwei Einzelstunden auszugehen und als Reserve z.B. ein Rechenspiel oder ähnliches mitzubringen. Da die SchülerInnen unterschiedlich schnell vorankommen werden, ist es geschickt, für schnelle Gruppen eine weitere Aufgabe (z.B. das Material zu einer der anderen Stationen) dabei zu haben.

Vorbereitungen zu den Experimenten (ca. 20 min):
Besprechen Sie z.B. anhand der Messung der Periodendauer eines Fadenpendels, wie man beim Messen einen möglichst genauen Wert erhält. Dabei wird auch die Methode, mehrfach zu Messen und den Mittelwert zu bilden, angesprochen. Führen Sie dies am gegebenen Beispiel gemeinsam durch: alle SchülerInnen stoppen die Zeit für eine Periodendauer, die Werte werden gesammelt und alle berechnen den Mittelwert. Variante: Je nach Einschätzung und Vorkenntnisse der Mkid-Gruppe können Sie in diesem Modul auf die Mehrfachmessung und Mittelwertbildung auch verzichten.

Nun wird an einem Beispieldiagramm (z.B.an einem Weg-Zeit-Diagramm für den Schulweg) besprochen, dass Diagramme zur Beantwortung viele Fragen sehr hilfreich sind. Anschließend wird der Weg vom Experiment zum Diagramm (Ergebnisse in einer Tabelle festhalten, passende Achseneinteilung wählen, Messpunkte eintragen, Ausgleichskurve erstellen) kurz besprochen. Halten Sie sich hier nicht so lange auf, dass die Messungen in der Stunde nicht mehr fertig werden. Details zum Erstellen der Diagramme und den Ausgleichskurven werden später besprochen.

Messungen (ca. 40 min):
Sicherheitshinweise (vgl. Blatt Experimente) den SchülerInnen mitteilen und stets im Blick behalten.

Auswertungsphase (ca. 30 min):
Die SchülerInnen sollen zunächst entlang der Teilaufträge auf dem Arbeitsblatt die Diagramme erstellen und die Vorhersagefragen beantworten. Für die spätere Zuordnungsrunde soll jede Gruppe auch ein „anonymes“ Diagramm ohne Titel und ohne Achsenbeschriftung erstellen, das nur durch einen (zufälligen) Buchstaben gekennzeichnet wird.

Zuordnung der fremden Diagramme zu den Stationen (ca. 20 min):
Zunächst müssen die Stationen allen kurz vorgestellt werden. Anschließend werden die „anonymen“ Diagramme projiziert und die SchülerInnen notieren sich ihre Idee für eine Zuordnung zu den Stationen. Bei der folgenden Besprechung werden die Besonderheiten der einzelnen Diagramme gesucht und hervorgehoben sowie der Bezug zum jeweiligen Experiment hergestellt.

Experimente: Materialien und Hinweise

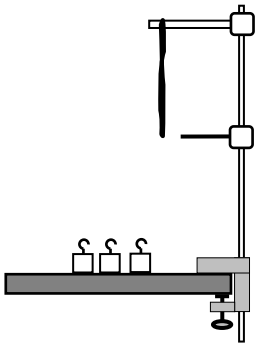
Allgemeine Hinweise:

- Einzelne Stationen können gedoppelt oder weggelassen werden. Hier können Sie sich auch nach der Materialverfügbarkeit (für Station 1 und 2 Physikkollegen fragen) richten.
- Im Extremfall könnten auch alle Gruppen das gleiche Thema (z.B. Station 5) bearbeiten. Dann entfällt die Abschlussrunde, in der die fremden Diagramme den verschiedenen Experimenten zugeordnet werden.
- Maximal fünf oder vier Schülergruppen, die nebeneinander experimentieren, erleichtern Ihnen die Betretung während der Mkid-Stunde.

Station 1: Verlängerung eines Gummibands

Material:

Gummibänder (z.B. für den Haushalt), Tischklemme, Stativstangen, Muffen, ggf. Klemme zum befestigen des Gummibands, 1 Satz Massestücke mit Haken zum Einhängen in das Gummiband (z.B. 8 x 25 g/ 50 g oder Wägesatz ohne die großen Massenstücke), Meterstab oder langes Lineal



Sicherheitshinweise:

Stabile Befestigung des Stativmaterials am Tisch prüfen; Massestücke vorsichtig anhängen und dabei nicht am Massestück ziehen, sonst könnte dieses durch den Raum geschleudert werden; SchülerInnen nur mit kleinen Massen experimentieren lassen (schwere Fußverletzungen möglich beim Absturz von z.B. einem 1 kg-Massenstück)

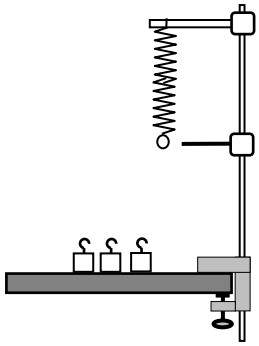
Hinweise:

Hinreichend „weiches“ Gummiband wählen, das durch eine Masse von ca. 250 g deutlich gedehnt wird. Die SchülerInnen müssen die Position ohne angehängtes Massestück messen und später Differenzen bilden oder es wird eine Markierung für die Position ohne Massestück am Stativ angebracht.

Station 2: Verlängerung einer Feder

Material:

Spiralfeder, Tischklemme, Stativstangen, Muffen, ggf. Klemme zum befestigen des Gummibands, 1 Satz Massestücke mit Haken zum Einhängen in die Spiralfeder (z.B. 8 x 25 g/ 50 g oder Wägesatz ohne die großen Massenstücke), Meterstab oder langes Lineal



Sicherheitshinweise:

Stabile Befestigung des Stativmaterials am Tisch prüfen; Massestücke vorsichtig anhängen und dabei nicht am Massestück ziehen, sonst könnte dieses durch den Raum geschleudert werden; SchülerInnen nur mit kleinen Massen experimentieren lassen (schwere Fußverletzungen möglich beim Absturz von z.B. einem 1 kg-Massenstück!)

Hinweise:

Hinreichend „weiche“ Spiralfeder wählen, die durch eine Masse von ca. 250 g deutlich gedehnt wird. Die SchülerInnen müssen die Position ohne angehängtes Massestück messen und später Differenzen bilden oder es wird eine Markierung für die Position ohne Massestück am Stativ angebracht.

Station 3: Beladen eines „Schiffs“

Material:

Transparentes Kunststoffbox (min. 15 cm x 20 cm mit 15 cm Höhe) am besten mit mindesten einer ebenen Wand (erleichtert das Ablesen an einem Meterstab unter Wasser); Wasser; Papier zum Aufwischen; Plastikbecher 0,2 l oder Dessertbecher als „Schiff“; ca. 400 g Kieselsteine (Dekosteine aus Möbel- oder Blumenläden); Waage; Meterstab oder langes Lineal

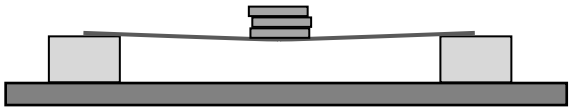
Hinweise:

Für eine gleichmäßige Beladung und eine stabile Lage die Kieselsteine durch leichtes Schütteln verteilen.
Verschüttetes Wasser und nasse Gegenstände sofort aufwischen/ trockenwischen lassen.

Station 4: Durchbiegen eines Regalbretts

Material:

Sperrholzbrett 5 mm dick, ca. 20 cm x 100 cm (Baumarkt); 2 Kisten oder ähnliches als Auflagen für das Brett; Bücher (oder ähnliches) als Lasten; Waage; Meterstab oder Lineal



Sicherheitshinweise:

Auf stabile Auflagen für das Brett achten, die im Versuch nicht zur Seite rutschen.
Aufbau mittig auf dem Tisch, um Herabfallen der Brettlast auf die Füße zu vermeiden.
Achtung Splitter, falls das Holz wider Erwarten brechen sollte.

Hinweise:

Die SchülerInnen müssen zunächst die die Position ohne aufgelegte Bücher messen und später Differenzen bilden.
Die Beladung und die Messung sollten stets an der gleichen Position in der Mitte stattfinden.

Station 5: Entleeren eines Schwimmbads/einer Wasserflasche

Material:

Wasserflasche aus Kunststoff, die möglichst zylindrisch ist) und in die unten seitlich ein kleines Loch (ca. 4 mm Durchmesser) gebohrt wurde; auch in den Deckel der Flasche ein Loch bohren; Waschbecken oder Kunststoffbox (ca. 30 cm x 20 cm und 15 cm hoch) als Wasserauffangbehälter; Kiste oder Box auf der ggf. die Flasche steht; Wasser; Papier zum Aufwischen; Stoppuhr oder Timer; abwaschbarer Folienstift; Meterstab oder Lineal

Hinweise:

Fließt das Wasser zu schnell aus, kann das Loch mit Klebefilm wieder teilweise verschlossen werden.
Flasche gut festhalten, damit das Wasser beim Markieren des Wasserstands nicht herum schwappt.
Tipp zum Vorgehen: Verschließt man nach 10 s Auslaufzeit das Loch im Deckel der Flasche, fließt kein Wasser mehr aus und der Wasserstand kann in Ruhe markiert werden. Danach wird das Loch im Deckel wieder für 10 s freigegeben und der Vorgang wiederholt sich.

Didaktischer Kommentar

Idee des Moduls:
In diesem Modul arbeiten die SchülerInnen in kleinen Gruppen zwei oder max. drei Personen an unterschiedlichen Fragestellungen. Zu den Experimenten werden Diagramme mit Ausgleichskurve erstellt und im Anschluss verwendet, um weitere Fragen zu beantworten.

Zum Abschluss dient ein kleiner „Rate"-wettbewerb dazu, die Diagramme der verschiedenen Aufgaben miteinander zu vergleichen und Besonderheiten einzelner Diagramme im Unterrichtsgespräch hervorzuheben. Dazu werden die Diagramme anonymisiert und allen SchülerInnen vorgelegt, die versuchen sollen, jedem Diagramm eine der Aufgaben zuzuordnen. Für richtige Zuordnungen werden Punkte vergeben. Zusätzlich sollen sich alle eine Begründung für ihre Zuordnungen überlegen.

Ziele:
In diesen Experimenten geht es um eine zentrale Methode der Naturwissenschaften: Zu verschiedenen Fragestellungen werden aus Messwerten Diagramme inklusive Ausgleichskurve erstellt. Anschließend werden die Ausgleichskurven genutzt, um Vorhersagen für Werte zu treffen, zu denen keine Messwerte vorliegen. Gleichzeitig wird auch das quantitative Messen trainiert, einschließlich der Methode, den gleichen Wert ggf. mehrmals zu messen und dann den Mittelwert zu verwenden.

Die SchülerInnen werden je nach Schulcurriculum dieses Vorgehen am Anfang der 7. Klasse im Physikunterricht bereits kennengelernt haben – häufig am Beispiel der Periodendauer eines Pendels. Fragen Sie die Physikkollegen der Klasse 7, ob nennenswerte Vorkenntnisse vorhanden sind oder ob Sie hier mit den SchülerInnen etwas Neues üben. In beiden Fällen sollten Sie davon ausgehen, dass die Aufgabe für die SchülerInnen anspruchsvoll ist und Sie langsam vorgehen müssen. Sie sollten daher die verschiedenen Schritte und „Tricks" mit den SchülerInnen besprechen, bevor die tatsächlichen Messungen oder Auswertungen beginnen.

In den Naturwissenschaften sind Experimente in der Regel hypothesengeleitet. Das heiß, bereits vor Durchführung des Experiments gibt es eine Vermutung oder Hypothese, die anschließend mit dem Experiment geprüft wird. Daher sollen die SchülerInnen vor dem Experimentieren Vermutungen zum Verlauf der Diagramme äußern und diese nach dem Experiment bewerten. Die entsprechenden Vorhersagen werden unter der Überschrift „Hypothesen" notiert und nach dem Versuch unter „Bewertung der Hypothesen" schriftlich bewertet. Manche SchülerInnen müssen ermuntert werden, ihre Hypothesen aufzuschreiben, da sie nichts „falsches" oder „ungesichertes" aufschreiben wollen. Es sollte daher geklärt werden, dass es vor dem Experiment kein richtig oder falsch gibt. Erst nach dem Versuch wird überprüft, ob das Experiment die Hypothese bestätigt oder der Hypothese widerspricht.

Wichtige Aspekte und Herausforderungen:
- Sorgfältiges experimentelles Arbeiten
- Beachten, dass außer einem Parameter nichts am experimentellen Aufbau geändert werden darf.
- Messwertepaare in einer übersichtlichen Tabelle aufschreiben
- Überlegen, wie man die gesuchten Werte am besten messen kann
- Den gleichen Wert mehrfach messen (z.B. dreimal) und anschließend den Mittelwert bilden, um ein genaueres Ergebnis zu erhalten.
- Achsen des Koordinatensystems mit Größe und Einheit beschriften sowie eine sinnvolle Skalierung der Achsen wählen.
- Wertepaare in einem Koordinatensystem eintragen.
- Einzeichnen einer Ausgleichskurve anstelle die Messpunkte mit dem Lineal zu verbinden: Die Kurve verläuft nicht durch alle Messpunkte – es werden i.d.R. ein paar Werte über/ unter der Kurve liegen.
- Gesuchte „Zwischenwerte" an der Ausgleichskurve ablesen.

Vom Experiment zum Diagramm

- **Lest zuerst den gesamten Text zu eurer Station durch.** Geht danach schrittweise vor.
- **Seid vorsichtig beim Experimentieren.** Achtet darauf, dass nicht kaputt geht oder vom Tisch fällt. Beachtet alle Hinweise bei euren Experimenten.

Station 1: Verlängerung eines Gummibands

Wenn man einen Gegenstand an ein Band hängt, dehnt sich das Band. Oft ist die Verlängerung des Bands so klein, dass man sie nicht sehen kann. Bei einem Gummiband ist die Verlängerung des Bands aber deutlich größer und gut sichtbar. Wie die Verlängerung von der angehängten Masse abhängt, sollt ihr genauer untersuchen.

a) Notiert Hypothesen zum Zusammenhang zwischen angehängter Masse und Verlängerung des Gummibands.
b) Klärt zuerst, wie ihr das Gummiband sicher befestigen wollt und wie ihr die Verlängerung (nicht die Länge) des Gummibands möglichst **genau** messen könnt.
Sicherheitshinweis: Nicht am Gummiband ziehen, das angehängte Massestück könnte sonst durch den Raum geschleudert werden und jemanden verletzen.
c) Messt für mindestens acht verschiedene angehängte Massen die Verlängerung des Gummibands. Messt jede Verlängerung dreifach und verwendet dann denn Mittelwert. Tragt die Wertepaare in eine Tabelle ein.
d) Stellt eure Ergebnisse in einem Diagramm dar und zeichnet anschließend eine Ausgleichskurve ein.
e) Bewertete eure anfangs notierten Hypothesen: Notiert zu jeder Hypothese, ob das Experiment die Hypothese bestätigt oder widerlegt.

Vorhersagen mit dem Diagramm treffen:

f) Für ein Kleinkinderspielzeug soll eine Holzfigur mit der Masse 172 g an dem Gummiband befestigt werden. Wie stark wird sich das Gummiband dadurch verlängern?
g) Welche Masse darf die angehängte Figur maximal haben, wenn sich das Gummiband höchstens um 6,5 cm verlängern soll?

Station 2: Verlängerung einer Spiralfeder

Wenn man einen Gegenstand an ein Band hängt, dehnt sich das Band. Oft ist die Verlängerung des Bands so klein, dass man sie nicht sehen kann. Bei einer Spiralfeder ist die Verlängerung der Feder aber deutlich größer und gut sichtbar. Wie die Verlängerung von der angehängten Masse abhängt, sollt ihr genauer untersuchen.

a) Notiert Hypothesen zum Zusammenhang zwischen angehängter Masse und Verlängerung der Feder.
b) Klärt zuerst, wie ihr die Feder sicher befestigen wollt und wie ihr die Verlängerung (nicht die Länge) der Feder möglichst **genau** messen könnt.
Sicherheitshinweis: Nicht an der Feder ziehen, das angehängte Massestück könnte sonst durch den Raum geschleudert werden und jemanden verletzen.
c) Messt für mindestens acht verschiedene angehängte Massen die Verlängerung der Feder. Messt jede Verlängerung dreifach und verwendet dann denn Mittelwert. Tragt die Wertepaare in eine Tabelle ein.

d) Stellt eure Ergebnisse in einem Diagramm dar und zeichnet anschließend eine Ausgleichskurve ein.
e) Bewertete eure anfangs notierten Hypothesen: Notiert zu jeder Hypothese, ob das Experiment die Hypothese bestätigt oder widerlegt.

Vorhersagen mit dem Diagramm treffen:

f) Für ein Kleinkinderspielzeug soll eine Holzfigur mit der Masse 212 g an der Feder befestigt werden. Wie stark wird sich die Feder dadurch verlängern?
g) Welche Masse darf die angehängte Figur maximal haben, wenn sich die Feder höchstens um 2,5 cm verlängern soll?

Station 3: Beladen eines „Schiffs“

Wenn ein Schiff im Hafen beladen wird, ist die Kapitänin/ der Kapitän dafür verantwortlich, dass die Ladung gleichmäßig verteilt wird und das Schiff keine Schlagseite bekommt. Gleichzeitig muss sie/ er auch darauf achten, dass das Schiff nicht zu tief ins Wasser eintaucht. Sonst könnte das Schiff später an Stellen mit geringer Wassertiefe auf Grund laufen. Wie die Eintauchtiefe von der eingeladenen Masse abhängt, sollt ihr bei einem Modell-„schiff“ genauer untersuchen.

a) Notiert Hypothesen zum Zusammenhang zwischen eingeladener Masse und der Eintauchtiefe.
b) Klärt zuerst, wie ihr die Masse der eingeladenen Kieselsteine bestimmen wollt und wie ihr die Eintauchtiefe des Schiffs möglichst **genau** messen könnt.
Hinweis: Arbeitet vorsichtig, ohne Wasser zu verspritzen oder zu verschütten. Trocknet alles, was versehentlich nass wird sofort mit einem Papiertuch ab.
c) Messt für mindestens acht verschiedene zugeladene Massen die Eintauchtiefe. Messt jede Eintauchtiefe dreifach und verwendet dann denn Mittelwert. Tragt die Wertepaare in eine Tabelle ein.
d) Stellt eure Ergebnisse in einem Diagramm dar und zeichnet anschließend eine Ausgleichskurve ein.
e) Bewertete eure anfangs notierten Hypothesen: Notiert zu jeder Hypothese, ob das Experiment die Hypothese bestätigt oder widerlegt.

Vorhersagen mit dem Diagramm treffen:

f) Das Schiff soll mit insgesamt 375 g beladen werden. Ist das möglich, wenn die Wassertiefe 5 cm beträgt? Was ist in diesem Fall die minimale Wassertiefe?
g) Welche Masse darf zugeladen werden, wenn die Wassertiefe 4,5 cm beträgt?

Station 4: Durchbiegen eines Regalbretts

Wenn ein Brett in einem Regal beladen wird, biet es sich mehr oder weniger stark durch. Die Durchbiegung eines Bretts sollt ihr in diesem Experiment genauer untersuchen.

a) Notiert Hypothesen wovon die Durchbiegung abhängt und macht dazu je-desto-Aussagen.
b) Im Experiment soll nun das Brett in der Mitte mit unterschiedlichen Massen beladen werden. Klärt, wie ihr die Durchbiegung des Bretts möglichst **genau** messen könnt, und achtet darauf, dass sich außer der auf das Brett gestellten Masse im Versuch nichts ändert.
Hinweis: Belastet das Brett nur so weit, dass es nicht kaputt geht. Beendet eure Messung falls nötig und messt weitere Werte bei kleineren Massen.

c) Messt für mindestens acht verschiedene auf das Brett gestellte Massen von ca. 200 g bis ca. 3 kg die Durchbiegung. Messt jede Durchbiegung dreifach und verwendet dann denn Mittelwert. Tragt die Wertepaare in eine Tabelle ein.
d) Stellt eure Ergebnisse in einem Diagramm dar und zeichnet anschließend eine Ausgleichskurve ein.
e) Bewertete eure anfangs notierten Hypothesen: Notiert zu jeder Hypothese, ob das Experiment die Hypothese bestätigt oder widerlegt.

Vorhersagen mit dem Diagramm treffen:

f) Mit welcher Durchbiegung muss man rechnen, wenn das Brett in der Mitte mit 2,8 kg beladen wird?
g) Wie groß ist die maximal erlaubte Masse in der Mitte des Bretts, wenn die Durchbiegung kleiner als 1,5 cm sein soll?

Station 5: Entleeren eines Schwimmbads (bzw. einer Wasserflasche)

Ein Schwimmbecken muss für Reparaturarbeiten vollständig entleert werden. Dazu wird am Boden des Beckens ein Abfluss geöffnet. Bademeisterin Susanne überlegt, wie der Wasserstand und die Dauer des Auslaufens zusammen hängen. Diesen Zusammenhang sollt ihr in einem Modellversuch nun genauer untersuchen, bei dem das Schwimmbecken durch eine Wasserflasche ersetzt wird.

a) Notiert Hypothesen wie der Wasserstand und die Zeitspanne seit Beginn des Auslaufens zusammen hängen.
h) Füllt die Flasche bis zur oberen Markierung, während einer die untere Öffnung zuhält. Lasst dann das Wasser auslaufen und messt im Abstand von 10 s den Wasserstand. Dazu könnt ihr mit einem Folienstift jeweils eine Markierung auf der Flasche machen. Damit die Flasche ruhig stehen bleibt, sollte einer die Flasche festhalten, während ein anderer die Striche macht. Überlegt, wie genau ihr vorgehen wollt, und wer welche Aufgabe übernimmt. Macht mindestens einen Probedurchlauf und überlegt danach, wie ihr das Vorgehen möglicherweise verbessern könnt.
   Hinweis: Arbeitet vorsichtig, ohne Wasser zu verspritzen oder zu verschütten. Trocknet alles, was versehentlich nass wird sofort mit einem Papiertuch ab.
b) Führt die Messung mehrfach durch und tragt danach die Paare aus Zeitspanne und Wasserstand in eine Tabelle ein. Wählt dann für die Auswertung mit dem Diagramm die Messung, die am besten geklappt hat.
c) Stellt eure Ergebnisse in einem Diagramm dar und zeichnet anschließend eine Ausgleichskurve ein.
d) Bewertete eure anfangs notierten Hypothesen: Notiert zu jeder Hypothese, ob das Experiment die Hypothese bestätigt oder widerlegt.

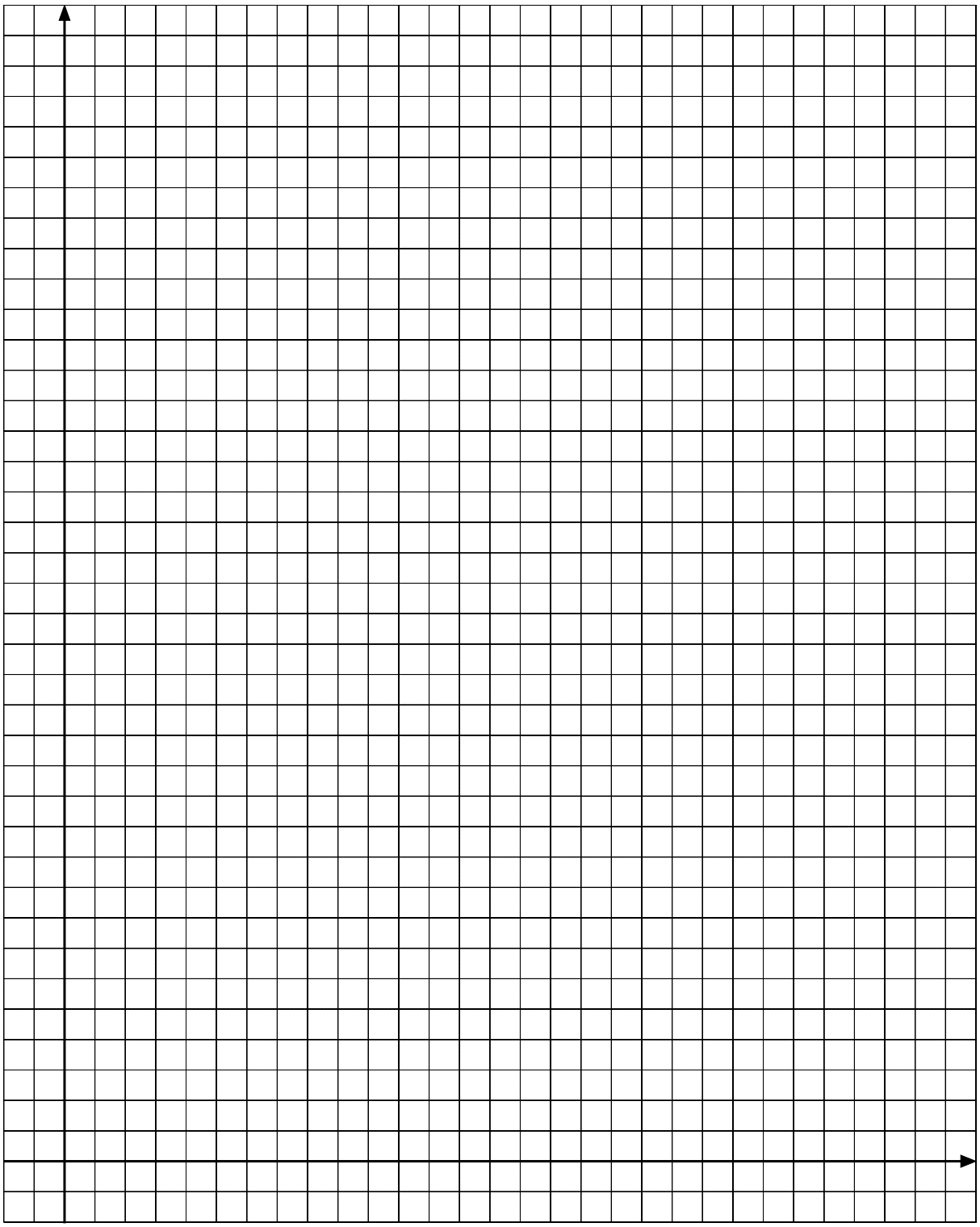
Vorhersagen mit dem Diagramm treffen:

e) Welchen Wasserstand erhält man nach 45 s, welchen nach 63 s?
f) Wie lange dauert es, bis der Wasserstand auf 8,2 cm gesunken ist?

Diagrammvorlage

Gruppe:

Experiment:



Lehrerblatt

Ziele und Voraussetzungen:

Diese Stunde ist zwei grundlegenden Kompetenzen gewidmet, die im Mathematikunterricht der Klasse 7 eine wichtige Rolle spielen. Die Streichholzboxen, deren Inhalt anfangs unbekannt ist, stellen einen anschaulichen und handlungsorientierten Weg zum **Variablenkonzept** dar.
Gleichzeitig bietet diese Stunde einen enaktiven Zugang zum **Lösen linearer Gleichungen** beziehungsweise ganz allgemein zum „Vereinfachen" von Gleichungen.
Die Stunde ist damit unabhängig vom Stand des Regelunterrichts in der Klasse 7.

Vorbereitungen für die Stunde:

Streichholzschachteln und Hölzchen finden sich im Mkid-Material für dieses Schuljahr. Jeweils knapp die Hälfte der Boxen sind mit einem roten Dreieck bzw. einem blauen Kreis zu beschriften. Es ist vielleicht geschickt, ein paar Blanko-Boxen übrig zu lassen.
Zu Demonstrationszwecken kann man Gleichungen aus Boxen und Hölzchen in der Stunde zum Beispiel unter die Dokumentenkamera legen.
Zum Legen der Anordnungen sind vorbereitete Zettel mit einem Gleichheitszeichen hilfreich.

Aufgaben mit Boxen und Hölzchen kennen lernen

Die Aufgaben 1 bis 3 auf dem Schülerblatt 1 dienen dazu, den Aufgabentyp kennen zu lernen und auf eigenen Wegen Lösungen für die Aufgaben zu finden. Hier sollen die SchülerInnen nach einer kurzen Besprechung der Regeln zunächst eigenständig nach Lösungen suchen. Es lohnt sich dabei, die Herangehensweisen der einzelnen SchülerInnen zu beobachten und eventuell einzelne Methoden oder Probleme bei der anschließenden gemeinsamen Besprechung aufzugreifen.
Die Aufgabe 3 kann auch zum Abfangen unterschiedlicher Geschwindigkeiten der SchülerInnen dienen. Selbst, wenn langsamere SchülerInnen nur Aufgabe 1 und 2 gelöst haben, kann die Besprechung erfolgen.

Zu Aufgabe 2:

Hier sollte deutlich werden, dass es unendlich viele Lösungen gibt: zu jeder Zahl von Hölzchen in den roten Dreiecks-Boxen finden man eine passende Hölzchenzahl in den blauen Kreis-Boxen. Diese Lösungen werden übersichtlich in einer Tabelle dargestellt. Für Aufgabe 2 zum Beispiel:

Hölzchen in ● (x)	1	2	3	4	5	6
Hölzchen in ▲ (y)	3	5	7	9	11	13

Bei der späteren Besprechung eignen sich die Aufgaben 1 und 2 dazu, zu thematisieren, dass man häufig die Anordnungen vereinfachen kann, indem man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleiche Änderungen vornimmt. Das bedeutet gleich viele Hölzchen (oder gleichviele gleichartige Boxen) wegzunehmen oder auf beiden Seiten alles zu halbiert. Hier ist wichtig zu betonen, dass bei letzterem sowohl die Zahl der Hölzchen, der Dreiecks-Boxen sowie der Kreis-Boxen wird halbiert. Damit dieser propädeutische Zugang zum Umformen von Gleichungen möglichst nutzbringend ist, empfiehlt es sich ausreichend zu betonen, dass stets auf beiden Seiten das gleiche getan wird.

Zu Aufgabe 3:

Bei Aufgabe 3a) ergeben sich nur für gerade Anzahlen in den Kreis-Boxen ganzzahlige Lösungen.

Hölzchen in ● (x)	1	2	3	4	5	6
Hölzchen in ▲ (y)	-	2	-	5	-	8

Bei selbsterfundenen Aufgaben kann die Problematik nicht ganzzahliger Werte auch auftreten. Daher wird dies in Aufgaben 3c) für die schnellen SchülerInnen zum expliziten Thema.
Bei der Besprechung sollte das Problem halber/ gedrittelter/ … Hölzchen kurz angesprochen und vereinbart werden, dass heute bei den Lösungen nur ganze Hölzchen erlaubt sind.

Übersetzen zwischen Boxenanordnungen und Gleichungen:

Beim Übersetzen zwischen Boxen-Anordnungen und Gleichungen werden die Variablen x und y benutzt. Es muss dabei im Unterricht aber nicht von „Variablen“ gesprochen werden. Um ein verbreitetes Missverständnis bei den SchülerInnen zu vermeiden, sollte hier deutlich betont werden, dass **x** für die **Anzahl der Hölzchen in den Kreis-Boxen** steht – und nicht für die Kreis-Boxen. Entsprechend steht **y** für die **Anzahl der Hölzchen in den Dreiecks-Boxen**. Diese Zuordnung sollte fest vereinbart und im Verlauf der Stunde nicht vertauscht werden.
Die bereits bearbeiteten Beispiele in Aufgabe 1 und 2 bieten sich an, um die Übersetzung von Boxen-Anordnung in Gleichungen an der Tafel zu besprechen.

Die folgenden Aufgaben üben das „Übersetzen“ zwischen Boxenanordnungen und Gleichungen und das Vereinfachen bzw. Lösen von Gleichungen.

Lösungen zu den Aufgaben 4 und 5:

Aufgabe 4: 1-D 2-A 3-B

Aufgabe 5:

a) $2 \cdot y = x$

x	1	2	3	4	5	6
y	-	1	-	2	-	3

b) $y = 2 \cdot x + 1$

x	1	2	3	4	5	6
y	3	5	7	9	11	13

c) $y + 1 = 2 \cdot x$

x	1	2	3	4	5	6
y	1	3	5	7	9	11

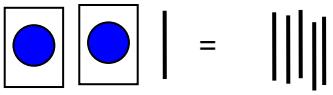
Weitere Aufgaben, Erweiterungsmöglichkeiten:

Diese Stunde kann einfach durch weitere Aufgaben ausgebaut werden und die Streichholzschachtel-methode könnte auch in einer weiteren Mkid-Stunde erneut aufgegriffen werden. Das ist vielleicht interessant, wenn Bedarf besteht, das Variablenkonzept weiter zu üben, oder im Zusammenhang mit linearen Funktionen.

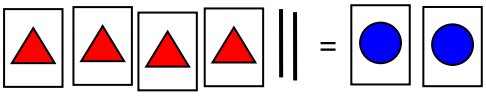
Regeln für Streichholzboxen und Hölzchen

- Es gibt zwei Sorten von Boxen: solche mit rotem Dreieck und solche mit blauem Kreis.
- In Boxen der gleichen Sorte sind jeweils gleich viele Hölzchen enthalten.
- Auf jeder Seite des Gleichheitszeichens sind gleich viele Hölzchen.

1.) Lege aus leeren Boxen und aus Hölzchen diese Anordnung.
Fülle dann die Boxen entsprechend der Regeln.



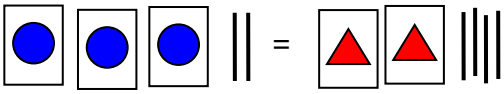
2.) Lege aus leeren Boxen und Hölzchen die folgende Anordnung.



a) Wie viele Hölzchen können in den Dreiecks-Boxen und den Kreis-Boxen jeweils sein?
Es gibt verschiedene Möglichkeiten, versuche mehrere zu finden.

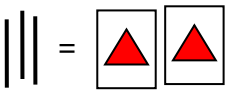
b) Versuche zur beschreiben, wie man alle Möglichkeiten erhalten kann.

3a) Wie viele Hölzchen können nun in den Dreiecks-Boxen und den Kreis-Boxen sein?

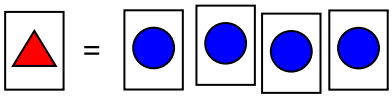


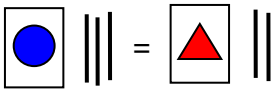
b) Stellt euch selbst Aufgaben und versucht Lösungen zu finden.

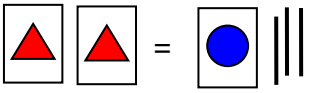
c) Was ist das Problem bei dieser Aufgabe?
Sind ähnliche Probleme auch bei euren selbst gestellten Aufgaben aufgetreten?



4.) Ordne den folgenden Anordnungen die passenden Gleichungen zu. Dabei steht in den Gleichungen **x** für die **Anzahl der Hölzchen in den Kreis-Boxen** und **y** für die **Anzahl in den Dreiecks-Boxen**.

(1) 

(2) 

(3) 

(A) $x + 3 = y + 2$

(B) $2 \cdot y = x + 3$

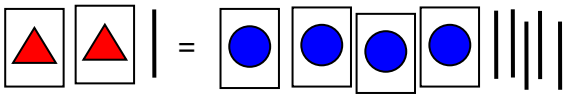
(C) $y + 2 = 3 \cdot x$

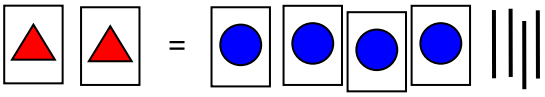
(D) $y = 4 \cdot x$

Zeichne zu der übrig gebliebenen Gleichung die Anordnung.

5.) Zeichne zu der Gleichung die Boxen-Anordnung. Lege die Boxen-Anordnung und vereinfache sie, falls das möglich ist.
Suche dann Lösungen zum Befüllen der Boxen mit Hölzchen und notiere die Lösungen in einer Tabelle.

Beispiel: $2 \cdot y + 1 = 4 \cdot x + 5$

Gleichung zeichnen (und legen) 

Vereinfachung 1:
auf beiden Seiten 1 Hölzchen wegnehmen 

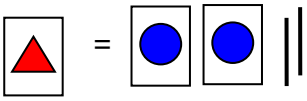
Vereinfachung 2:
Anzahl auf beiden Seiten halbieren 

Tabelle mit Lösungen:

x	1	2	3	4	5	6	…
y	4	6	8	10	12	14	…

a) $4 \cdot y = 2 \cdot x$

x	1	2	3	4	5	6	…
y							…

b) $y + 3 = 2 \cdot x + 4$

x	1	2	3	4	5	6	…
y							…

c) $2 \cdot y + 6 = 4 \cdot x + 4$

x	1	2	3	4	5	6	…
y							…

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit UG … Unterrichtsgespräch
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Einstieg UG 5 Min.	L zeigt eine Aufgabe (z.B. Aufgabe 2a) mit Streichholzboxen und Hölzchen und erklärt die Regeln.	Tafel oder Dokumentenkamera, Boxen und Hölzchen
2. Entdecken, Üben PA 15 Min.	SuS bearbeiten die Aufgaben 1 bis 3 auf dem Schülerblatt 1 L lobt, beobachtet und gibt ggf. wohldosierte Hilfen	Schülerblatt 1, Boxen und Hölzchen
3. Erarbeitung UG 10 Min.	Besprechen der Lösungen … L führt bei Aufgabe 2 eine Tabelle ein, um die Lösungen übersichtlich darzustellen. Vereinfachen: L legt die Anordnungen aus den Aufgaben 1 und 2 und fragt, ob man diese „Gleichungen“ vereinfachen kann. L lenkt – falls nötig – auf das Entfernen von Hölzchen oder das „Halbieren“. In Gleichungen übersetzen: L führt die Variablen x bzw. y als Abkürzung für Anzahlen von Hölzchen in den Boxen ein und übersetzt mit den SuS die Anordnungen aus Aufgaben 1 bis 3 in Gleichungen. L ergänzt in den Tabellen an der Tafel x und y.	Tafel u. Heft, Boxen und Hölzchen
4. Üben EA/PA 10 Min.	SuS bearbeiten Aufgaben 4 und 5 auf dem Schülerblatt 2 L lobt, beobachtet und gibt Hilfen	Schülerblatt 2 Boxen und Hölzchen
5. Besprechung und Reflexion UG 5 Min.	Besprechung der Lösungen Reflexion: L: *Welche Kniffe haben heute geholfen, Lösungen zu finden?* SuS: *Vereinfachen der Gleichungen, (geschicktes) Ausprobieren*	Tafel, Boxen und Hölzchen

Lehrerblatt

In dieser Stunde arbeiten wir an zwei grundlegenden Kompetenzen, die in Klasse 7 im Mathematik-Unterricht eine wichtige Rolle spielen. Die Streichholzboxen, deren Inhalt anfangs unbekannt ist, stellen einen Weg dar, das Variablenkonzept ein Stück weit anschaulich und „begreifbar“ zu machen. Gleichzeitig bietet diese Stunde einen enaktiven Zugang zum Lösen linearer Gleichungen beziehungsweise ganz allgemein zum „Vereinfachen“ von Gleichungen.

Vorbereitungen für die Stunde:
Streichholzschachteln und Hölzchen finden Sie im Mkid Material für dieses Schuljahr. Beschriften Sie jeweils knapp die Hälfte mit einem roten Dreieck bzw. einem blauen Kreis. Es ist vielleicht geschickt ein paar Blanko-Boxen übrig zu lassen.
Zu Demonstrationszwecken können Sie Gleichungen aus Boxen und Hölzchen in der Stunde unter die Dokumentenkamera legen. Oder Sie kaufen im Schreibwarenladen Magnetklebestreifen (beim Mkid-Koordinator Ihrer Schule abrechnen) und kleben sie auf die Rückseite der Boxen. Dann können die Boxen an die Tafel geheftet werden.
Bereiten Sie für jede Gruppe zum Legen der Anordnungen einen Zettel mit Gleichheitszeichen vor – am besten auf etwas dickerem Papier.

Aufgaben mit Boxen und Hölzchen kennen lernen
Die Aufgaben 1 bis 3 auf dem Schülerblatt dienen dazu, den Aufgabentyp kennen zu lernen und auf eigenen Wegen Lösungen für die Aufgaben zu finden. Hier sollen die SchülerInnen nach einer kurzen Besprechung der Regeln zunächst eigenständig nach Lösungen suchen. Es lohnt sich dabei, die Herangehensweisen der einzelnen SchülerInnen zu beobachten und eventuell einzelne Methoden oder Probleme bei der anschließenden gemeinsamen Besprechung aufzugreifen.
Die Aufgabe 3 kann auch zum Abfangen unterschiedlicher Geschwindigkeiten der SchülerInnen dienen. Selbst, wenn langsamere SchülerInnen nur Aufgabe 1 und 2 gelöst haben, kann die Besprechung erfolgen.

Zu Aufgabe 2:
Hier sollte deutlich werden, dass es unendlich viele Lösungen gibt: zu jeder Zahl von Hölzchen in den roten Dreiecks-Boxen finden man eine passende Hölzchenzahl in den blauen Kreis-Boxen. Diese Lösungen werden übersichtlich in einer Tabelle dargestellt. Für Aufgabe 2 zum Beispiel:

Hölzchen in ● (x)	1	2	3	4	5	6
Hölzchen in ▲ (y)	3	5	7	9	11	13

Bei der späteren Besprechung eignen sich die Aufgaben 1 und 2 dazu, zu thematisieren, dass man häufig die Anordnungen vereinfachen kann, indem man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleiche Änderungen vornimmt. Das bedeutet gleich viele Hölzchen (oder gleichviele gleichartige Boxen) wegzunehmen oder auf beiden Seiten alles zu halbiert. Hier ist wichtig zu betonen, dass bei letzterem sowohl die Zahl der Hölzchen, der Dreiecks-Boxen sowie der Kreis-Boxen wird halbiert. Damit dieser propädeutischer Zugang zum Umformen von Gleichungen möglichst nutzbringend ist, empfiehlt es sich ausreichend zu betonen, dass stets auf beiden Seiten das gleiche getan wird.

Zu Aufgabe 3:
Bei Aufgabe 3a) ergeben sich nur für gerade Anzahlen in den Kreis-Boxen ganzzahlige Lösungen.

Hölzchen in ● (x)	1	2	3	4	5	6
Hölzchen in ▲ (y)	-	2	-	5	-	8

Bei selbsterfundenen Aufgaben kann die Problematik nicht ganzzahliger Werte auch auftreten. Daher wird dies in Aufgaben 3c) für die schnellen SchülerInnen zum expliziten Thema.

Bei der Besprechung sollte das Problem halber/ gedrittelter/ … Hölzchen kurz angesprochen und vereinbart werden, dass heute bei den Lösungen nur ganze Hölzchen erlaubt sind.

Übersetzen zwischen Boxenanordnungen und Gleichungen:
Beim Übersetzen zwischen Boxen-Anordnungen und Gleichungen werden die Variablen x und y benutzt. Es muss dabei im Unterricht aber nicht von „Variablen" gesprochen werden. Um ein verbreitetes Missverständnis bei den SchülerInnen zu vermeiden, sollte hier deutlich betont werden, dass **x** für die **Zahl der Hölzchen in den Kreis-Boxen** steht – und nicht für die Kreis-Boxen. Entsprechend steht **y** für die **Zahl der Hölzchen in den Dreiecks-Boxen**. Diese Zuordnung sollte fest vereinbart und im Verlauf der Stunde nicht vertauscht werden.
Die bereits bearbeiteten Beispiele in Aufgabe 1 und 2 bieten sich an, um die Übersetzung von Boxen-Anordnung in Gleichungen an der Tafel zu besprechen.

Die folgenden Aufgaben üben das „Übersetzen" zwischen Boxenanordnungen und Gleichungen und das Vereinfachen/ Lösen von Gleichungen.

Lösungen zu Aufgabe 4, 5 und 6:
Aufgabe 4: 1-D 2-A 3-B
Aufgabe 5:
a) $2 \cdot y = x$

x	1	2	3	4	5	6
y	-	1	-	2	-	3

b) $y = 2 \cdot x + 1$

x	1	2	3	4	5	6
y	3	5	7	9	11	13

c) $y + 1 = 2 \cdot x$

x	1	2	3	4	5	6
y	1	3	5	7	9	11

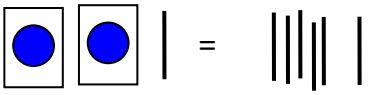
Aufgabe 6:
$x = 2,\ y = 3$

Weitere Aufgaben, Erweiterungsmöglichkeiten:
Diese Stunde kann einfach durch weitere Aufgaben ausgebaut werden und die Streichholzschachtel-methode könnte auch in einer weiteren Mkid-Stunde erneut aufgegriffen werden. Das ist vielleicht interessant, wenn Bedarf besteht, das Variablenkonzept weiter zu üben, oder im Zusammenhang mit linearen Funktionen. Aufgaben mit Streichholzschachteln können auch spontan am Stundenende an der Tafel gestellt werden und in verschiedene Mathematik-Spiele integriert werden.

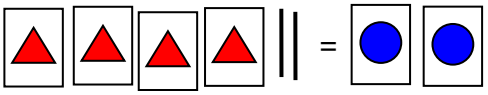
Regeln für Streichholzboxen und Hölzchen

- Es gibt zwei Sorten von Boxen: solche mit rotem Dreieck und solche mit blauem Kreis.
- In Boxen der gleichen Sorte sind jeweils gleich viele Hölzchen enthalten.
- Auf jeder Seite des Gleichheitszeichens sind gleich viele Hölzchen.

1. Lege aus leeren Boxen und aus Hölzchen die Anordnung.
Fülle dann die Boxen entsprechend der Regeln.



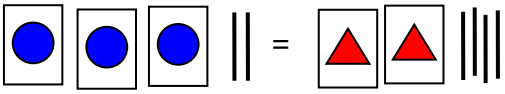
2. a) Lege aus leeren Boxen und Hölzchen die folgende Anordnung. Wie viele Hölzchen können in den Dreiecks-Boxen und den Kreis-Boxen jeweils sein?



Es gibt verschiedene Möglichkeiten, versuche mehrere zu finden.

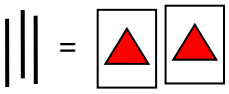
b) Versuche zur beschreiben, wie man alle Möglichkeiten erhalten kann.

3. a) Wie viele Hölzchen können nun in den Dreiecks-Boxen und den Kreis-Boxen sein?

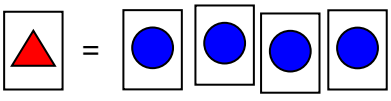


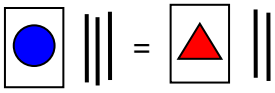
b) Stellt euch selbst Aufgaben und versucht Lösungen zu finden.

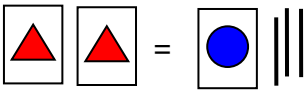
c) Was ist das Problem bei dieser Aufgabe?
Sind ähnliche Probleme auch bei euren selbst gestellten Aufgaben aufgetreten?



4. Ordne den folgenden Anordnungen die passenden Gleichungen zu. Dabei steht in den Gleichungen **x** für die **Anzahl der Hölzchen in den Kreis-Boxen** und **y** für die **Anzahl in den Dreiecks-Boxen**.

1) 

2) 

3) 

A) $x + 3 = y + 2$

B) $2 \cdot y = x + 3$

C) $y + 2 = 3 \cdot x$

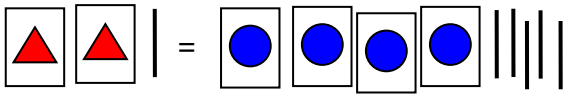
D) $y = 4 \cdot x$

Zeichne zu der übrig gebliebenen Gleichung die Anordnung.

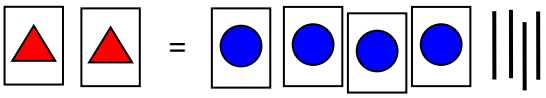
5. Zeichne zu der Gleichung die Boxen-Anordnung. Lege die Boxen-Anordnung und vereinfache sie, falls das möglich ist. Suche dann Lösungen zum Befüllen der Boxen mit Hölzchen und notiere die Lösungen in einer Tabelle.

Beispiel: $2 \cdot y + 1 = 4 \cdot x + 5$

Gleichung zeichnen (und legen)



Vereinfachung 1:
auf beiden Seiten 1 Hölzchen wegnehmen



Vereinfachung 2:
Anzahl auf beiden Seiten halbieren

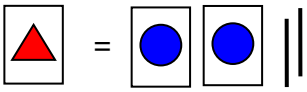


Tabelle mit Lösungen:

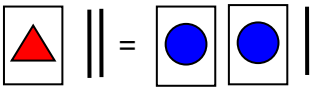
x	1	2	3	4	5	6	…
y	4	6	8	10	12	14	…

a) $4 \cdot y = 2 \cdot x$

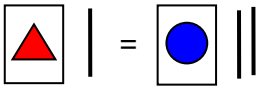
b) $y + 3 = 2 \cdot x + 4$

c) $2 \cdot y + 6 = 4 \cdot x + 4$

6. Diesmal sollen zwei Gleichungen mit Boxen gleichzeitig erfüllt sein. Legt die Situation und findet heraus, wie viele Hölzchen in die Kreis-Boxen beziehungsweise in die Dreiecks-Boxen gehören.



und gleichzeitig



7. Erfindet selbst Aufgaben und stellt sie euch gegenseitig.

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit UG … Unterrichtsgespräch
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg UG 5 min	L zeigt eine Aufgabe (z.B. Aufgabe 2a) mit Streichholzboxen und Hölzchen und erklärt die Regeln. Die SuS werden aufgefordert, in Aufgabe 1 bis 3 versuchen herauszufinden, wie viele Hölzchen jeweils in den Boxen sein können.	Tafel oder Dokumenten-kamera, Boxen und Hölzchen
2. Entdecken, Üben PA 15 min	SuS bearbeiten Aufgaben 1 bis 3 L lobt, beobachtet und gibt ggf. wohldosierte Hilfen	Schülerblatt 1, Boxen und Hölzchen
3. Erarbeitung UG 15 min	Besprechen der Lösungen … L führt bei Aufg. 2 eine Tabelle ein, um die Lösungen übersichtlich darzustellen. Vereinfachen: L legt die Anordnungen aus Aufg. 1 und 2 und fragt, ob man diese „Gleichungen“ vereinfachen kann. L lenkt falls nötig auf das Entfernen von Hölzchen oder das „Halbieren“. In Gleichungen übersetzen: L führt die Variablen x bzw. y als Abkürzung für Anzahlen von Hölzchen in den Boxen ein und übersetzt mit den SuS die Anordnungen aus Aufgaben 1 bis 3 in Gleichungen. L ergänzt in den Tabellen an der Tafel x und y.	Tafel u. Heft, Boxen und Hölzchen
4. Üben EA/PA 15 min	SuS bearbeiten Aufgaben 4 bis 7 L lobt, beobachtet und gibt Hilfen	Schülerblätter 1 und 2 Boxen und Hölzchen
5. Besprechung und Reflexion UG 10 min	Besprechung der Lösungen Reflexion: L: Was war bei Aufgaben 1 und 6 anders als bei den anderen Aufgaben? → Anzahl der Lösungen L: Welche Kniffe haben heute geholfen, Lösungen zu finden? → Vereinfachen der Gleichungen, (geschicktes) Auspro-bieren	Tafel, Boxen und Hölzchen

Didaktischer Kommentar

Für dieses Thema sollte unbedingt der Satz des Thales im Unterricht schon behandelt sein. Am besten erfragt man das bei den zuständigen Lehrkräften.
Die Vorgehensweise hängt stark von der Lerngruppe ab.
Es geht um eine Verallgemeinerung des Satzes von Thales und des zugehörigen Umkehrsatzes. Letztere wird mit dem Geodreieck zwischen den Reißnägeln entdeckt. Ob man auf die beiden Richtungen der Aussage eingeht, muss individuell entschieden werden. Wichtig ist jedoch, dass man erkennt, dass sich der Satz des Thales für Sehnen statt Durchmesser verallgemeinern lässt. Man kann zusätzlich noch die SuS über einer Sehne verschiedene Dreiecke zeichnen lassen und den Winkel an der Spitze messen lassen.

Den Beweis muss man nicht unbedingt formal aufschreiben. Beim Bestimmen der Winkel ergibt sich automatisch der Satz vom Mittelpunktswinkel und als Folge der Satz vom Umfangswinkel. Als didaktische Reduktion genügt es vollkommen, wenn die SuS einzelne Schritte des Beweises formulieren können. Wichtig ist hier wieder das Lob!

Die abschließenden Aufgaben sollten je nach Leistungsfähigkeit der Lerngruppe bzw. auch differenzierend innerhalb der Lerngruppe behandelt werden. Die Aufgabe 2 wird kaum jemand mit dem Umfangswinkelsatz lösen. Sie geht auch (mühsamer) mit der Winkelsumme. Also sollte ein Tipp bei Bedarf eingesetzt werden.

Insgesamt benötigt man vermutlich zwei Nachmittage, wenn man alles ausführlich bearbeiten möchte. Man kann aber beliebig kürzen und so auch mit einem Nachmittag auskommen.

Für die SuS ist ein enger Bezug zum Unterricht erkennbar.

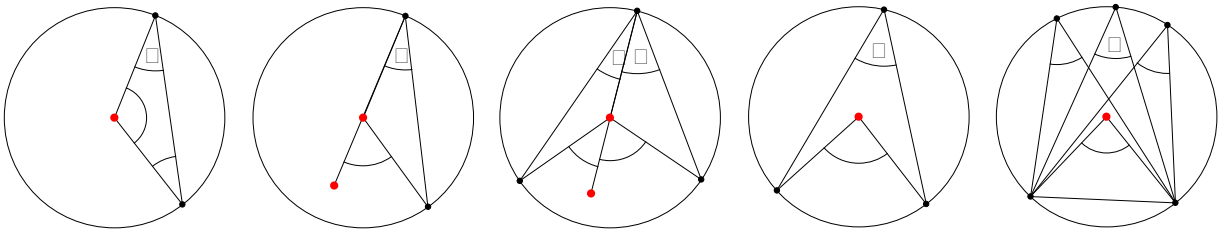
Rund um den Satz des Thales

Stecke zwei Reißnägel ungefähr 4 cm voneinander entfernt in eine Kartonunterlage und lege dein Geodreieck mit den Schenkeln des rechten Winkels an die Nägel. Markiere in verschiedenen Stellungen den Punkt an der Spitze. Auf welcher Linie liegen alle markierten Punkte? Kennst du den dazugehörenden Satz? Wiederhole nun das Ganze mit dem spitzen Winkel des Geodreiecks. Wie unterscheidet sich das Ergebnis vom vorigen Versuch? Formuliere dazu einen mathematischen Satz.	

Satz vom Umfangswinkel:

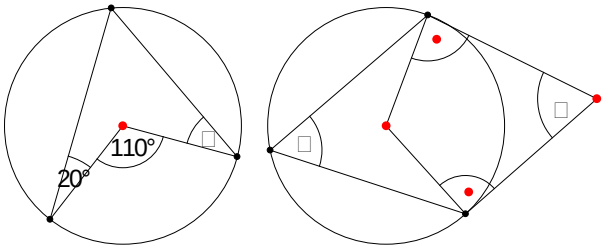
Beweis des Satzes

Wenn du den Satz begründen möchtest, dann sind folgende Zeichnungen hilfreich. Zeichne sie der Reihe nach ab und schreibe in die Winkelfelder die Winkel hinein.



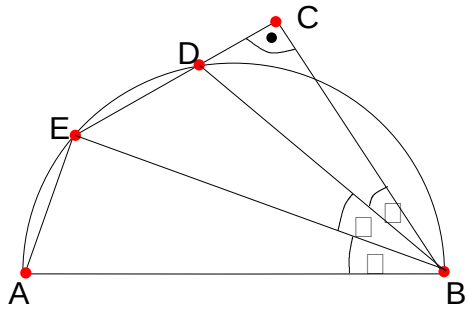
Aufg. 1

Bestimme α.



Aufg. 2 LWM 1988

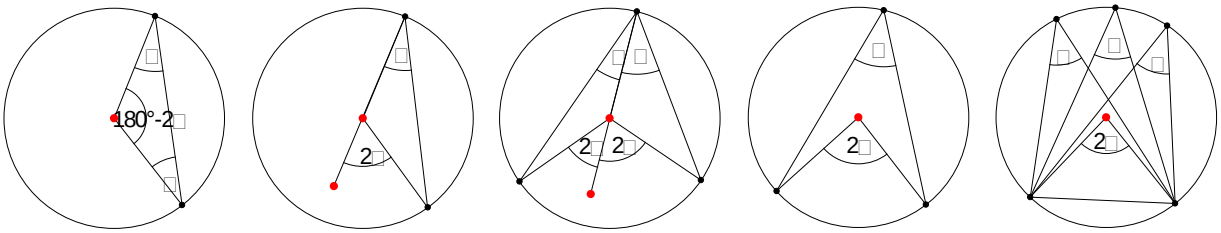
In der Figur gilt AE = ED und α = 20°. Der Punkt D liegt auf EC. Berechne β und γ.



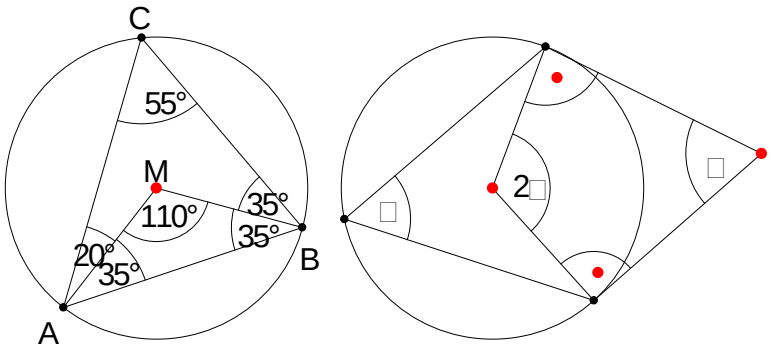
Satz vom Umfangswinkel:
Wenn man Dreiecke über einer Sehne eines Kreises mit dem dritten Punkt auf dem Kreis zeichnet, dann haben die Dreiecke über demselben Kreisbogen einen gleich großen Winkel an der Spitze.
Umkehrung: Die Spitzen aller Dreiecke mit der gleichen Grundseite und gleich großen der Grundseite gegenüberliegenden Winkeln liegen auf einem Kreisbogen über der Grundseite (als Sehne).

(Die Formulierung des Satzes bzw. seiner Umkehrung muss nicht 100% exakt sein!)

Beweis:
(bei den Bildern handelt es sich nicht um einen exakten Beweis, sondern eher um eine Argumentation)

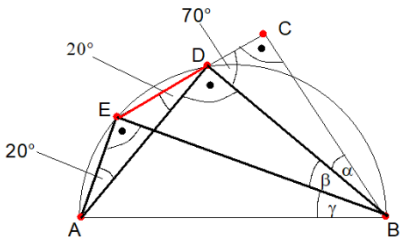


Aufg. 1



Linke Figur:
Aus dem Mittelpunktswinkel 110° erhält man den Winkel bei C 55°. Im gleichschenkligen Dreieck AMB erhält man mit Basiswinkelsatz und Winkelsumme die 35° Winkel und mit der Winkelsumme in ABC $\alpha = 35°$.
Alternativ kann man auch die gleichschenkligen Dreiecke AMB und BMC verwenden.

Rechte Figur: Der Mittelpunktswinkel ist 2α. Mit der Winkelsumme im Viereck erhält man $2\alpha = 180°$ und damit $\alpha = 60°$.



Aufg.2
AEB und ADB sind rechtwinklige Dreiecke (Satz des Thales). Winkelsumme in DBC ergibt 70°-Winkel. Gestreckter Winkel bei D ergibt 20°-Winkel.
Basiswinkelsatz in ADE ergibt zweiten 20°-Winkel. Nun kann man mit Winkelsummen weiterrechnen, aber viel eleganter mit dem Umfangswinkel argumentieren. EDA und EDB haben den gleichen Umfangswinkel über der Sehne ED, also $\beta = 20°$.
Ebenso haben AEB und AED den gleichen Umfangswinkel über der Sehne AE, also $\gamma = 20°$.

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf 5. Phase kurzhalten oder weglassen.

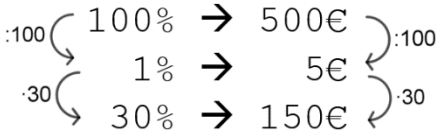
Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Einstieg Arbeitsblatt PA 5 Min.	SuS „entdecken“ (wiederholen) den Satz des Thales	Karton Reißnägel Geodreieck Schülerblatt
2. Ergebnis-sicherung und Verallgemeinerung FEU 5 Min.	Sicherung des Ergebnisses an der Tafel. Evtl. die Richtungen der Aussagen besprechen	Tafel
3. Erarbeitung PA 5 Min.	SuS „entdecken“ den Satz vom Umfangswinkel	Karton Reißnägel Geodreieck Schülerblatt
4. Ergebnis-sicherung FEU 10 Min.	Sicherung des Ergebnisses an der Tafel. Zeichnen von verschiedenen Dreiecken über derselben Sehne.	Tafel / evtl. Heft
5. Erarbeitung PA oder Stillarbeit 15 Min.	Beweis durch Berechnen der Winkel	Schülerblatt
6. Ergebnis-sicherung FEU 10 Min.	Zusammenfassung der Beweisschritte	Folie
7. Anwendung (ab hier optional, evtl. 2 Stunde) PA 10 – 15 Min	Aufgabe 1	Schülerblatt
8. Ergebnis-sicherung FEU 5 Min	Vorstellung der Lösung	Folie
9. Vertiefung PA 15 Min	Aufgabe 2	Schülerblatt
10. Ergebnis-sicherung FEU 10 Min.	Vorstellung der Lösung (evtl. mit Varianten)	Folie

Lehrerblatt

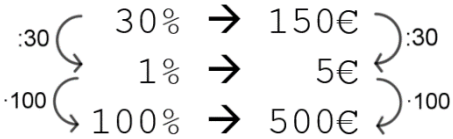
Voraussetzung ist, dass die Unterrichtseinheit *Prozentrechnung* im Regelunterricht behandelt wurde, neben der Umwandlung von Bruch- bzw. Dezimalschreibweise in Prozentschreibweise bei Anteilen insbesondere die Lösung der **drei Grundaufgaben**:
1. Grundaufgabe: Berechnung des Prozentsatzes (das ist ein Anteil!) mithilfe der *Division Prozentwert geteilt durch Grundwert*
2. Grundaufgabe: Berechnung des Prozentwertes aus dem Prozentsatz und dem Grundwert mithilfe eines *Dreisatzes*: Von der Vielheit zur Einheit und dann zur – anderen – Vielheit.
3. Grundaufgabe: Berechnung des Grundwertes aus dem Prozentsatz und dem Prozentwert mithilfe eines *Dreisatzes*: Von der Vielheit zur Einheit und dann zur – anderen – Vielheit.

Die drei Grundaufgaben am Beispiel:

- **1. Grundaufgabe – Prozentsatz gesucht:**
  Wie viel Prozent sind 150 € von 500 €?
  Lösung: 150/500 = 3/10 = 0,3 = 30%
- **2. Grundaufgabe – Prozentwert gesucht:**
  Wie viel sind 30% von 500 €?
  Lösung: 150 €; mithilfe einer Tabelle bzw. von drei Zeilen und beschrifteten Pfeilen („Pausbacken“) links und rechts außen, vgl. Abbildung rechts



- **3. Grundaufgabe – Grundwert gesucht:**
  30% eines Geldbetrages sind 150 €. Wie groß ist der Geldbetrag?
  Lösung: 500 €; mithilfe einer Tabelle bzw. von drei Zeilen und beschrifteten Pfeilen („Pausbacken“) links und rechts außen, vgl. Abbildung rechts



Didaktische Überlegungen:

Unterrichtserfahrungen belegen, dass für Schüler, die nicht der oberen Leistungsgruppe angehören, die **Anwendung des Dreisatzes** bei den Grundaufgaben 2 und 3 angezeigt ist. Dieser erscheint gegenüber einer Anwendung der Formel *Prozentwert = Grundwert mal Prozentsatz* ggf. mit der entsprechenden Umstellung zwar umständlich, dafür kann der Schüler jeden Dreisatz-Schritt inhaltlich deuten. Im Hinblick auf die dauerhafte Verfügbarkeit der Lösungsstrategie kann man deshalb sagen „Die Formel vergeht, der Dreisatz besteht.“
Beim Berechnen des Prozentsatzes verzichtet man allerdings auf den Dreisatz und vertraut auf die bekannte Anwendung der Berechnung von Anteilen (später auch: relative Häufigkeiten). Dies hat einen entscheidenden Vorteil: **Bei der Dreisatzanwendung stehen die die Prozentsätze immer links, die Größen immer rechts**.
Weiterführende Überlegungen wie z.B. die Erhöhung eines Wertes um p% als Multiplikation mit 1+p% im Hinblick auf die Zinseszinsformel werden hier nicht thematisiert.
Desgleichen wird die Problematik des Begriffs *Prozentpunkte* nicht thematisiert.
Am Beispiel: Erhöht sich ein Anteil von 40% auf 50%, so erhöht er sich um 25% (relative Änderung) oder um 10 Prozentpunkte (absolute Änderung).

Schülerblätter:

- Schülerblatt 1: Erarbeitung der Struktur des Themas Prozentrechnung, Lückentext
- Schülerblatt 2: Die drei Grundaufgaben schriftlich rechnen – ohne Taschenrechner!
- Schülerblatt 3: Kopfrechnen mit den Anteilen zu einfachen Prozentsätzen

Struktur

Am Beispiel der Prozentrechnung soll vor einem spielerischen Üben (Arbeitsblätter mit Lösungswort ☺) zunächst exemplarisch erarbeitet werden, wie man bei der **Strukturierung*** **eines mathematischen Sachverhaltes** vorgehen kann – **4 Schritte**, s.u.

* Auf dem Schülerblatt 1: „Erfassung der Prozentrechnung in 5 Schritten“

Ein Transfer in außermathematische Gebiete ist nicht ausgeschlossen.

1. Worum es geht:

Es werden Anteile von einer Größe betrachtet.
„Prozent“ heißt „Hundertstel“, z.B. „30%“ bedeutet also „30 Hundertstel“

2. Begriffe:

Prozentwert, Grundwert, Prozentsatz

3. Zusammenhänge / Grundaufgaben:

Prozentsatz = Prozentwert geteilt durch Grundwert (1. Grundaufgabe)
Dreisatz mit drei Zeilen (2. und 3. Grundaufgabe)

100% → Grundwert	Prozentsatz → Prozentwert
1% → ……..	1% → …….. (ggf. ein anderer „günstiger“ Prozentsatz)
Prozentsatz → Prozentwert	100% → Grundwert

4. Schwierigkeiten:

- **Identifikation des Grundwertes**
  Tipp: Wie viel % sind 3 € von 4 €? Wie viel % sind 5 € von 4 €? Das Wörtchen „von“ deutet auf den Grundwert.
  Tipp: Wie viel % sind 3 € weniger als 4 €? Wie viel % sind 5 € mehr als 4 €?
  Das Wörtchen „als“ deutet bei Veränderungen auf den Grundwert.
  Denkfalle: die Erhöhung eines Wertes um p% und die anschließende Verringerung des Ergebnisses um p% führt nicht zum Ausgangswert!
  Beispiel: Aus 100 € werden bei einer Erhöhung um 50% dann 150 €, bei einer Verringerung dieser 150 € um wieder 50% erhält man nur noch 75 € und eben nicht 100 €.
- **Zuordnung Prozentwert zum richtigen Prozentsatz**
  Denkfalle in folgendem Beispiel: Der Preis eines Mantels wurde im Schlussverkauf um 35% reduziert. Er kostet jetzt nur noch 130 €. Wie viel € kostete der Mantel ursprünglich?
  Der Ansatz „35% → 130 €“ ist falsch, „65% → 130 €“ ist richtig, der Mantel kostet noch 65% des ursprünglichen Preises.
- Die **Regel** „Von zwei gegebenen Werten ist der kleinere immer der Prozentwert, der größere der Grundwert“ **versagt** bei Prozentsätzen, die größer als 100% sind.
- ggf. rechentechnischer Art u.a.

Erfassung der Prozentrechnung in 4 Schritten

Schritt:	Beispiel:	Allgemein:
1. Worum es geht	Schlussverkauf: 30% Rabatt auf einen Fernseher für 500 €	Anteile von einer Größe; „Prozent“ heißt „ ____ “, z.B. „30%“ bedeutet also „ ____ “
2. Begriffe	30% … ____ 150 € … ____ 500 € … ____	____ = ____ ____ = ____ ____ = ____
3. Zusammenhänge/ Grundaufgaben	Berechne den Rabatt. 100% → 500 € 1% → ____ € 30 % → ____ €	Dreisatz 100% → ____ 1% → … ____ → ____
	30% von ?? € sind 150 € ____ → ____ ____ → ____ ____ → ____	Dreisatz ____ → ____ ____ → ____ ____ → ____
	Wie viel % sind 150 € von 500 €? ____	
4. Schwierigkeiten		

Erfassung der Prozentrechnung in 4 Schritten

Schritt:	Beispiel:	Allgemein:
1. Worum es geht	Schlussverkauf: 30% Rabatt auf einen Fernseher für 500 €	Anteile von einer Größe; „Prozent“ heißt „Hundertstel“, z.B. „30%“ bedeutet also „30 Hundertstel“
2. Begriffe	30% … Prozentsatz 150 € … Prozentwert 500 € … Grundwert	Prozentsatz = Anteil Prozentwert = wie viel das ist Grundwert = alles (= 100%)
3. Zusammenhänge/ Grundaufgaben	Berechne den Rabatt. 100% → 500 € *<Pfeile “ :100“>* 1% → 5 € *<Pfeile “ ·30“>* 30 % → 150 € *vgl. Lehrerblatt*	Dreisatz 100% → Grundwert 1% → … Prozentsatz → Prozentwert
	30% von ?? € sind 150 € 30% → 150 € *<Pfeile “:30“>* 1% → 5 € *<Pfeile “ ·100“>* 100 % → 500 € *vgl. Lehrerblatt*	Dreisatz … % → Prozentwert 1% → ….. 100% → Grundwert
	Wie viel % sind 150 € von 500 €? $\frac{150}{500} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\%$	Prozentsatz = $\frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}}$
4. Schwierigkeiten	Wie erkennt man den Grundwert?	In Texten z.B. nach „von“ oder „als“.
	<ggf. weitere>	

Berechne und **kringle** die richtige Antwort ein. Wenn du die zugehörigen Buchstaben in die **richtige Reihenfolge** bringst, so ergibt sich der **Name einer Hauptstadt eines europäischen Landes**. Diese Stadt heißt in der Landessprache Jätkäsaari.

1.) Wie viel sind 9% von 900 €? 90 € (**D**) 100 € (**R**) 81 € (**S**) 891 € (**T**)	Rechnung: ..... → .... → .... → .....
2.) Wie viel sind 12% von 300 g? 35 g (**W**) 6 g (**P**) 36 g (**H**) 25 g (**O**)	Rechnung: ..... → .... → .... → .....
3.) Wie viel sind 2% von 8 km? Gib in m an. 4 km (**E**) 200 m (**U**) 0,16 km (**V**) 160 m (**I**)	Rechnung: ..... → .... → .... → .....
4.) 27% eines Guthabens sind 540 €. Wie groß ist das Guthaben? 20 € (**A**) 2000 € (**K**) 2700 € (**C**) 345,50 € (**M**)	Rechnung: ..... → .... → .... → .....
5.) Der Preis eines Mantels wurde im Schlussverkauf um 15% reduziert. Man spart beim Kauf damit 45 €. Was kostet der Mantel jetzt? 60 € (**G**) 675 € (**S**) 300 € (**E**) 255 € (**L**)	Rechnung: ..... → .... → .... → .....
6.) Der Preis eines Mantels wurde im Schlussverkauf um 35% reduziert. Er kostet jetzt nur noch 130 €. Wie viel € kostete der Mantel ursprünglich? 165 € (**C**) 70 € (**T**) 230 € (**E**) 200 € (**N**)	Rechnung: ..... → .... → .... → .....
7.) Wie viel % sind 16 Liter von 400 Liter? 4% (**L**) 16% (**R**) 40% (**P**) 384 % (**Ä**)	Rechnung: .....
8.) Wie viel % sind 18 Personen von 144 Personen? 8% (**K**) 18% (**A**) 12,5% (**I**) 15% (**L**)	Rechnung: .....

Buchstaben: ..... Lösungswort: .....

Für **einfache Prozentsätze** kann man den **Prozentwert** oft **im Kopf ausrechnen**.

10% sind $\frac{10}{100}$ oder $\frac{1}{10}$, du musst also den Grundwert nur durch 10 teilen („Komma 1 Stelle nach links“)

20% sind $\frac{20}{100}$ oder $\frac{1}{5}$, du musst also den Grundwert nur durch 5 teilen („durch 10 und verdoppeln“)

25% sind $\frac{25}{100}$ oder $\frac{1}{4}$, du musst also den Grundwert nur durch 4 teilen („zweimal halbieren“)

30% sind $\frac{30}{100}$ oder $\frac{3}{10}$, du musst den Grundwert durch 10 teilen und anschließend mit 3 multiplizieren

50% sind $\frac{50}{100}$ oder $\frac{1}{2}$, du musst also den Grundwert nur halbieren.

Berechne im Kopf und **kringle** die richtige Antwort ein. Wenn du die zugehörigen Buchstaben in die **richtige Reihenfolge** bringst, so ergibt sich eine **Sportart**, die im Freien gespielt wird, zwei gegen zwei.

1.) Wie viel sind 25% von 600 €? 24 € (**S**) 150 € (**E**) 625 € (**L**) 200 € (**T**)

2.) Wie viel sind 50% von 374 €? 177 € (**W**) 182 € (**Ü**) 187 € (**L**) 192 € (**K**)

3.) Wie viel sind 10% von 657 kg? 6570 kg (**P**) 647 kg (**R**) 65,7 kg (**O**) 6,57 kg (**N**)

4.) Wie viel sind 20% von 340 €? 320 € (**F**) 68 € (**H**) 17 € (**A**) 78 € (**S**)

5.) Wie viel sind 30% von 600 €? 180 € (**B**) 200 € (**K**) 630 € (**Ö**) 570 € (**M**)

6.) Wie viel sind 70% von 70 €? 49 € (**A**) 10 € (**L**) 490 € (**P**) 0 € (**D**)

7.) Wie viel sind 75% von 6 g? 4 g (**L**) 4,5 g (**E**) 1,5 g (**D**) 1,2 g (**Z**)

8.) Wie viel sind 25% von 0,4 ml? 0,25 ml (**T**) 0,1 ml (**B**) 0,04 ml (**N**) 1,6 ml (**H**)

9.) Wie viel sind 50% von 0,16 km? 0,8 km (**D**) 8 m (**S**) 80 m (**L**) 50 m (**V**)

10.) Wie viel sind 90% von 90 €? 100 € (**Ü**) 90 € (**B**) 81 € (**C**) 1 € (**E**)

11.) 25% eines Betrages sind 24 €. Wie groß ist der Betrag? 6 € (**O**) 96 € (**L**) 0,96 € (**G**) 92 € (**M**)

12.) 50% eines Betrages sind 13,70 €. Wie groß ist der Betrag?
6,85 € (**C**) 6,35 € (**N**) 26,40 € (**S**) 27,40 € (**A**)

13.) 10% eines Betrages sind 0,3 €. Wie groß ist der Betrag? 3 € (**L**) 3 ct (**H**) 30 ct € (**P**) 1,3 € (**K**)

14.) 75% eines Betrages sind 6 €. Wie groß ist der Betrag? 4,50 € (**T**) 9 € (**G**) 8 € (**V**) 4 € (**L**)

15.) 30% einer Strecke sind 30 m. Wie lang ist die Strecke? 100 m (**Y**) 30 m (**Q**) 90 m (**D**) 1 km (**S**)

Buchstaben: ..... Lösungswort: .....

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit feU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Man wird ggf. zweimal 45 Minuten ansetzen und wenn noch Zeit übrig ist, Knobelaufgaben verwenden.

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Einstieg feU 15 Min.	L stellt das Thema vor: *Wie man die Prozentrechnung in 4 Schritten erfassen kann – anschließend spielerisches Üben* L und SuS besprechen das Schülerblatt 1 und füllen gemeinsam die Lückentexte aus. L holt möglichst viele Eintragungen von den Schülern. Der Punkt 4. „Schwierigkeiten“ wird noch offen gelassen und nach ggf. gemachten Erfahrungen ausgefüllt.	Schülerblatt 1
2. Erarbeitung I EA/PA 20 Min.	SuS bearbeiten das Schülerblatt 2 und suchen das Lösungswort, **Lösungswort: HELSINKI**. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt 2
3. Erarbeitung II feU + EA/PA 25 Min.	L fragt SuS nach den Anteilen einfacher Prozentsätze und schreibt die an die Tafel: 10% = 1/10; 20% = 1/5; 25% = 1/4; 30% = 3/10; 40% = 2/5; 50% = 1/2; 60% = 3/5; 70% = 7/10; 75% = 3/4; 80% = 4/5; 90% = 9/10; 100% = 1 L klappt die Tafel zu und fragt die SuS ab (vorwärts und rückwärts). SuS sollten diese Gleichheiten auswendig können! L macht vorab mündlich ein paar Beispiele im Stil des Schülerblattes 3 und gibt dabei Kopfrechentipps: • geteilt durch 10 = rechts eine Null streichen bzw. das Komma um eine Stelle nach links rücken • geteilt durch 5 = geteilt durch 10 und anschließend verdoppeln • geteilt durch 4 = zweimal halbieren Jetzt erst teilt L das Schülerblatt 3 aus. SuS bearbeiten das Schülerblatt 3 und suchen das Lösungswort; **Lösungswort: BEACHVOLLEYBALL** L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Tafel danach: Schülerblatt 3
4. Reflexion feU 10 Min.	Der Punkt 4. „Schwierigkeiten“ des Schülerblattes 1 wird nach ggf. gemachten Erfahrungen ausgefüllt.	Schülerblatt 1

Lehrerblatt

Voraussetzung ist, dass die Unterrichtseinheit Prozentrechnung im Regelunterricht behandelt wurde, neben der Umwandlung von Bruch- bzw. Dezimalschreibweise in Prozentschreibweise bei Anteilen insbesondere die Lösung der **drei Grundaufgaben**:
1. Grundaufgabe: Berechnung des Prozentsatzes (das ist ein Anteil!) mithilfe der Division *Prozentwert geteilt durch Grundwert*
2. Grundaufgabe: Berechnung des Prozentwertes aus dem Prozentsatz und dem Grundwert mithilfe eines *Dreisatzes*: Von der Vielheit zur Einheit und dann zur – anderen – Vielheit.
3. Grundaufgabe: Berechnung des Grundwertes aus dem Prozentsatz und dem Prozentwert mithilfe eines *Dreisatzes*: Von der Vielheit zur Einheit und dann zur – anderen – Vielheit.

Die drei Grundaufgaben am Beispiel:

- 1. Grundaufgabe – Prozentsatz gesucht:
  Wie viel Prozent sind 150 € von 500 €?
  Lösung: 150/500 = 3/10 = 0,3 = 30%
- 2. Grundaufgabe – Prozentwert gesucht:
  Wie viel sind 30% von 500 €?
  Lösung: 100 % $\rightarrow$ 500 €, 1 % $\rightarrow$ 5 €; 30 % $\rightarrow$ 150 € (Tabelle bzw. drei Zeilen und beschriftete Multiplikationspfeile links und rechts außen „:100“ und „·30“)
- 3. Grundaufgabe – Grundwert gesucht:
  30% eines Geldbetrages sind 150 €. Wie groß ist der Geldbetrag?
  Lösung: 30 % $\rightarrow$ 150 €, 1 % $\rightarrow$ 5 €; 100 % $\rightarrow$ 500 € (Tabelle bzw. drei Zeilen und beschriftete Multiplikationspfeile links und rechts außen „:30“ und „·100“)

Didaktische Überlegungen:

Unterrichtserfahrungen belegen, dass für Schüler, die nicht der oberen Leistungsgruppe angehören, die Anwendung des Dreisatzes bei den Grundaufgaben 2 und 3 angezeigt ist. Dieser erscheint gegenüber einer Anwendung der Formel *Prozentwert = Grundwert mal Prozentsatz* ggf. mit der entsprechenden Umstellung zwar umständlich, dafür kann der Schüler jeden Dreisatz-Schritt inhaltlich deuten. Im Hinblick auf die dauerhafte Verfügbarkeit der Lösungsstrategie kann man deshalb sagen „Die Formel vergeht, der Dreisatz besteht.“
Beim Berechnen des Prozentsatzes verzichtet man allerdings auf den Dreisatz und vertraut auf die bekannte Anwendung der Berechnung von Anteilen (später auch: relative Häufigkeiten). Damit stehen bei der Dreisatzanwendung die Prozentsätze immer links, die Größen immer rechts.
Weiterführende Überlegungen wie z.B. die Erhöhung eines Wertes um p% als Multiplikation mit 1+p% im Hinblick auf die Zinseszinsformel werden hier nicht thematisiert und bleiben den nachfolgenden Klassen vorbehalten.
Desgleichen wird die Problematik des Begriffs *Prozentpunkte* nicht thematisiert.
Am Beispiel: Erhöht sich ein Anteil von 40% auf 50%, so erhöht er sich um 25% (relative Änderung) oder um 10 Prozentpunkte (absolute Änderung).

Schülerblätter

- Schülerblatt 1: Erarbeitung der Struktur des Themas Prozentrechnung, Lückentext
- Schülerblatt 2: Die drei Grundaufgaben schriftlich rechnen – ohne Taschenrechner!
  Lösungswort: HELSINKI
- Schülerblatt 3: Kopfrechnen mit den Anteilen zu einfachen Prozentsätzen
  Lösungswort: BEACHVOLLEYBALL
- Schülerblatt 4: Erhöhungen und Vergleiche
  Lösungswort: AMEISENBÄR

Struktur

Am Beispiel der Prozentrechnung soll vor einem spielerischen Üben (Arbeitsblätter mit Lösungswort ☺) zunächst exemplarisch erarbeitet werden, wie man bei der **Strukturierung* eines mathematischen Sachverhaltes** vorgehen kann – **5 Schritte**, s.u.

* Auf dem Schülerblatt 1: „Erfassung der Prozentrechnung in 5 Schritten"

Ein Transfer in außermathematische Gebiete ist nicht ausgeschlossen.

1. Worum es geht:

Es werden Anteile von einer Größe betrachtet.

„Prozent" heißt „Hundertstel", z.B. „30%" bedeutet also „30 Hundertstel"

2. Begriffe:

Prozentwert, Grundwert, Prozentsatz

3. Zusammenhänge / Grundaufgaben:

Prozentsatz = Prozentwert geteilt durch Grundwert (1. Grundaufgabe)

Dreisatz mit drei Zeilen (2. und 3. Grundaufgabe)

100% → Grundwert	Prozentsatz → Prozentwert
1% → ……	1% → …… (ggf. ein anderer „günstiger" Prozentsatz)
Prozentsatz → Prozentwert	100% → Grundwert

4. Schwierigkeiten:

- **Identifikation des Grundwertes**
  Tipp: Wie viel % sind 3 € von 4 €? Wie viel % sind 5 € von 4 €? Das Wörtchen „von" deutet auf den Grundwert.
  Tipp: Wie viel % sind 3 € weniger als 4 €? Wie viel % sind 5 € mehr als 4 €?
  Das Wörtchen „als" deutet bei Veränderungen auf den Grundwert.
  Denkfalle: die Erhöhung eines Wertes um p% und die anschließende Verringerung des Ergebnisses um p% führt nicht zum Ausgangswert!
  Beispiel: Aus 100 € werden bei einer Erhöhung um 50% dann 150 €, bei einer Verringerung dieser 150 € um wieder 50% erhält man nur noch 75 € und eben nicht 100 €.
- **Zuordnung Prozentwert zum richtigen Prozentsatz**
  Denkfalle in folgendem Beispiel: Der Preis eines Mantels wurde im Schlussverkauf um 35% reduziert. Er kostet jetzt nur noch 130 €. Wie viel € kostete der Mantel ursprünglich?
  Der Ansatz „35% → 130 €" ist falsch, „65% → 130 €" ist richtig, der Mantel kostet noch 65% des ursprünglichen Preises.
- Die **Regel** „Von zwei gegebenen Werten ist der kleinere immer der Prozentwert, der größere der Grundwert" **versagt** bei Prozentsätzen, die größer als 100% sind.
- ggf. rechentechnischer Art u.a.

5. Weiterführende Aufgaben:

- Prozentsätze über 100%
- Ermittlung des zum Prozentwert zugehörigen Prozentsatzes

Erfassung der Prozentrechnung in 5 Schritten

Schritt:	Beispiel:	Allgemein:
1. Worum es geht	Schlussverkauf: 30% Rabatt auf einen Fernseher für 500 €	Anteile von einer Größe; „Prozent“ heißt „ ____ “, z.B. „30%“ bedeutet also „ ____ “
2. Begriffe	30% … ____ 150 € … ____ 500 € … ____	____ = ____ ____ = ____ ____ = ____
3. Zusammenhänge/ Grundaufgaben	Berechne den Rabatt. 100% → 500 € 1% → ____ € 30 % → ____ €	Dreisatz 100% → ____ 1% → … ____ → ____
	30% von ?? € sind 150 € ____ → ____ ____ → ____ ____ → ____	Dreisatz ____ → ____ ____ → ____ ____ → ____
	Wie viel % sind 150 € von 500 €? ____	
4. Schwierigkeiten		
5. Weiterführende Aufgabenstellungen	Preiserhöhung um 25%, neuer Preis: 500 €. Alter Preis? ____ → ____ ____ → ____ ____ → ____ Probe: ____ ____	Prozentsätze über 100%

Erfassung der Prozentrechnung in 5 Schritten

Schritt:	Beispiel:	Allgemein:
1. Worum es geht	Schlussverkauf: 30% Rabatt auf einen Fernseher für 500 €	Anteile von einer Größe; „Prozent“ heißt „Hundertstel“, z.B. „30%“ bedeutet also „30 Hundertstel“
2. Begriffe	30% … Prozentsatz 150 € … Prozentwert 500 € … Grundwert	Prozentsatz = Anteil Prozentwert = wie viel das ist Grundwert = alles (= 100%)
3. Zusammenhänge/ Grundaufgaben	Berechne den Rabatt. 100% → 500 € 1% → 5 € *<Pfeile>* 30 % → 150 €	Dreisatz 100% → Grundwert 1% → … Prozentsatz → Prozentwert
	30% von ?? € sind 150 € 30% → 150 € 1% → 5 € *<Pfeile>* 100 % → 500 €	Dreisatz … % → Prozentwert 1% → …… 100% → Grundwert
	Wie viel % sind 150 € von 500 €? $\frac{150}{500}=\frac{3}{10}=0{,}3=30\%$	$\text{Prozentsatz}=\frac{\text{Prozentwert}}{\text{Grundwert}}$
4. Schwierigkeiten	Wie erkennt man den Grundwert?	In Texten z.B. nach „von“ oder „als“.
	<ggf. weitere>	
5. Weiterführende Aufgabenstellungen	Preiserhöhung um 25%, neuer Preis: 500 €. Alter Preis? 125% → 500 € 1% → 4 € *<Pfeile>* 100 % → 400 € Probe: 25% von 400 € sind 100 €, passt ☺	Prozentsätze über 100%

Berechne und **kringle** die richtige Antwort ein. Wenn du die zugehörigen Buchstaben in die **richtige Reihenfolge** bringst, so ergibt sich der **Name einer europäischen Stadt**.

1.) Wie viel sind 9% von 900 €? 90 € (**D**) 100 € (**R**) 81 € (**S**) 891 € (**T**)	Rechnung: ..... → .... → .... → .....
2.) Wie viel sind 12% von 300 g? 35 g (**W**) 6 g (**P**) 36 g (**H**) 25 g (**O**)	Rechnung: ..... → .... → .... → .....
3.) Wie viel sind 2% von 8 km? Gib in m an. 4 km (**E**) 200 m (**U**) 0,16 km (**V**) 160 m (**I**)	Rechnung: ..... → .... → .... → .....
4.) 27% eines Guthabens sind 540 €. Wie groß ist das Guthaben? 20 € (**A**) 2000 € (**K**) 2700 € (**C**) 345,50 € (**M**)	Rechnung: ..... → .... → .... → .....
5.) Der Preis eines Mantels wurde im Schlussverkauf um 15% reduziert. Man spart beim Kauf damit 45 €. Was kostet der Mantel jetzt? 60 € (**G**) 675 € (**S**) 300 € (**E**) 255 € (**L**)	Rechnung: ..... → .... → .... → .....
6.) Der Preis eines Mantels wurde im Schlussverkauf um 35% reduziert. Er kostet jetzt nur noch 130 €. Wie viel € kostete der Mantel ursprünglich? 165 € (**C**) 70 € (**T**) 230 € (**E**) 200 € (**N**)	Rechnung: ..... → .... → .... → .....
7.) Wie viel % sind 16 Liter von 400 Liter? 4% (**L**) 16% (**R**) 40% (**P**) 384 % (**Ä**)	Rechnung: .....
8.) Wie viel % sind 18 Personen von 144 Personen? 8% (**K**) 18% (**A**) 12,5% (**I**) 15% (**L**)	Rechnung: .....

Buchstaben: ..... Lösungswort: .....

Für **einfache Prozentsätze** kann man den **Prozentwert** oft **im Kopf ausrechnen**.

10% sind $\frac{10}{100}$ oder $\frac{1}{10}$, du musst also den Grundwert nur durch 10 teilen („Komma 1 Stelle nach links“)

20% sind $\frac{20}{100}$ oder $\frac{1}{5}$, du musst also den Grundwert nur durch 5 teilen („durch 10 und verdoppeln“)

25% sind $\frac{25}{100}$ oder $\frac{1}{4}$, du musst also den Grundwert nur durch 4 teilen („zweimal halbieren“)

30% sind $\frac{30}{100}$ oder $\frac{3}{10}$, du musst den Grundwert durch 10 teilen und anschließend mit 3 multiplizieren

50% sind $\frac{50}{100}$ oder $\frac{1}{2}$, du musst also den Grundwert nur halbieren.

Berechne im Kopf und **kringle** die richtige Antwort ein. Wenn du die zugehörigen Buchstaben in die **richtige Reihenfolge** bringst, so ergibt sich eine **Sportart**.

1.) Wie viel sind 25% von 600 €? 24 € (**S**) 150 € (**E**) 625 € (**L**) 200 € (**T**)

2.) Wie viel sind 50% von 374 €? 177 € (**W**) 182 € (**Ü**) 187 € (**L**) 192 € (**K**)

3.) Wie viel sind 10% von 657 kg? 6570 kg (**P**) 647 kg (**R**) 65,7 kg (**O**) 6,57 kg (**N**)

4.) Wie viel sind 20% von 340 €? 320 € (**F**) 68 € (**H**) 17 € (**A**) 78 € (**S**)

5.) Wie viel sind 30% von 600 €? 180 € (**B**) 200 € (**K**) 630 € (**Ö**) 570 € (**M**)

6.) Wie viel sind 70% von 70 €? 49 € (**A**) 10 € (**L**) 490 € (**P**) 0 € (**D**)

7.) Wie viel sind 75% von 6 g? 4 g (**L**) 4,5 g (**E**) 1,5 g (**D**) 1,2 g (**Z**)

8.) Wie viel sind 25% von 0,4 ml €? 0,25 ml (**T**) 0,1 ml (**B**) 0,04 ml (**N**) 1,6 ml (**H**)

9.) Wie viel sind 50% von 0,16 km? 0,8 km (**D**) 8 m (**S**) 80 m (**L**) 50 m (**V**)

10.) Wie viel sind 90% von 90 €? 100 € (**Ü**) 90 € (**B**) 81 € (**C**) 1 € (**E**)

11.) 25% eines Betrages sind 24 €. Wie groß ist der Betrag? 6 € (**O**) 96 € (**L**) 0,96 € (**G**) 92 € (**M**)

12.) 50% eines Betrages sind 13,70 €. Wie groß ist der Betrag?
6,85 € (**C**) 6,35 € (**N**) 26,40 € (**S**) 27,40 € (**A**)

13.) 10% eines Betrages sind 0,3 €. Wie groß ist der Betrag? 3 € (**L**) 3 ct (**H**) 30 ct € (**P**) 1,3 € (**K**)

14.) 75% eines Betrages sind 6 €. Wie groß ist der Betrag? 4,50 € (**T**) 9 € (**G**) 8 € (**V**) 4 € (**L**)

15.) 30% einer Strecke sind 30 m. Wie lang ist die Strecke? 100 m (**Y**) 30 m (**Q**) 90 m (**D**) 1 km (**S**)

Buchstaben: ..... Lösungswort: .....

Berechne im Kopf und **kringle** die richtige Antwort ein. Wenn du die zugehörigen Buchstaben in die **richtige Reihenfolge** bringst, so ergibt sich ein **Tiername**.

1.) Luca hat viele Smarties. Er verschenkt ein Viertel davon. Wie viel % seiner Smarties behält er?

40% (**K**) 25% (**P**) 75% (**S**) 0,75% (**A**)

2.) Luca hat viele Smarties. Er verschenkt 20% davon. Welchen Bruchteil seiner Smarties behält er?

ein Zwanzigstel (**S**) ein Achtzigstel (**B**) ein Fünftel (**T**) vier Fünftel (**M**)

3.) Luca hat viele Smarties. Er bekommt sogar noch welche dazu, nämlich 10% der Smarties, die er schon hatte. Wie viel % seiner bisherigen Smarties hat er jetzt?

10% (**F**) 110% (**E**) 11% (**A**) 111% (**W**)

4.) Ein Laptop kostete bisher 600 €. Der Preis wurde um 25% erhöht. Was kostet der Laptop jetzt?

150 € (**M**) 450 € (**D**) 750 € (**R**) 625 € (**Z**)

5.) Ein Laptop kostete bisher 600 €. Der Preis wurde um 25% erhöht. Wie viel % des ursprünglichen Preises kostet der Laptop jetzt?

625% (**K**) 75% (**I**) 125% (**A**) 150% (**G**)

6.) Der Preis eines Laptops wurde um 25% erhöht. Er kostet jetzt 1000 €. Was kostete er vorher?

750 € (**J**) 800 € (**I**) 925 € (**T**) 900 € (**H**)

7.) Anna hat 100 €. Felix hat 125 €. Wie viel € hat Felix mehr als Anna?

25 € (**N**) 100 € (**Ö**) 125 € (**B**) 225 € (**R**)

8.) Anna hat 100 €. Felix hat 125 €. Wie viel % hat Felix mehr als Anna?

125% (**C**) 100% (**H**) 25% (**E**) 225% (**O**)

9.) Anna hat 100 €. Felix hat 125 €. Wie viel € hat Anna weniger als Felix?

225€ (**S**) 100 € (**N**) 125 € (**K**) 25 € (**B**)

10.) Anna hat 100 €. Felix hat 125 €. Wie viel % hat Anna weniger als Felix?

25% (**V**) 20% (**Ä**) 5% (**G**) 100% (**R**)

Buchstaben: ..... Lösungswort: .....

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird man die 3. und 4. Phase kurz halten oder weglassen.

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Einstieg FEU 15 Min.	L stellt das Thema vor: *Wie man die Prozentrechnung in 5 Schritten erfassen kann – anschließend spielerisches Üben* L und SuS besprechen das Schülerblatt 1 und füllen gemeinsam die Lückentexte aus. L holt möglichst viele Eintragungen von den Schülern. Der Punkt 4. „Schwierigkeiten“ wird noch offen gelassen und nach ggf. gemachten Erfahrungen ausgefüllt	Schülerblatt 1
2. Erarbeitung I EA/PA 20 Min.	SuS bearbeiten das Schülerblatt 2 und suchen das Lösungswort, ggf. gibt L Tipps („Stadt liegt in Nordeuropa“) Lösungswort: HELSINKI L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt 2
3. Erarbeitung II FEU + EA/PA 25 Min.	L fragt SuS nach den Anteilen einfacher Prozentsätze und schreibt die an die Tafel: 10% = 1/10; 20% = 1/5; 25% = 1/4; 30% = 3/10; 40% = 2/5; 50% = 1/2; 60% = 3/5; 70% = 7/10; 75% = 3/4; 80% = 4/5; 90% = 9/10; 100% = 1 L klappt die Tafel zu und fragt die SuS ab (vorwärts und rückwärts). SuS sollten diese Gleichheiten <u>auswendig</u> können! L macht vorab mündlich ein paar Beispiele im Stil des Schülerblattes 3 und gibt dabei Kopfrechentipps: • geteilt durch 10 = rechts eine Null streichen bzw. das Komma um eine Stelle nach links rücken • geteilt durch 5 = geteilt durch 10 und anschließend verdoppeln • geteilt durch 4 = zweimal halbieren Jetzt erst teilt L das Schülerblatt 3 aus. SuS bearbeiten das Schülerblatt 3 und suchen das Lösungswort, ggf. gibt L Tipps („Mannschaft mit zwei Personen.“); Lösungswort: BEACHVOLLEYBALL L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt 3
4. Erarbeitung III EA/PA 15 Min.	SuS bearbeiten das Schülerblatt 4 und suchen das Lösungswort, ggf. gibt L Tipps („Tier hat einen Rüssel.“) Lösungswort: AMEISENBÄR L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt 4
5. Reflexion FEU 10 Min.	Der Punkt 4. „Schwierigkeiten“ wird nach ggf. gemachten Erfahrungen ausgefüllt.	Schülerblatt 1

Sachanalyse

Möchte man einen Stern zeichnen, kann man – vgl. Abb. 1 – zum Beispiel n = 10 Punkte auf einem Kreis auswählen, den Streckenzug etwa bei P1 beginnen und dann über P2, P3 usw. fortführen, nämlich jeweils k = 3 Punkte gegen den Uhrzeigersinn „weiter".
Man nimmt dabei erfreut zur Kenntnis, dass man beim Erreichen des Startpunktes P1 vorher bei allen anderen Punkten P2 bis P10 genau einmal „vorbei" gekommen ist.

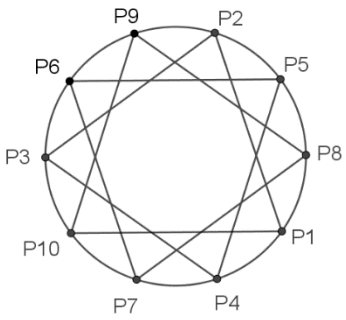


Abb. 1: Stern mit n = 10 und k = 3

Für k = 1 geht man zum jeweils nächsten Punkt weiter und erhält ein regelmäßiges 10-Eck (Abb. 2).
Für k = 2 geht man zum jeweils übernächsten Punkt weiter, erhält dann aber zunächst nur ein 5-Eck, da man „zu früh" zu Startpunkt zurückkehrt. Setzt man bei einem der noch übrigen Punkte neu an, so erhält man ein weiteres Fünfeck und insgesamt auch einen Stern (Abb. 3).
Für k = 4 geht man jeweils 4 Punkte weiter und erhält zunächst nur einen Stern mit 5 Spitzen. Setzt man bei einem der noch übrigen Punkte neu an, so erhält man insgesamt einen Stern, der aus zwei Sternen mit jeweils 5 Spitzen besteht (Abb. 4).
Für k = 5 muss man insgesamt fünfmal ansetzen (Abb. 5).
Für den Fall k = 6 beobachtet man, dass das Weitergehen um 6 Punkte gegen den Uhrzeigersinn einem Weitergehen um 4 Punkte mit dem Uhrzeigersinn entspricht und umgekehrt. Es ergibt sich dieselbe Figur wie für k = 4 (Abb. 4).

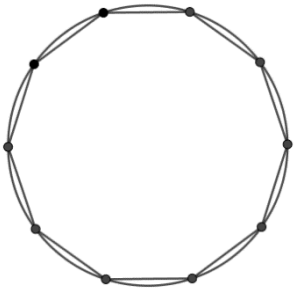


Abb. 2: 10-1-Stern

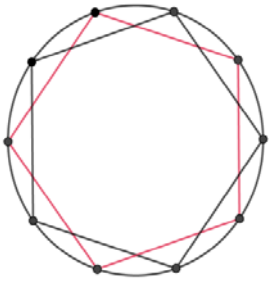


Abb. 3: 10-2-Stern

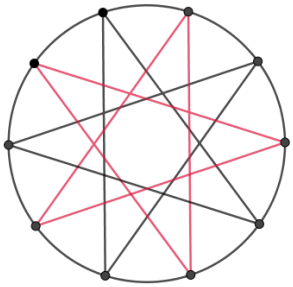


Abb. 4: 10-4-Stern

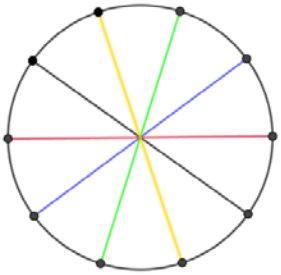


Abb. 5: 10-5-Stern

Allgemein nennen wir Figuren, die auf diese beschriebene Weise entstehen, **n-k-Sterne**. Die regelmäßige Lage der Punkte auf dem Kreis ist dabei nicht Voraussetzung, als Vorgabe würde sogar ein beliebiges konvexes n-Eck ohne Umkreis genügen.
n-k-Sterne kann man zur Erreichung aller Punkte entweder zeichnen **ohne den Stift absetzen zu müssen**, wir nennen solche Sterne **charmant** (Beispiele: 10-3-Stern und 10-1-Stern, vgl. Abb. 1 und 3) **oder man muss mehrfach ansetzen** und sie bestehen aus mehreren Teilen (Beispiele: 10-2-Stern, 10-4-Stern und 10-5-Stern, vgl. Abb. 3 bis 5). In beiden Fällen erreicht man alle Punkte genau einmal.

Es gilt – hier ohne eine weitere allgemein ausgeführte Begründung – der folgende

Satz: Es sei g der größte gemeinsame Teiler von n (n > 1) und k (0 < k < n).
- n-k-Sterne sind genau dann charmant, wenn g = 1 ist.
- n-k-Sterne bestehen für g > 1 aus g charmanten (n:g)-(k:g)-Sternen.
- n-k-Sterne und n-(n–k)-Sterne stimmen überein.

Literatur: Haag, W.: Wege zu geometrischen Sätzen. Klett Stuttgart 2003, S. 8ff

Lehrerblatt

Neben ästhetischen Reizen und den Vorteilen der Handlungsorientierung ist bei den Winkeln in Sternen wieder die – auch außerhalb der Mathematik wichtige – Strategie „mithilfe von Beispielen allgemeine Strukturen erkennen“ von Bedeutung, „data mining“ im Kleinen also ☺.
Die Vorgehensweise ähnelt dabei derer zum Thema „Der Euler’sche Polyedersatz“ aus der Klasse 6.

Charakterisierung von n-k-Sternen:

In den Schülerblättern 1, 2 und 3 werden Kreise und Punkte in regelmäßiger Lage vorgegeben – das ist von der Sache her nicht zwingend, wegen des ästhetischen Erlebnisses aber von Vorteil.

Auf jeden Fall wird man die Fälle 10-3-Stern und 10-4-Stern (hierbei erläuterungsbedürftig: „k Punkte weiter gehen“) und die anschließende Begriffsbildung auf dem Schülerblatt 1 gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern bearbeiten.

Eine erste Schüler-Erkenntnis nach dem Ausfüllen der Tabelle für die Frage 1 wäre: Wenn k ein Teiler von n ist, dann ist der n-k-Stern nicht charmant.
Das ist zunächst ja richtig und sehr lobenswert (!). Aber für eine Charakterisierung taugt dies noch nicht, der 10-4-Stern ist auch nicht charmant und 4 ist kein Teiler von 10.
Die abschließende Erkenntnis, dass ein n-k-Stern charmant ist, wenn n und k teilerfremd (andere Formulierung: größer gemeinsamer Teiler = 1) sind und sonst nicht, liegt etwas tiefer, ggf. muss der Lehrer dazu einen Hinweis geben.

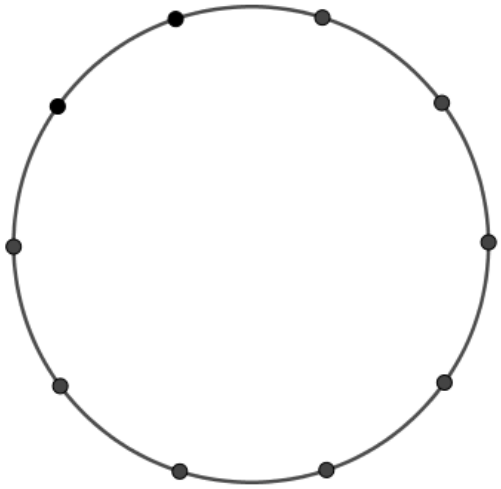
Bei den **Schülerantworten** auf die gestellten Fragen darf man mit einem unterschiedlichen Abstraktionsgrad rechnen, eher beispiel- oder variablenorientiert. Der Lehrer wird ggf. zu einer variablenorientierten Formulierung ermutigen. Diese kann dabei auf Schülerseite als knapp und präzise erlebt werden.
Eine mögliche Binnendifferenzierung liegt in der Anzahl und Abstraktionstiefe der Schüler-Antworten.

Die ausgefüllte Tabelle des Schülerblattes 1:

n	k	Charmant?	Anzahl der Teile?	Welche?	Gleich wie?
10	3	ja	1		
10	4	nein	2	5-2-Sterne	
5	2	ja	1		
5	3	ja	1		5-2-Stern
6	2	nein	2	3-1-Sterne	
6	3	nein	3	2-1-Sterne	
7	2	ja	1		
7	5	ja	1		7-2-Stern
8	2	nein	2	4-1-Sterne	
8	3	ja	1		
9	3	nein	3	3-1-Sterne	
9	4	ja	1		
10	1	ja	1		
15	6	nein	3	5-2-Sterne	

Möchte man einen Stern zeichnen, so kann man zum Beispiel n Punkte auf einem Kreis markieren und diese so verbinden, dass man von einem Punkt immer k Punkte „weiter geht“.

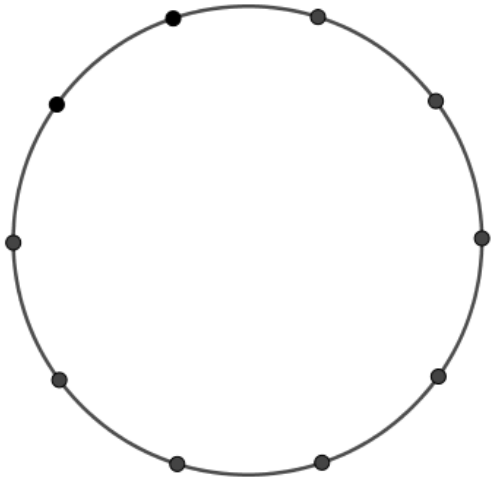
n = 10; k = 3



Beobachtung:

……

n = 10; k = 4



Beobachtung:

……

Solche Figuren nennen wir **n-k-Sterne,** dabei ist **n** die **Anzahl der Punkte auf dem Kreis** und **k** die **Anzahl der Punkte um die man „weitergeht“**.
Wenn man beim Zeichnen nicht neu ansetzen muss, nennen wir den n-k-Stern **charmant**.

Mithilfe von Beispielen (Tabelle unten) sollst du **Antworten** auf die folgenden Fragen **herausfinden**:

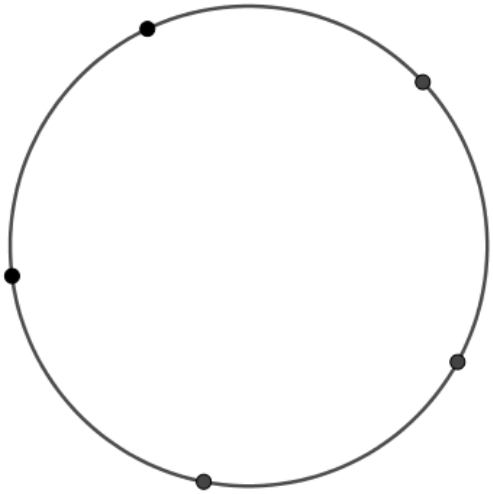
1.) Für welche Kombination von n und k ist der n-k-Stern charmant, für welche nicht?

2.) Wenn der n-k-Stern nicht charmant ist, wie viele Teile hat er dann? Welche?

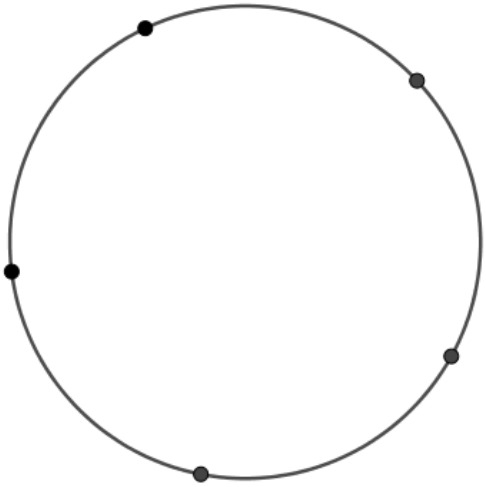
3.) Gibt es gleiche n-k-Sterne?

n	k	Charmant?	Anzahl der Teile?	Welche?	Gleich wie?
10	3				
10	4				
5	2				
5	3				
6	2				
6	3				
7	2				
7	5				
8	2				
8	3				
9	3				
9	4				
10	1				
15	6				

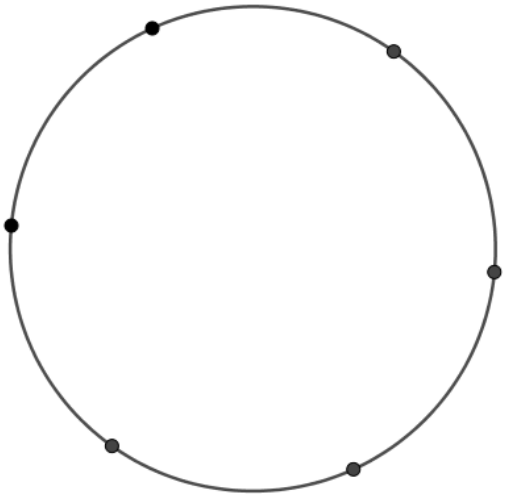
n = 5; k = 2



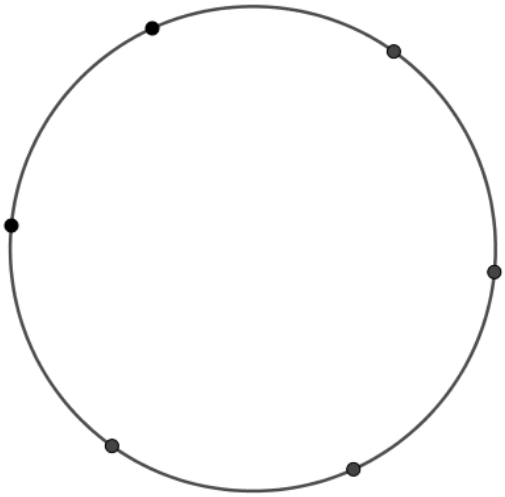
n = 5; k = 3



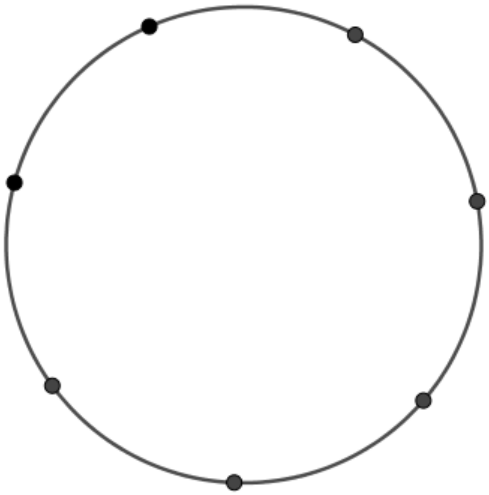
n = 6; k = 2



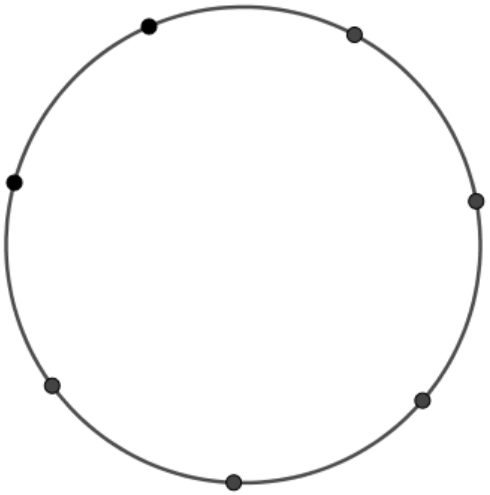
n = 6; k = 3



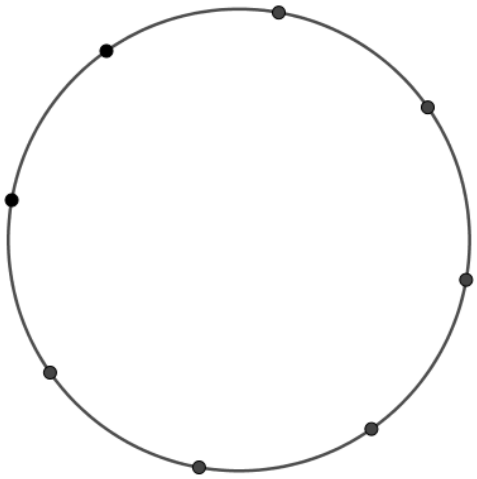
n = 7; k = 2



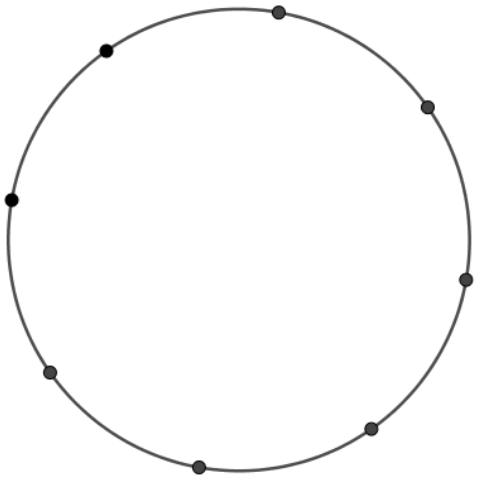
n = 7; k = 5



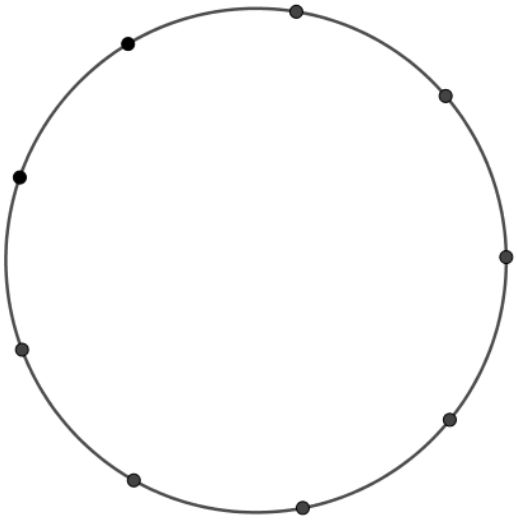
n = 8; k = 2



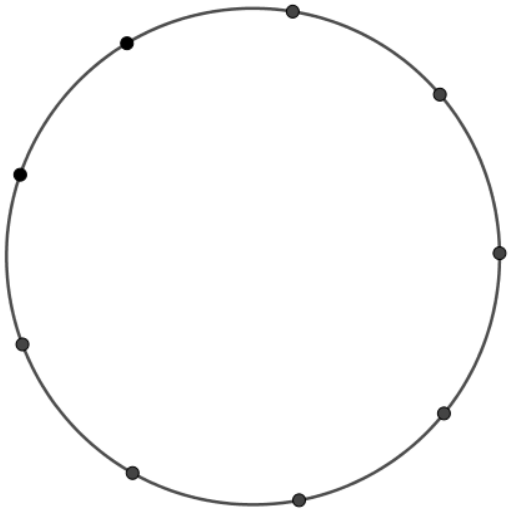
n = 8; k = 3



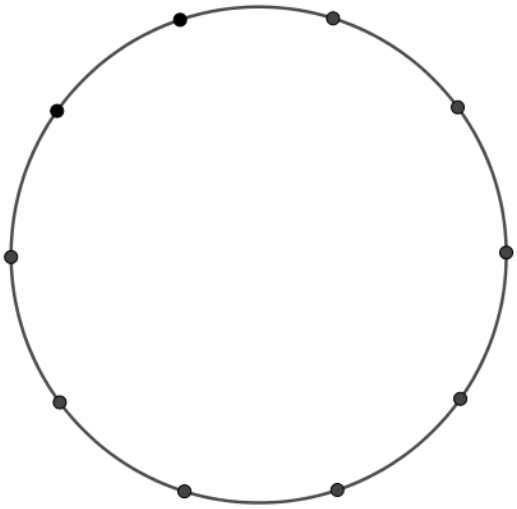
n = 9; k = 3



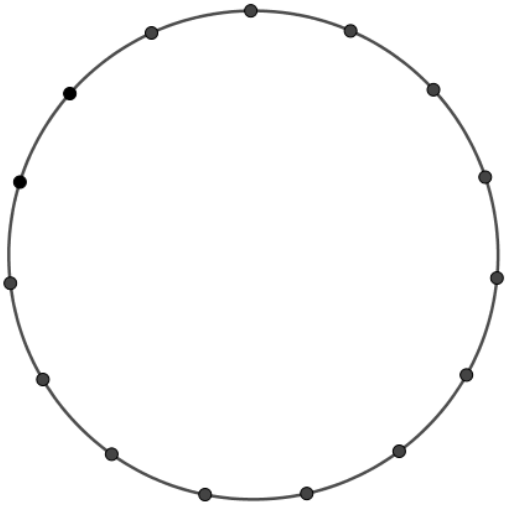
n = 9; k = 4



n = 10; k = 1

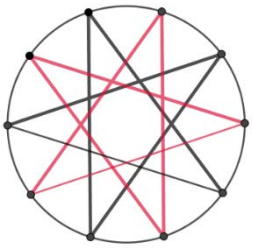


n = 15; k = 6



Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit feU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Erarbeitung I feU 15 Min.	L und SuS bearbeiten den 10-3-Stern und 10-4-Stern (hierbei erläuterungsbedürftig durch den L: „k Punkte weiter gehen“) und die anschließende Begriffsbildung auf dem Schülerarbeitsblatt 1 gemeinsam. L wirkt darauf hin, dass SuS die beiden 5-2-Sterne beim 10-4-Stern zur Unterscheidung verschiedenfarbig zeichnen.  SuS tragen ihre Beobachtungen selbständig ein, z.B. „die Zeichnung geht auf“ und „Startpunkt zu früh erreicht“. L überzeugt sich davon, dass SuS die drei Fragen verstanden haben.	Schülerblatt 1
2. Erarbeitung II EA/PA 30 Min.	SuS füllen die Tabelle aus und forschen nach Antworten auf die drei gestellten Fragen. Hinweis des L: *Bei nicht-charmanten Sternen die Teilsterne verschiedenfarbig zeichnen!* L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend (vgl. auch Bemerkungen auf dem Lehrerblatt). L korrigiert ggf. falsche Eintragungen in den Tabellen der SuS (mit falschen Daten kann man keine Regel finden!) L gibt den langsameren Zeichnern einige Tabellenwerte vor, damit sich diese auch Gedanken über die drei gestellten Fragen machen können.	Schülerblätter 1; 2 und 3
3. Abschluss feU 5 Min.	Die Formulierungen der Antworten werden verglichen. L und SuS einigen sich auf eine variablenorientierte Formulierung.	

Sachanalyse

Möchte man einen Stern zeichnen, kann man – vgl. Abb. 1 – zum Beispiel n = 10 Punkte auf einem Kreis auswählen, den Streckenzug etwa bei P1 beginnen und dann über P2, P3 usw. fortführen, nämlich jeweils k = 3 Punkte gegen den Uhrzeigersinn „weiter".
Wir nehmen erfreut zur Kenntnis, dass wir beim Erreichen des Startpunktes P1 vorher bei allen anderen Punkten P2 bis P10 genau einmal „vorbei" gekommen sind.

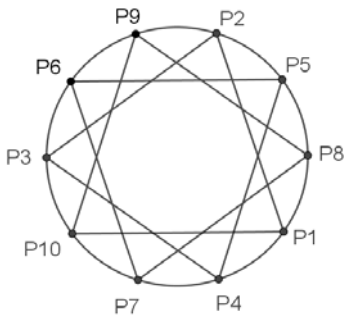


Abb. 1: Stern mit n = 10 und k = 3

Für k = 1 geht man zum jeweils nächsten Punkt weiter und erhält ein regelmäßiges 10-Eck (Abb. 2).
Für k = 2 geht man zum jeweils übernächsten Punkt weiter, erhält dann aber zunächst nur ein 5-Eck erhalten, da man „zu früh" zu Startpunkt zurückkehrt. Setzt man bei einem der noch übrigen Punkte neu an, so erhält man ein weiteres Fünfeck und insgesamt auch einen Stern (Abb. 3).
Für k = 4 geht man jeweils 4 Punkte weiter und erhält zunächst nur einen Stern mit 5 Spitzen. Setzt man bei einem der noch übrigen Punkte neu an, so erhält man insgesamt einen Stern, der aus zwei Sternen mit 5 Spitzen besteht (Abb. 4).
Für k = 5 muss man insgesamt fünfmal ansetzen (Abb. 5).
Für den Fall k = 6 beobachtet man, dass das Weitergehen um 6 Punkte gegen den Uhrzeigersinn einem Weitergehen um 4 Punkte mit dem Uhrzeigersinn entspricht und umgekehrt. Es ergibt sich dieselbe Figur wie für k = 4 (Abb. 4).

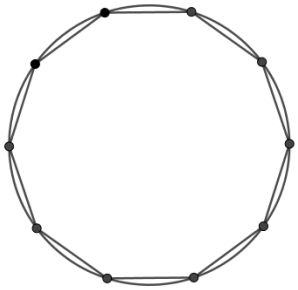


Abb. 2: 10-1-Stern

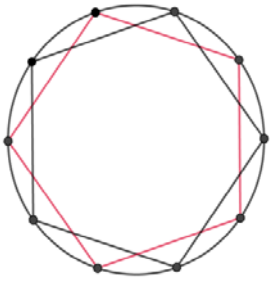


Abb. 3: 10-2-Stern

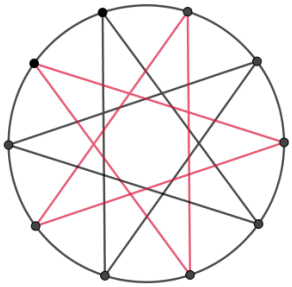


Abb. 4: 10-4-Stern

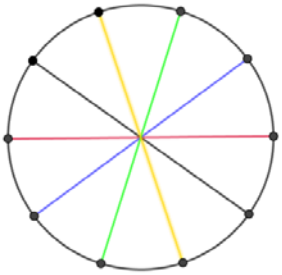


Abb. 5: 10-5-Stern

Allgemein nennen wir Figuren, die auf diese beschriebene Weise entstehen, **n-k-Sterne**. Die regelmäßige Lage der Punkte auf dem Kreis ist dabei nicht Voraussetzung, als Vorgabe würde sogar ein beliebiges konvexes n-Eck ohne Umkreis genügen.
n-k-Sterne kann man zur Erreichung aller Punkte entweder zeichnen ohne den Stift absetzen zu müssen, wir nennen solche Sterne **charmant** (Beispiele: 10-3-Stern und 10-1-Stern, vgl. Abb. 1 und 3) oder man muss mehrfach ansetzen und sie bestehen aus mehreren Teilen (Beispiele: 10-2-Stern, 10-4-Stern und 10-5-Stern, vgl. Abb. 3 bis 5). In beiden Fällen erreicht man alle Punkte genau einmal.

Diese Überlegungen für den Fall n = 10 führen – ohne eine weitere allgemein ausgeführte Begründung – zum folgenden

Satz 1: Es sei g der größte gemeinsame Teiler von n und k (0 < k < n).
- n-k-Sterne sind genau dann charmant, wenn g = 1 ist.
- n-k-Sterne bestehen für g > 1 aus g charmanten (n:g)-(k:g)-Sternen.
- n-k-Sterne und n-(n–k)-Sterne stimmen überein.

Bevor wir uns dem zweiten Thema *Winkel in Sternen* zuwenden, sollen zwei Methoden zur Feststellung von Winkelsummen – hier am einfachen Beispiel der Winkelsumme im Dreieck – erläutert werden.

Bleistift-Methode: Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ABC, vgl. Abb. 6. Man denke sich einen Bleistift auf die Strecke AB gelegt die Spitze bei B (durchgezogener Pfeil, zur Unterscheidung werden die Pfeile etwas neben die zugehörigen Strecken gezeichnet). Der Bleistift wird mit dem Uhrzeigersinn um seine Spitze gedreht, bis er auf der Strecke BC liegt, er überstreicht dabei den Innenwinkel bei B (neue Lage: gestrichelter Pfeil). Das Ende des Bleistifts wird jetzt auf C verschoben und dann wird der Bleistift um sein Ende mit dem Uhrzeigersinn gedreht bis zur Lage auf der Strecke AC (neue Lage: fein gestrichelter Pfeil), er überstreicht dabei den Innenwinkel bei C usw. (Endlage: gepunkteter Pfeil).

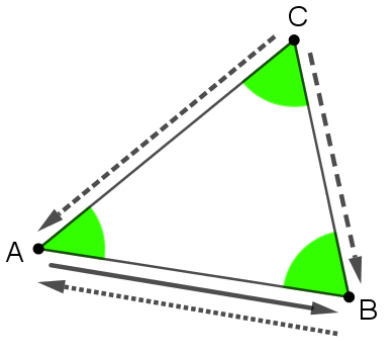


Abb. 6: Illustration der Bleistift-Methode

Durch die dreimalige Drehung hat der Bleistift „die drei Innenwinkel aufsummiert“, der Vergleich von Anfangs- und Endlage liefert die Winkelsumme von 180°.

Spaziergänger-Methode: Gegeben ist ein beliebiges Dreieck ABC, vgl. Abb. 7. Ein Spaziergänger startet in A und bewegt sich in Richtung B. In B dreht er sich gegen den Uhrzeigersinn und geht weiter in Richtung C usw.
Zum Schluss ist er wieder in A und blickt in Richtung B.
Durch die dreimalige Drehung hat der Spaziergänger „die drei Außenwinkel aufsummiert“. Der Vergleich der Blickrichtungen zu Beginn und zum Schluss liefert die Winkelsumme der Außenwinkel von 360°.

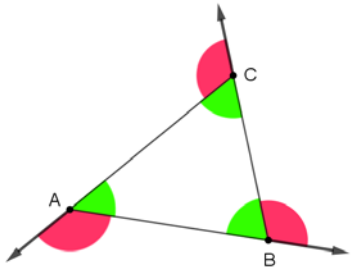


Abb. 7: Illustration der Spaziergänger-Methode

Außenwinkel und Innenwinkel ergeben zusammen immer einen gestreckten Winkel von 180°, hier gibt es 3 Stück davon. Also bleibt für die Innenwinkelsumme: 3 · 180° – 360° = 180°.

Satz 2: Ein charmanter n-k-Stern (k < n/2) hat in seinen Spitzen die Winkelsumme (n – 2·k) · 180°

Beweis mit der Spaziergänger-Methode:
Für charmante n-k-Sterne mit k < n/2 ist die Anzahl k der Punkte, die man bis zum nächsten Sternpunkt jeweils weiterrückt, auch die Anzahl der Umdrehungen, die der Spaziergänger insgesamt vollzieht (am Beispiel der Abb. 8 sind es k = 3).
Also gilt: Summe aller Außenwinkel = k · 360° = 2· k · 180°.
Die Summe aller Außen- und Innenwinkel zusammen ist = n · 180°.
Damit bleibt für die Summe aller Innenwinkel die Differenz, nämlich (n – 2·k) · 180°.

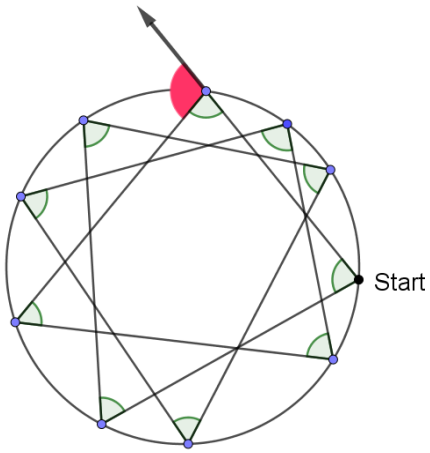


Abb. 8: ein unregelmäßiger 10-3-Stern

Bemerkung: Für k = n/2 ist die Winkelsumme offensichtlich 0 (vgl. Abb. 5). Für alle anderen Sterne kann man die Winkelsumme mit Hilfe von Satz 1 bestimmen.

Ein Hinweis: Den Satz kann man an der Abb. 8 mit der Bleistift-Methode bestätigen. Man muss sich dabei die Anzahl der Volldrehungen merken ☺, hier sind es zwei.

Literatur: Haag, W.: Wege zu geometrischen Sätzen. Klett Stuttgart 2003, S. 8ff

Lehrerblatt

Neben ästhetischen Reizen und den Vorteilen der Handlungsorientierung ist bei den Winkeln in Sternen wieder die – auch außerhalb der Mathematik wichtige – Strategie „mithilfe von Beispielen allgemeine Strukturen erkennen“ von Bedeutung, „data mining“ im Kleinen also ☺.
Die Vorgehensweise ähnelt dabei derer zum Thema „Der Euler’sche Polyedersatz“ aus der Klasse 6.

Thema 1 – Charakterisierung von n-k-Sternen:

In den Schülerblättern 1, 1a und 1b werden Kreise und Punkte in regelmäßiger Lage vorgegeben – das ist von der Sache her nicht zwingend, wegen des ästhetischen Erlebnisses aber von Vorteil.
Auf jeden Fall wird man die Fälle 10-3-Stern und 10-4-Stern (hierbei erläuterungsbedürftig: „k Punkte weiter gehen“) und die anschließende Begriffsbildung gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern bearbeiten. Mögliche wäre es auch, die Kategorien in der Tabelle zunächst noch nicht vorzugeben.
Eine erste Schüler-Erkenntnis für die Frage 1 wäre: Wenn k ein Teiler von n ist, dann ist der n-k-Stern nicht charmant.
Das ist zunächst ja richtig und sehr lobenswert (!). Aber für eine Charakterisierung taugt dies noch nicht, der 10-4-Stern ist auch nicht charmant und 4 ist kein Teiler von 10. Die abschließende Erkenntnis, dass ein n-k-Stern charmant ist, wenn n und k teilerfremd (andere Formulierung: größer gemeinsamer Teiler = 1) sind und sonst nicht, liegt etwas tiefer, ggf. muss der Lehrer dazu einen Hinweis geben.

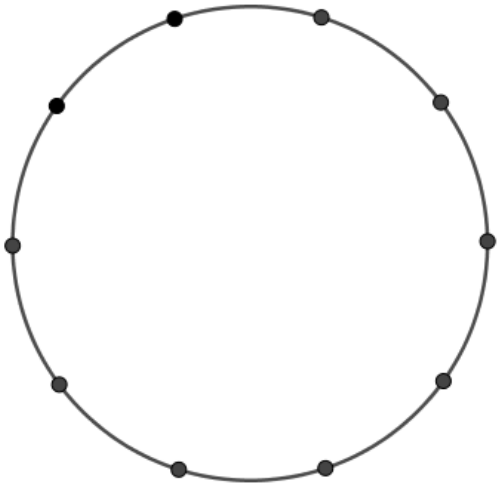
Bei den Schülerantworten auf die gestellten Fragen darf man mit einem unterschiedlichen Abstraktionsgrad rechnen, ggf. eher beispiel- oder variablenorientiert. Ggf. wird der Lehrer zu einer variablenorientierten Formulierung ermutigen. Diese kann dabei auf Schülerseite als knapp und präzise erlebt werden.
Binnendifferenzierung: Anzahl und Abstraktionstiefe der Antworten.

Thema 2 – Winkelsumme an den Spitzen von charmanten n-k-Sternen:

Der Lehrer erläutert das Thema und die Bleistift-Methode an der Winkelsumme im Dreieck, vgl. Sachanalyse.
Didaktische Reduktion hierbei: es werden nur charmante n-k-Sterne betrachtet.
Das Beispiel des 10-3-Sterns wird gemeinsam bearbeitet.
Auch hier könnte man sich überlegen, ob man die Kategorien und der n-k-Kombinationen der Tabelle vorgibt, oder mit den Schülerinnen und Schüler zusammen erarbeitet.
Insbesondere können sie bezüglich der fünften Spalte an der Bleistift-Methode erkennen, dass die Winkelsumme in den Sternspitzen ein ganzzahliges Vielfaches von 180° betragen muss. Denn der Bleistift liegt zum Schluss wieder auf der Ausgangsstrecke und zeigt dabei entweder in dieselbe oder in die entgegengesetzte Richtung wie zu Beginn.
Im Unterschied zur Vorgehensweise beim Thema 1 werden jetzt keine Grundfiguren mehr vorgegeben. Auch das Erstellen von erkenntnisträchtigen Skizzen von Hand auf Konzeptpapier ist eine wichtige Kompetenz. Der Lehrer soll darauf achten, dass die Skizzen groß sind (mindestens DIN A5), sonst hat man mit der konkreten Durchführung der Bleistift-Methode ein Problem.
Es ist nicht unbedingt daran gedacht, den Beweis des Satzes mit den Schülerinnen und Schülern vorzuführen. Der Lehrer sollte den Beweis mithilfe der Spaziergänger-Methode aber kennen (vgl. Sachanalyse) und ggf. einzelnen Interessierten auf Nachfrage (die wichtigste Frage im Fach Mathematik lautet: „Warum?“ ☺) etwa am Beispiel des 10-3-Sterns erläutern können.

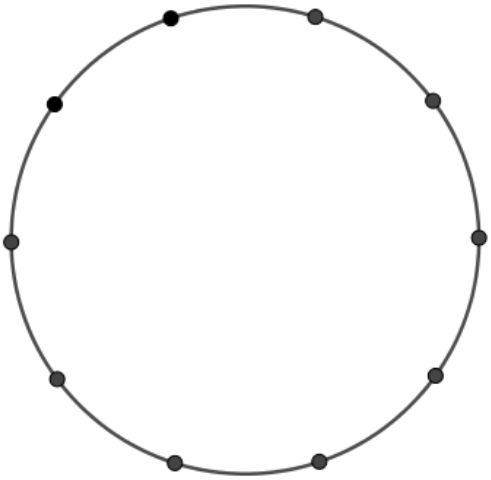
Möchte man einen Stern zeichnen, kann man zum Beispiel n Punkte auf einem Kreis markieren und diese so verbinden, dass man von einem Punkt immer k Punkte „weiter geht“.

n = 10; k = 3



Beobachtung: ……

n = 10; k = 4



Beobachtung: ……

Solche Figuren nennen wir **n-k-Sterne,** dabei ist **n** die **Anzahl der Punkte auf dem Kreis** und **k** die **Anzahl der Punkte um die man „weitergeht“**.
Wenn man beim Zeichnen nicht neu ansetzen muss, nennen wir den n-k-Stern **charmant**.

Mithilfe von Beispielen (Tabelle unten) sollst du **Antworten** auf die folgenden Fragen **herausfinden**:

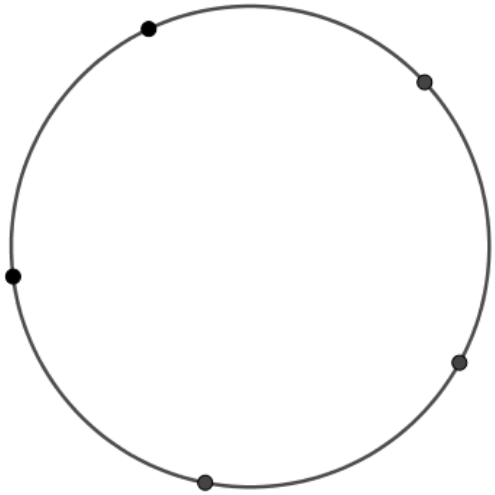
1.) Für welche Kombination von n und k ist der n-k-Stern charmant, für welche nicht?

2.) Wenn der n-k-Stern nicht charmant ist, wie viele Teile hat er? Welche?

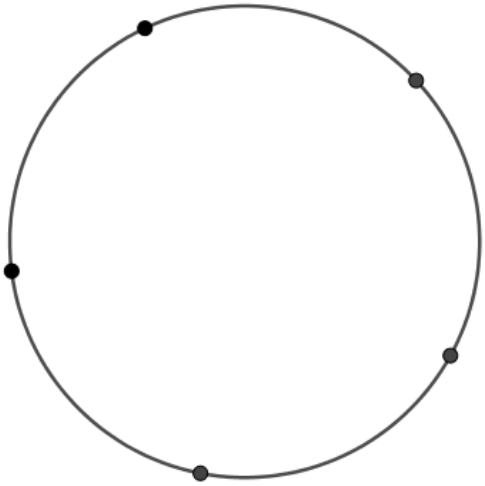
3.) Gibt es gleiche n-k-Sterne?

n	k	Charmant?	Anzahl der Teile?	Welche?	Gleich wie?
10	3				
10	4				
5	2				
5	3				
6	2				
6	3				
7	2				
7	5				
8	2				
8	3				
9	3				
9	4				
10	1				
15	6				

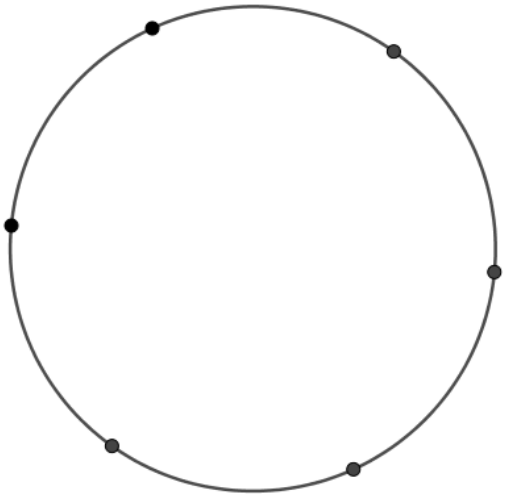
n = 5; k = 2



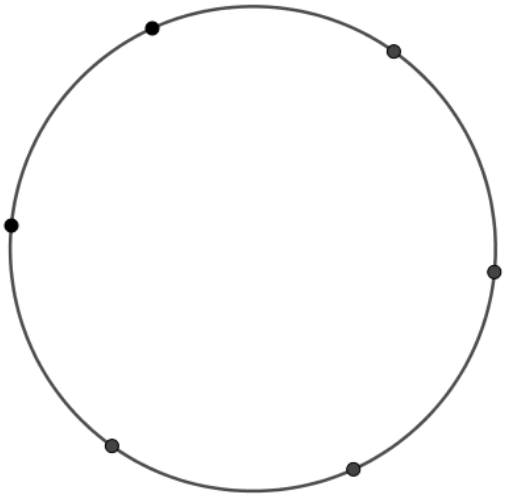
n = 5; k = 3



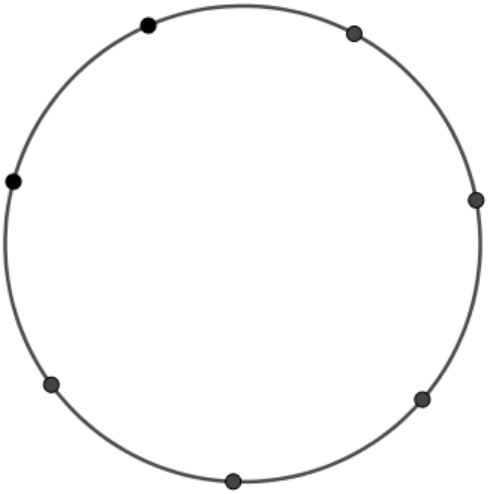
n = 6; k = 2



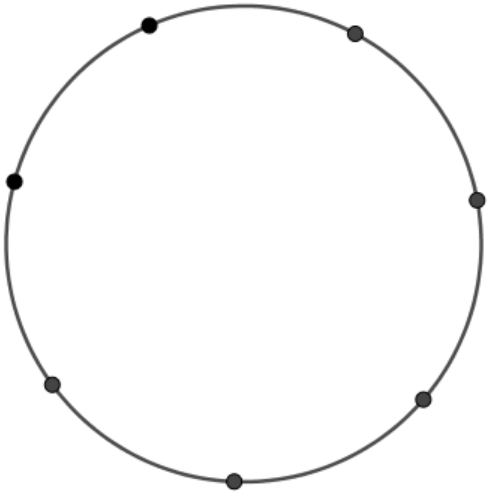
n = 6; k = 3



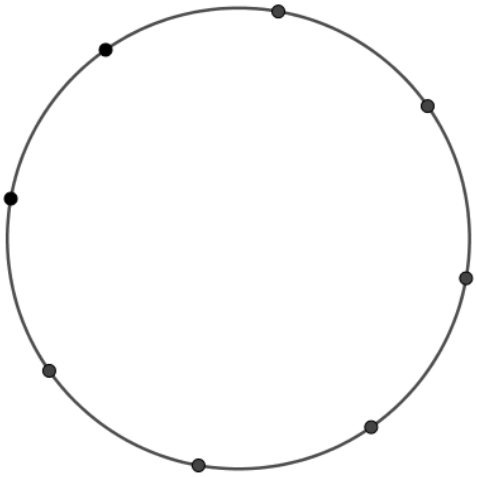
n = 7; k = 2



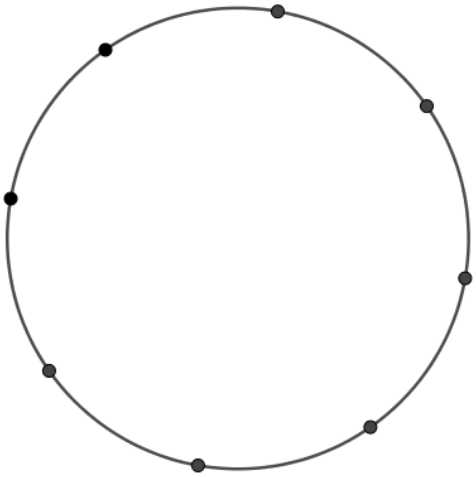
n = 7; k = 5



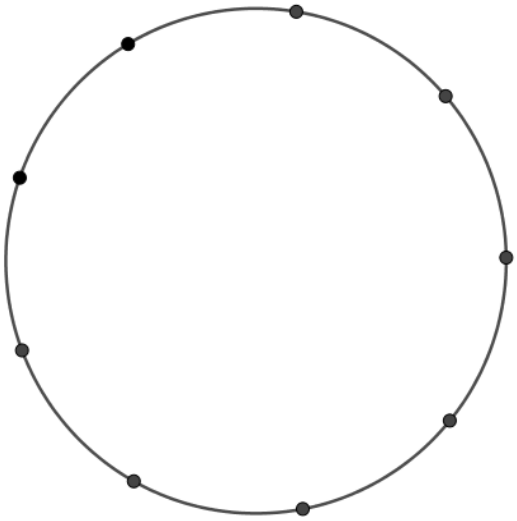
n = 8; k = 2



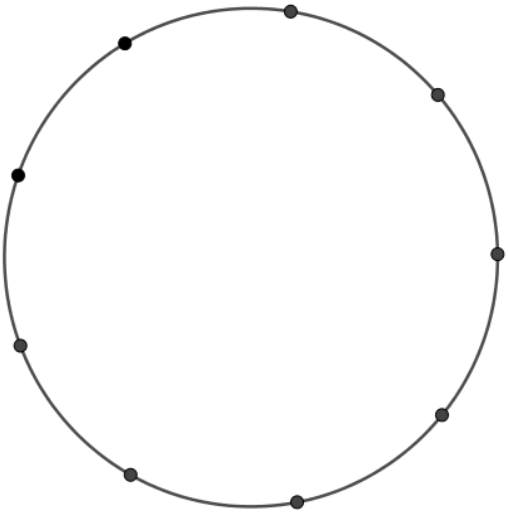
n = 8; k = 3



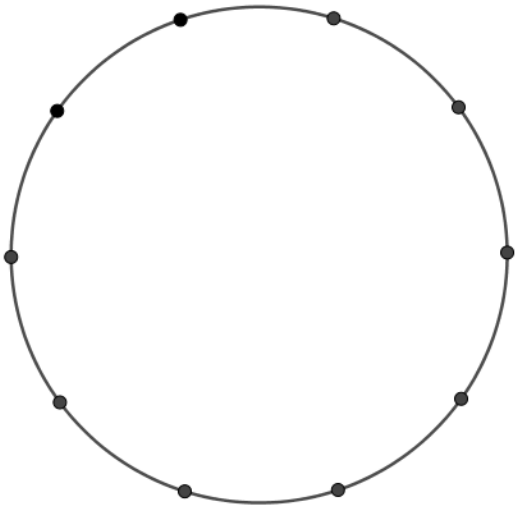
n = 9; k = 3



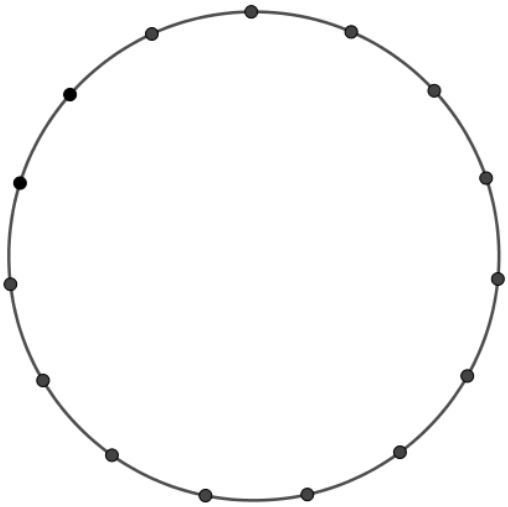
n = 9; k = 4



n = 10; k = 1



n = 15; k = 6



Es geht hier um **charmante n-k-Sterne** (k soll dabei kleiner als n/2 sein) – diese dürfen auch unregelmäßig sein – und um die **Winkelsumme an den Sternspitzen**, vgl. Abbildung rechts.

Fülle die **Tabelle** aus, verwende dabei die **Bleistift-Methode**. **Skizziere** dazu von Hand die verlangten Sterne **groß** (!) auf Konzeptpapier.

Es gibt eine **Formel**, wie man diese Winkelsumme mithilfe von **n** und **k** ausrechnen kann.
Findest du diese Formel mithilfe der ausgefüllten Tabelle?

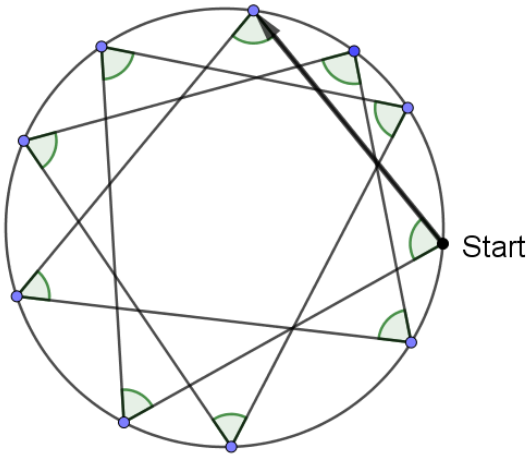


Abbildung: Winkelsumme an den Spitzen eines unregelmäßigen 10-3-Sterns

n	k	Anzahl der Volldrehungen des Bleistifts	Winkelsumme an den Sternspitzen	Wie viel mal 180°?
10	**3**	2	720°	**4** · 180°
5	**2**			
7	**2**			
7	**3**			
8	**3**			
9	**2**			
9	**4**			
11	**2**			

Ein charmanter n-k-Stern (k < n/2) hat in seinen Spitzen die Winkelsumme .....

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird man mehr oder weniger vorgeben.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Erarbeitung I FEU 15 Min.	L und SuS bearbeiten den 10-3-Stern und 10-4-Stern (hierbei erläuterungsbedürftig durch den L: „k Punkte weiter gehen“) und die anschließende Begriffsbildung auf dem Schülerarbeitsblatt 1 gemeinsam. SuS tragen ihre Beobachtungen ein, z.B. „die Zeichnung geht auf“ und „Startpunkt zu früh erreicht“. Variante: die Kategorien in der Tabelle zusammen mit den SuS festlegen. L überzeugt sich davon, dass SuS die drei Fragen verstanden haben.	Schülerblatt 1
2. Erarbeitung II EA/PA 30 Min.	SuS füllen die Tabelle aus und forschen nach Antworten auf die drei gestellten Fragen. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend (vgl. auch Bemerkungen auf dem Lehrerblatt).	Schülerblätter 1; 1a und 1b
3. Erarbeitung III FEU 15 Min.	L stellt das Thema anhand des Schülerarbeitsblattes 2 vor und erläutert die Bleistift-Methode an der Winkelsumme im Dreieck an der Tafel. Das Beispiel des 10-3-Sterns wird dann gemeinsam bearbeitet. Es wird problematisiert, dass die Winkelsumme immer ein ganzzahliges Vielfaches von 180° sein muss (vgl. Lehrerblatt). Variante: die Kategorien in der Tabelle zusammen mit den SuS festlegen. L überzeugt sich davon, dass SuS wissen, was zu tun ist.	Schülerblatt 2, Tafel
4. Erarbeitung IV EA/PA 30 Min.	SuS füllen die Tabelle aus und forschen nach der Formel, ggf. wählen sie zur Bestätigung noch weitere Beispiele selbst aus. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt 2; Freiland-Skizzen auf Konzeptpapier
5. Erarbeitung V FEU 15 Min.	Ggf. thematisiert der L den Spezialfall der Winkelsumme im n-Eck (k=1). Auf Nachfrage oder wenn die Situation dafür „reif“ ist, skizziert der L den Beweis des Winkelsummensatzes für Sternspitzen beispielhaft für den 10-3-Stern.	Tafel

Didaktischer Kommentar

LWM-Aufgaben eignen sich besonders gut für Mkid, weil sie als schwierig gelten und bei einer erfolgreichen Lösung das Selbstbild stärken. Deshalb ist es besonders wichtig, dass die Schwierigkeit der Aufgabe im Einstieg betont wird und natürlich, dass die Aufgabe möglichst selbstständig gelöst wird. Diese Aufgabe hat einen engen Bezug zum Unterrichtsstoff. Es muss deshalb unbedingt vorher geprüft werden, ob die Themen Basiswinkelsatz und Winkelsumme im Dreieck behandelt sind.

Die Strategie Rückwärtsrechnen kann in vielen Kontexten verwendet werden. Das soll den SuS mehr Flexibilität bei der Lösung von Aufgaben vermitteln.

Die Vorgehensweise hängt sehr stark von der Schülergruppe ab. Auf jeden Fall sollten zu Beginn die im Unterricht behandelten Sätze gesammelt werden. Es können durchaus auch Sätze dabei sein, die bei dieser Aufgabe nicht benötigt werden. Geschieht diese Sammlung im Plenum, dann sollte man die Sätze stichwortartig als Wenn – dann – Sätze an der Tafel notieren und an einem Beispiel anwenden. Man kann z.B. zuerst in einer Partnerarbeit die SuS die gelernten Sätze zusammentragen lassen und dann an die Tafel übertragen oder aber auch sofort im Plenum starten.

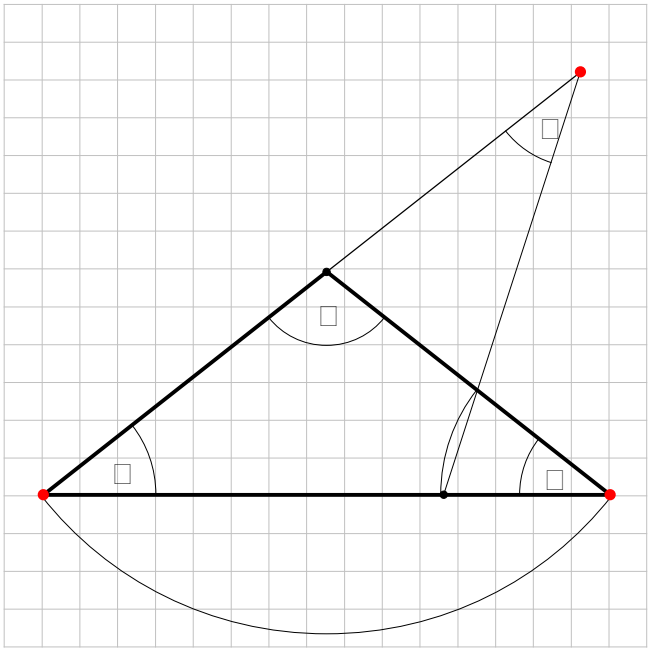
In der nächsten Phase sollen die SuS von α auf φ schließen. Bei Problemen kann man das in Etappen einteilen. Man kann auch Hilfekärtchen schreiben, auf denen jeweils ein Teildreieck aufgezeichnet ist, in dem die Winkel berechnet werden sollen. Hilfreich ist es auch, zuerst nach gleichschenkligen Dreiecken suchen zu lassen.

Didaktisch schwierig ist dann die Umkehrung von φ auf α zu schließen. Hier müssen die SuS mit Formeln und Variablen umgehen. Das fällt auf dieser Stufe i.a. schwer. Man kann dies unterstützen, indem man die Winkel mit Werten versieht und dann fragt, wie daraus der gesuchte Wert berechnet wurde. Jedenfalls ist individuelle Unterstützung gefragt. Unbedingt sollten die SuS ihre Erkenntnisse sauber aufschreiben, damit sie nicht den Überblick verlieren. Als Arbeitsform bietet sich Einzelarbeit an.

Die Aufgabe zum LWM 2013 ist nur als Puffer gedacht, wenn tatsächlich SuS früher fertig sein sollten oder große Lust verspüren, zu Hause eine weitere Aufgabe zu lösen. Die Schwierigkeit dieser Aufgabe liegt darin, dass man vordergründig gar keinen konkreten Winkel ausrechnen muss. Für die SuS ist der Gedanke besonders schwierig, dass man E mit D und F verbindet und dann zeigt, dass der Winkel ein gestreckter ist. Solche „Tricks“ kommen in der Schule für gewöhnlich nicht vor. Deshalb sollte die Lehrkraft die Idee zum Einstieg vermitteln. Rückwärtsrechnen ist keine besonders wichtige Strategie bei dieser Aufgabe. Sie kann aber helfen, die Idee des gestreckten Winkels selbst zu entdecken.

Eine Aufgabe aus dem Landeswettbewerb Mathematik

Wettbewerbsaufgaben sind schwierig!
Im Jahr 2007 gab es folgende Aufgabe:



Wie groß sind die Winkel α, β und γ, wenn $\varphi = 12°$ ist.

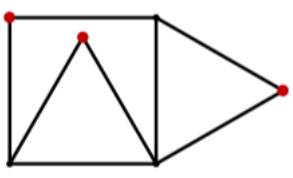
Wie löst man solche Aufgaben?
1. Schreibe die Sätze aus der Geometrie auf, die du kennst. Vermutlich sind Sätze über Winkel besonders hilfreich. Überlege bei jedem Satz, was die Voraussetzungen sind und was daraus folgt. Am besten schreibst du die Sätze so auf: „Wenn ..., dann ...".

2. Nun kannst du nach Informationen in der Figur suchen, die die Anwendung dieser Sätze ermöglichen. Sicher können die Kreisbögen eine wichtige Information darstellen. Außerdem solltest du Winkel einzeichnen, über die du Aussagen machen kannst.

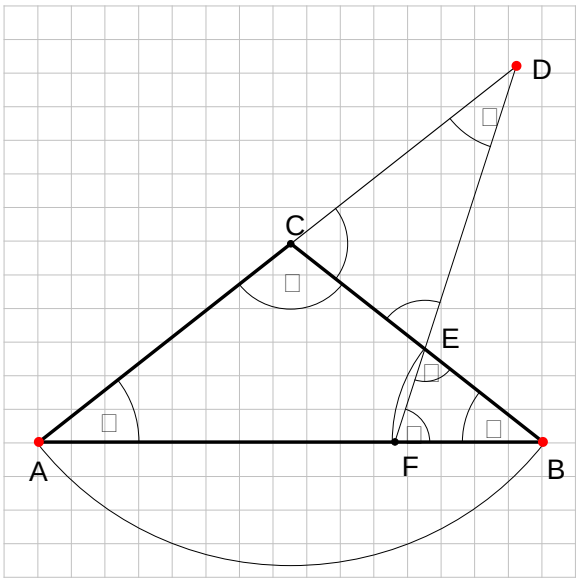
3. Was machst du aber, wenn du nicht weiterkommst? Eine hilfreiche Strategie ist das Rückwärtsarbeiten: Stell dir vor, du würdest α kennen, z.B. $\alpha = 40°$, kannst du dann β und γ ausrechnen? Kommst du so vielleicht zum Winkel φ? Wenn du mit dieser Methode erfolgreich warst, dann musst du die Richtung deiner Rechnung nur noch umdrehen. Allerdings kann es sein, dass du nicht in jedem Schritt sofort alles ausrechnen kannst. Dann helfen Variablen!

Aufgabe aus dem LWM 2013:

Die nebenstehende Figur besteht aus einem Quadrat und zwei gleichseitigen Dreiecken.
Liegen die drei fett markierten Punkte auf einer Geraden?



Strategie Rückwärtsarbeiten. Sei z.B. $\alpha = 40°$.



Da AC = BC ist $\beta = 40°$ (Basiswinkelsatz)
Winkelsumme im Dreieck EFB ergibt:

$$\varepsilon + \delta = 140°$$

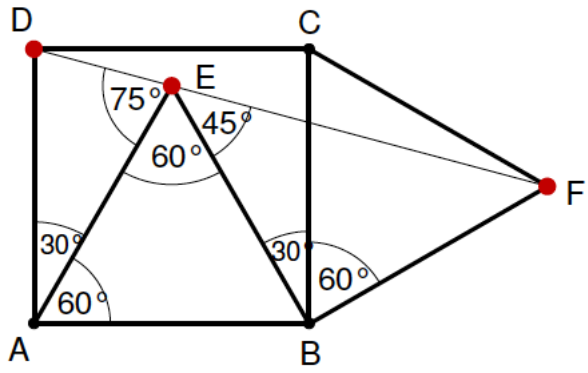
Da EB = EF ist $\varepsilon = d = 70°$ (Basiswinkelsatz)
Winkelsumme im Dreieck ABC ergibt:
$40° + 40° + \gamma = 180°;\ \gamma = 100°$.
Nun kennen wir zwei Winkel im Dreieck CED:
Nebenwinkel von γ ist 80° und Scheitelwinkel von ε ist 70°.
Winkelsumme im Dreieck CED:

$$70° + 80° + \varphi = 180°; \varphi = 30°.$$

Durch diese Rechnung hat man alle notwendigen Sätze für eine Vorwärtsstrategie gefunden.
Es ist $\alpha = \beta$ (Basiswinkelsatz), $\gamma = 180° - \alpha - \beta$ (Winkelsumme). Damit erhält man einen Winkel im Dreieck CED: Nebenwinkel von γ ist $180° - (180° - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$. Der andere Winkel ist gleichgroß wie ε. Es $\varepsilon = d$ (Basiswinkelsatz) und $\beta + \varepsilon + \delta = 180° = \beta + 2\varepsilon;\ \varepsilon = 90° - \frac{\beta}{2}$ (Winkelsumme)
Nun betrachtet man die Winkelsumme im Dreieck CED: $\alpha + \beta + 90° - \frac{\beta}{2} + \varphi = 180°$ und $\alpha = \beta$ ergibt $\alpha + \alpha + 90° - \frac{\alpha}{2} + \varphi = \frac{3}{2}\alpha + 90° + \varphi = 180°; \frac{3}{2}\alpha = 90° - \varphi;\ \alpha = \frac{2}{3}(90° - 12°) = 52°$.
Damit erhält man $\alpha = \beta = 52°;\ \gamma = 180° - 52° - 52° = 76°$.

Lösung der Aufgabe vom LWM 2013

Auch hier kann man zuerst rückwärts rechnen, indem man annimmt, die drei Punkte lägen auf einer Geraden und dann die Winkel berechnet. Es ist dann zwar so, dass man nur keine Widersprüche entdeckt, aber man findet dabei die Sätze, die man bei der Vorwärtsrechnung anwenden muss. Das Ziel beim Rückwärtsrechnen ist, möglichst viele Winkel zu berechnen. Die Vorwärtsrechnung geht dann so: Man nimmt nun nicht an, dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen und verbindet D mit E und F mit E. Wenn man nun die Winkel berechnet und der Winkel zwischen DE und EF 180° ist, dann liegen die Punkte auf einer Geraden.



Die 60°-Winkel ergeben sich, weil die Dreiecke ABE und CBF gleichseitig sind. Die 30°-Winkel erhält man dann aus den 90°-Winkeln des Quadrats ABCD.
Nun wendet man den Basiswinkelsatz in den gleichschenkligen Dreiecken DEA und EFB an und erhält damit den 75°- und den 45°-Winkel. Da die Summe 75°+60°+45° = 180° ergibt, liegen die Punkte D, E und F auf einer Geraden.

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf 5. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Einstieg FEU 5 Min.	L erzählt über den Landeswettbewerb Mathematik, etwas für Mathe-Genies. Sie schaffen das auch. Ziel: Nächstes Schuljahr daran teilnehmen! Aufgabe wird vorgestellt.	Folie oder Schülerblatt
2. Erarbeitung I Wechsel zwischen PA und FEU 15 Min.	Sammlung der in der Geometrie gelernten Sätze. Z.B. L fragt nach gleichschenkligem Dreieck S formulieren den Satz auf Papier L schreibt den Satz an die Tafel und wendet ihn mit den S an einem Beispiel an	Tafel
3. Erarbeitung Stillarbeit 10 Min.	Schluss von α auf φ	Schülerblatt / Heft
4. Ergebnissicherung FEU 10 Min.	Zusammenfassung der durchgeführten Rechnung	Tafel / Heft
5. Erarbeitung PA oder Stillarbeit 15 Min.	Schluss von φ auf α	Schülerblatt / Heft
6. Ergebnissicherung FEU 10 Min.	Zusammenfassung der durchgeführten Rechnung	Tafel / Heft
7. Vertiefung (optional) PA 20 Min	Zusatzaufgabe LWM 2013	Schülerblatt / Heft

Lehrerblatt

Ziele und Voraussetzungen:

Bei „MiniMax“ soll das **Rechnen** (im Kopf bzw. halbschriftlich) – auch mit einfachen **Brüchen und negativen Zahlen** – geübt und wachgehalten werden. Außer den zugehörigen Rechenregeln und der Kenntnis der Vereinbarung „Punkt vor Strich“ gibt es keine Voraussetzungen.
Die Suche nach Minima bzw. Maxima unter diversen Rahmenbedingungen dient dabei als Vehikel und gibt Anlass zu Reflexionen über das erkenntnisgeleitete systematische Probieren auf Schülerseite.

Initialaufgabe 1: Bilde zwei Zahlen

Bilde mit den Ziffern 1; 2; 3; 4; 5 und 6 (jede Ziffer einmal) zwei Zahlen, deren Differenz eine positive Zahl ist, aber möglichst nahe bei Null liegt.
Lösung: 412 – 365 = 47 (bzw. 365 – 412 = -47)
Erkenntnisse, von denen man ausgeht bzw. die sich beim Suchen entwickeln:
- Die beiden Zahlen sollten dreistellig sein.
- Verwende Nachbarzahlen als Hunderterziffern.
- Nimm die 3 und die 4 als Hunderterziffer, damit die großen und die kleinen Ziffern für die Zehner- und die Einerziffer übrig bleiben, um die beiden Zahlen möglichst „nahe zusammen zu rücken“.

Initialaufgabe 2: Bilde aus gegebenen Zahlen und Rechenzeichen einen Zahlterm

Bilde aus den Ziffern 1; 2; 3; 4 und 5 (jede Ziffer einmal) sowie den Rechenzeichen + ; – ; · und : einen Zahlterm, dessen Wert möglichst a) groß ist b) klein ist c) nahe bei Null liegt.
Verlangt ist: Zuerst eine Punktrechnung, dann eine Strichrechnungen, dann wieder eine Punktrechnung und zum Schluss wieder eine Strichrechnung. (Bemerkung: Das grenzt die Sache etwas ein.)
Lösungen:

a) $4 \cdot 5 - 1 : 2 + 3 = 22{,}5$ (die zweitbeste Lösung: $4 \cdot 5 - 1 : 3 + 2 = 21\frac{2}{3}$)

b) $2 : 3 - 4 \cdot 5 + 1 = -18\frac{1}{3}$ (die zweitbeste Lösung: $1 : 3 - 4 \cdot 5 + 2 = -17\frac{2}{3}$)

c) $4 : 2 - 1 \cdot 5 + 3 = 0$ (die zweitbeste Lösung: $4 : 5 - 1 \cdot 3 + 2 = -0{,}2$)

Erkenntnisse, von denen man ausgeht bzw. die sich beim Suchen entwickeln:
- Große Zahlen entstehen bei der Multiplikation großer Zahlen.
- Kleine Zahlen entstehen beim Dividieren mit großem Divisor.
- Wo entfaltet eine große Zahl ihre beste Wirkung? Man muss abwägen bzw. ausprobieren.

Initialaufgabe 3: Einen vorgegebenen Term mit vorgegebenen Zahlen belegen

Belege den Term $\boxed{?+\frac{?-?}{?}}$ *mit den Zahlen -1; 0,5; 2 und 3, sodass der Wert möglichst*
a) groß ist b) klein ist c) nahe bei Null liegt.
Lösungen:

a) $2+\frac{3-(-1)}{0{,}5} = 10$ (die zweitbeste Lösung: $3+\frac{2-(-1)}{0{,}5} = 9$)

b) $2+\frac{(-1)-3}{0{,}5} = -6$ (die zweitbeste Lösung: $3+\frac{(-1)-2}{0{,}5} = -3$)

c) $-1+\frac{3-0{,}5}{2} = 0{,}25$ (die zweitbeste Lösung: $-1+\frac{2-0{,}5}{3} = -0{,}5$)

Erkenntnisse, von denen man ausgeht bzw. die sich beim Suchen entwickeln:
- Subtrahiert man eine negative Zahl, wird die Ausgangszahl größer.
- Dividiert man eine positive Zahl durch eine Zahl zwischen 0 und 1 wird die Ausgangszahl größer.

Punktejagd

1.) Bilde mit den Ziffern 1; 2; 3; 4; 5; 6 und 7 zwei Zahlen, deren Differenz eine positive Zahl ist und möglichst nahe bei Null liegt.

…… – …… = ☐ *(Differenz = 469 → 2 P.; Differenz kleiner als 700 → 1 P.)*

Schreibe zwei Erkenntnisse auf, die wesentlich zur Lösung beitragen.

…… *(1 P.)*

…… *(1 P.)*

2.) Bilde mit den Ziffern 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 und 9 drei dreistellige Zahlen a, b und c,
deren „Differenz“ a – b – c möglichst nahe bei Null liegt.
Die Hunderterziffer von a heißt 9, die von b heißt 6, die von c heißt 3.

…… – …… – …… = ☐ *(Differenz = 0 → 2 P.; Differenz einstellig → 1 P.)*

Schreibe zwei Erkenntnisse auf, die wesentlich zur Lösung beitragen.

…… *(1 P.)*

…… *(1 P.)*

3.) Bilde aus den Zahlen -2; -1,5; 0,5; 1 und 2,5 sowie den Rechenzeichen + ; – ; · und : einen Zahlterm, dessen Wert
a) möglichst groß ist (Tipp: beginne mit -2 · …)
b) möglichst klein ist (Tipp: beginne mit -2 · …)
c) möglichst nahe bei Null liegt (Tipp: beginne mit -2 : 0,5 …).
Verlangt ist dabei: Zuerst eine Punktrechnung, dann eine Strichrechnung, dann eine Punktrechnung usw.

a) …… = ☐
(Wert = 7 → 2 P.; Wert größer als 5 → 1 P.)

b) …… = ☐
(Wert = -9 → 2 P.; Wert kleiner als -7 → 1 P.)

c) …… = ☐
(Wert = 0 → 2 P.; Wert größer als -1 und kleiner als 1 → 1 P.)

Schreibe für 3a) zwei Erkenntnisse auf, die wesentlich zur Lösung beitragen.

…… *(1 P.)*

…… *(1 P.)*

4.) Belege den Term $\boxed{?-\frac{?}{?-?}}$ mit den vier Zahlen -3; 0,5; 2 und 3, sodass der Wert

a) möglichst groß ist (Tipp: beginne mit 3 – …)
b) möglichst klein ist (Tipp: beginne mit -3 – …)
c) möglichst nahe bei Null liegt (Tipp: beginne mit 0,5 – …).

a) ..... = ☐

(Wert = 5 → 2 P.; Wert größer als 3 → 1 P.)

b) ..... = ☐

(Wert = -5 → 2 P.; Wert kleiner als -3 → 1 P.)

c) ..... = ☐

(Wert = -0,1 → 2 P.; Wert größer als -1 und kleiner als 1 → 1 P.)

5.) Belege den Term $\boxed{?\cdot?-\frac{?}{?+?}}$ mit den fünf Zahlen -2; -1,5; 0,5; 1 und 2,5, sodass der Wert

a) möglichst groß ist (Tipp: beginne mit -2 · …)
b) möglichst klein ist (Tipp: beginne mit -2 · …)
c) möglichst nahe bei Null liegt (Tipp: beginne mit 1 · …).

a) ..... = ☐

(Wert = 4 → 2 P.; Wert größer als 2 → 1 P.)

b) ..... = ☐

(Wert = -4 → 2 P.; Wert kleiner als -2 → 1 P.)

c) .... = ☐

(Wert = $\frac{1}{6}$ → 2 P.; Wert größer als -1 und kleiner als 1 → 1 P.)

Maximal: 28 Punkte **Erreicht: ……. Punkte**

28 Punkte	27 Punkte	26 Punkte	25 Punkte	24 Punkte	23 Punkte
Super 😊	Super 😊	Super 😊	Sehr gut 😊	Sehr gut 😊	Sehr gut 😊

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit feU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit kann man zwei Sitzungen dazu verwenden.

Organisatorische Bemerkungen:
- SuS benötigen für die Notation ihrer Versuche viel (!) Konzeptpapier
- !!! L soll die SuS dazu anhalten, zur Vermeidung von Rechenfehlern **den Rechengang ausführlich und kleinschrittig aufzuschreiben**, z.B. so: -2 · 2,5 – (-1,5) : (0,5 + 1) = -5 – (-1,5) : 1,5 = -5 – (-1) = -5 + 1 = -4
- zur Papierersparnis das Schülerblatt beidseitig bedrucken

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Erarbeitung I feU + EA/PA 15 Min.	L stellt die Initialaufgabe 1 vor SuS lösen diese Aufgabe selbständig und formulieren Erkenntnisse, von denen sie sich bei der Lösung haben leiten lassen – vgl. Lehrerblatt. → Lösung und Erkenntnisse werden notiert Zugehörige Aufgaben auf dem Schülerblatt: 1 und 2	Tafel (→) Heft
2. Erarbeitung II feU + EA/PA 15 Min.	L stellt die Initialaufgabe 2 vor – weiter wie in Erarbeitung 1 → Lösung und Erkenntnisse werden notiert Zugehörige Aufgabe auf dem Schülerblatt: 3	Tafel (→) Heft
3. Erarbeitung III feU + EA/PA 15 Min.	L stellt die Initialaufgabe 3 vor – weiter wie in Erarbeitung 1 → Lösung und Erkenntnisse werden notiert Zugehörige Aufgaben auf dem Schülerblatt: 4 und 5	Tafel (→) Heft
4. Übung EA/PA 45 Min.	SuS bearbeiten die Aufgaben des Schülerblattes und machen sich auf die Jagd nach Punkten ☺. Die Suche wird durch die Angabe des optimalen Wertes erleichtert. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend. <u>Lösungen:</u> (zum Teil gibt es mehrere Varianten) 1.) 1234 – 765 = 469 2.) 981 – 657 – 324 = 0 3a) -2 · (-1,5) + 2,5 : 0,5 – 1 = 7 3b) -2 · 2,5 + (-1,5) : 0,5 – 1 = -9 3c) -2 : 0,5 – (-1,5) · 1 + 2,5 = 0 4a) 3 – (-3) : (2 – 0,5) = 5 4b) -3 – 3 : (2 – 0,5) = -5 4c) 0,5 – 3 : (2 – (-3)) = -0,1 5a) -2 · 0,5 – 2,5 : (-1,5 + 1) = 4 5b) -2 · 2,5 – (-1,5) : (0,5 + 1) = -4 5c) 1 · (-1,5) – 2,5 : (-2 + 0,5) = 1/6	Schülerblatt
5. Abschluss feU bzw. PA	Kontrolle: je zwei SuS gegenseitig und/oder im Plenum	

Lehrerblatt

Ziele und Voraussetzungen:

Bei „MiniMax“ soll das **Rechnen** (im Kopf bzw. halbschriftlich) – auch mit einfachen **Brüchen und negativen Zahlen** – geübt und wachgehalten werden. Außer den zugehörigen Rechenregeln und der Kenntnis der Vereinbarung „Punkt vor Strich“ gibt es keine Voraussetzungen. Die Suche nach Minima bzw. Maxima unter diversen Rahmenbedingungen dient dabei als Vehikel und gibt Anlass zu Reflexionen über das erkenntnisgeleitete systematische Probieren auf Schülerseite.

Initialaufgabe 1: Bilde zwei Zahlen

Bilde mit den Ziffern 1; 2; 3; 4; 5 und 6 zwei Zahlen, deren Differenz möglichst nahe bei Null ist.
Lösung: 412 – 365 = 47 (bzw. 365 – 412 = -47)
Erkenntnisse, von denen man ausgeht bzw. die sich beim Suchen entwickeln:
- Die beiden Zahlen sollten dreistellig sein.
- Verwende Nachbarzahlen als Hunderterziffern.
- Nimm die 3 und die 4 als Hunderterziffer, damit die großen und die kleinen Ziffern für die Zehner- und die Einerziffer übrig bleiben, um die beiden Zahlen möglichst „nahe zusammen zu rücken“.

Initialaufgabe 2: Bilde aus gegebenen Zahlen und Rechenzeichen einen Zahlterm

Bilde aus den Zahlen 1; 2; 3; 4 und 5 sowie den Rechenzeichen + ; – ; · und : einen Zahlterm, dessen Wert möglichst a) groß ist b) klein ist c) nahe bei Null liegt.
*Dabei sollen sich Punkt- und Strichrechnungen abwechseln.**
[* Bemerkung: das grenzt die Sache etwas ein.]
Lösungen:

a) $4 \cdot 5 - 1 : 2 + 3 = 22{,}5$ (die zweitbeste Lösung: $4 \cdot 5 - 1 : 3 + 2 = 21\frac{2}{3}$)

b) $2 : 3 - 4 \cdot 5 + 1 = -18\frac{1}{3}$ (die zweitbeste Lösung: $1 : 3 - 4 \cdot 5 + 2 = -17\frac{2}{3}$)

c) $4 : 2 - 1 \cdot 5 + 3 = 0$ (die zweitbeste Lösung: $4 : 5 - 1 \cdot 3 + 2 = -0{,}2$)

Erkenntnisse, von denen man ausgeht bzw. die sich beim Suchen entwickeln:
- Große Zahlen entstehen bei der Multiplikation großer Zahlen.
- Kleine Zahlen entstehen beim Dividieren mit großem Divisor.
- Wo entfaltet eine große Zahl ihre beste Wirkung? Man muss abwägen bzw. ausprobieren.

Initialaufgabe 3: Einen vorgegebenen Term mit vorgegebenen Zahlen belegen

Belege den Term $\boxed{?+\frac{?-?}{?}}$ *mit den Zahlen -1; 0,5; 2 und 3, sodass der Wert möglichst*
a) groß ist b) klein ist c) nahe bei Null liegt.
Lösungen:

a) $2+\frac{3-(-1)}{0{,}5} = 10$ (die zweitbeste Lösung: $3+\frac{2-(-1)}{0{,}5} = 9$)

b) $2+\frac{(-1)-3}{0{,}5} = -6$ (die zweitbeste Lösung: $3+\frac{(-1)-2}{0{,}5} = -3$)

c) $-1+\frac{3-0{,}5}{2} = 0{,}25$ (die zweitbeste Lösung: $-1+\frac{2-0{,}5}{3} = -0{,}5$)

Erkenntnisse, von denen man ausgeht bzw. die sich beim Suchen entwickeln:
- Subtrahiert man eine negative Zahl, wird die Ausgangszahl größer.
- Dividiert man eine positive Zahl durch eine Zahl zwischen 0 und 1 wird die Ausgangszahl größer.

Punktejagd

1.) Bilde mit den Ziffern 1; 2; 3; 4; 5; 6 und 7 zwei Zahlen, deren Differenz möglichst nahe bei Null liegt.

…… – …… = ☐ *(Differenz = 469 → 2 P.; Differenz kleiner als 700 → 1 P.)*

Schreibe zwei Erkenntnisse auf, die wesentlich zur Lösung beitragen.

…… *(1 P.)*

…… *(1 P.)*

2.) Bilde mit den Ziffern 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8 und 9 drei Zahlen a, b und c, deren „Differenz“ a – b – c möglichst nahe bei Null liegt.

…… – …… – …… = ☐ *(Differenz = 0 → 2 P.; Differenz kleiner als 20 → 1 P.)*

Schreibe zwei Erkenntnisse auf, die wesentlich zur Lösung beitragen.

…… *(1 P.)*

…… *(1 P.)*

3.) Bilde aus den Zahlen -2; -1,5; 0,5; 1 und 2,5 sowie den Rechenzeichen + ; – ; · und : einen Zahlterm, dessen Wert möglichst a) groß ist b) klein ist c) nahe bei Null liegt.
Dabei sollen sich Punkt- und Strichrechnungen abwechseln.

a) …… = ☐
(Wert = 7 → 2 P.; Wert größer als 5 → 1 P.)

b) …… = ☐
(Wert = -9 → 2 P.; Wert kleiner als -7 → 1 P.)

c) …… = ☐
(Wert = 0 → 2 P.; Wert größer als -1 und kleiner als 1 → 1 P.)

Schreibe für 3a) zwei Erkenntnisse auf, die wesentlich zur Lösung beitragen.

…… *(1 P.)*

…… *(1 P.)*

4.) Bilde aus den Zahlen -4; -2; -1,5; 0,5 und 3 sowie den Rechenzeichen + ; − ; · und : einen Zahlterm, dessen Wert möglichst a) groß ist b) klein ist c) nahe bei Null liegt.
Dabei sollen sich Punkt- und Strichrechnungen abwechseln.

a) ..... = ☐

(Wert = 15,5 → 2 P.; Wert größer als 13 → 1 P.)

b) ..... = ☐

(Wert = -14,5 → 2 P.; Wert kleiner als -12 → 1 P.)

c) ..... = ☐

(Wert = $-\frac{1}{12}$ → 2 P.; Wert größer als -1 und kleiner als 1 → 1 P.)

Schreibe für 4b) zwei Erkenntnisse auf, die wesentlich zur Lösung beitragen.

..... *(1 P.)*

..... *(1 P.)*

5.) Belege den Term $\boxed{?-\frac{?}{?-?}}$ mit den vier Zahlen -3; 0,5; 2 und 3, sodass der Wert möglichst
a) groß ist b) klein ist c) nahe bei Null liegt.

a) ..... = ☐

(Wert = 5 → 2 P.; Wert größer als 3 → 1 P.)

b) ..... = ☐

(Wert = -5 → 2 P.; Wert kleiner als -3 → 1 P.)

c) ..... = ☐

(Wert = -0,1 → 2 P.; Wert größer als -1 und kleiner als 1 → 1 P.)

6.) Belege den Term $\boxed{?\cdot?-\frac{?}{?+?}}$ mit den fünf Zahlen -2; -1,5; 0,5; 1 und 2,5, sodass der Wert möglichst
a) groß ist b) klein ist c) nahe bei Null liegt.

a) ..... = ☐

(Wert = 4 → 2 P.; Wert größer als 2 → 1 P.)

b) ..... = ☐

(Wert = -4 → 2 P.; Wert kleiner als -2 → 1 P.)

c) .... = ☐

(Wert = $\frac{1}{6}$ → 2 P.; Wert größer als -1 und kleiner als 1 → 1 P.)

Maximal: 36 Punkte **Erreicht: ..... Punkte**

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Je nach zur Verfügung stehender Zeit wird man an geeigneten Stellen kürzen.

Organisatorische Bemerkungen:
- SuS benötigen für die Notation ihrer Versuche viel (!) Konzeptpapier
- !!! L soll die SuS dazu anhalten, zur Vermeidung von Rechenfehlern **den Rechengang ausführlich und kleinschrittig aufzuschreiben**, z.B. so: -2 · 2,5 – (-1,5) : (0,5 + 1) = -5 – (-1,5) : 1,5 = -5 – (-1) = -5 + 1 = -4
- zur Papierersparnis das Schülerblatt beidseitig bedrucken

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Erarbeitung I FEU + EA/PA 15 Min.	L stellt die Initialaufgabe 1 vor SuS lösen diese Aufgabe selbständig und formulieren Erkenntnisse, von denen sie sich bei der Lösung haben leiten lassen – vgl. Lehrerblatt. → Lösung und Erkenntnisse werden notiert	Tafel (→) Heft
2. Erarbeitung II FEU + EA/PA 15 Min.	L stellt die Initialaufgabe 2 vor SuS lösen diese Aufgabe selbständig und formulieren Erkenntnisse, von denen sie sich bei der Lösung haben leiten lassen – vgl. Lehrerblatt. → Lösung und Erkenntnisse werden notiert	Tafel (→) Heft
3. Erarbeitung III FEU + EA/PA 15 Min.	L stellt die Initialaufgabe 3 vor SuS lösen diese Aufgabe selbständig und formulieren Erkenntnisse, von denen sie sich bei der Lösung haben leiten lassen – vgl. Lehrerblatt. → Lösung und Erkenntnisse werden notiert	Tafel (→) Heft
4. Übung EA/PA 30 Min.	SuS bearbeiten die Aufgaben des Schülerblattes und machen sich auf die Jagd nach Punkten ☺. Die Suche wird durch die Angabe des optimalen Wertes erleichtert. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend. <u>Lösungen:</u> (manchmal existieren mehrere Varianten zum gleichen Ergebnis) 1.) 1234 – 765 = 469 2.) 981 – 657 – 324 = 0 3a) -2 · (-1,5) + 2,5 : 0,5 – 1 = 7 3b) -2 · 2,5 + (-1,5) : 0,5 – 1 = -9 3c) -2 : 0,5 – (-1,5) · 1 + 2,5 = 0 4a) -4 · (-2) + 3 : 0,5 – (-1,5) = 15,5 4b) -4 · 3 + (-2) : 0,5 – (-1,5) = -14,5 4c) 0,5 · (-1,5) + (-4) : 3 – (-2) = - 1/12 (schwierig!) 5a) 3 – (-3) : (2 – 0,5) = 5 5b) -3 – 3 : (2 – 0,5) = -5 5c) 0,5 – 3 : (2 – (-3)) = -0,1 (schwierig!) 6a) -2 · 0,5 – 2,5 : (-1,5 + 1) = 4 (schwierig!) 6b) -2 · 2,5 – (-1,5) : (0,5 + 1) = -4 6c) 1 · (-1,5) – 2,5 : (-2 + 0,5) = 1/6 (schwierig!)	Schülerblatt
5. Abschluss FEU bzw. PA 10 Min.	Kontrolle: je zwei SuS gegenseitig und/oder im Plenum	

Lehrerblatt

Voraussetzung und Ziel:

Voraussetzung ist, dass die Unterrichtseinheit *Lineare Funktionen* im Regelunterricht behandelt wurde. Absicht ist, das Wissen der SuS über lineare Funktionen – auf andere Funktionen übertragbar – zu strukturieren und aus dieser Struktur die typischen Fragestellungen abzuleiten und zu üben.

Struktur:

Am Beispiel der linearen Funktionen wird zunächst exemplarisch erarbeitet (bzw. wiederholt), wie man bei der **Strukturierung eines mathematischen Sachverhaltes** vorgehen kann – **4 Schritte**, s.u.
Ein Transfer in außermathematische Gebiete ist nicht ausgeschlossen.

1. Worum es geht:
Es werden Zusammenhänge zwischen zwei Größen x und y der Form y = m·x + c betrachtet. Diese Zuordnung heißt lineare Funktion.

2. Begriffe:
Funktionsgleichung y = m·x + c, der Graph ist eine Gerade, m … Steigung der Geraden,
c … y-Achsenabschnitt der Geraden, Steigungsdreieck, Wertetabelle

3. Zusammenhänge / Grundaufgaben:
Die vier – insbesondere für die Schule – typischen relevanten Repräsentationsformen einer Funktion sind: Symbol, Tabelle, Graph und Sprache. Ein Beispiel:

Symbol:

y = 2·x + 3

Sprache:

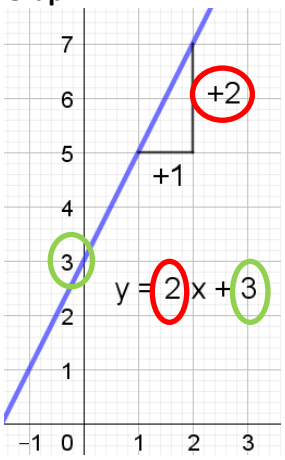
Der y-Wert ist das Doppelte des x-Wertes vermehrt um 3.

Wertetabelle:

x:	-2	-1	0	1	2	3	4
y:	-1	1	3	5	7	9	11

(+1 … +1 … +2)

Graph:



Die typischen Aufgaben behandeln die Übergänge zwischen den vier Formen.

- Steigung = Erhebung bei Fortgang 1 (ein Element der didaktischen Reduktion: Hilfsbegriffe!)
- y-Achsenabschnitt = Stelle an der die Gerade die y-Achse schneidet

Einsatz von Farben zur Identifikation von Steigung und y-Achsenabschnitt in allen vier Repräsentationsformen

4. Schwierigkeiten:
Diese können inhaltlicher, algebraischer oder rechentechnischer Natur sein.
Insbesondere herausfordernd ist, dass bei den vier Repräsentationsformen die rekursive Sicht der Steigung (additiv: Erhebung +2 bei Fortgang +1) und die explizite Sicht (multiplikativ: „das Doppelte des x-Wertes“) nebeneinander thematisiert wird.
Man wird die in der Reflexion genannten Punkte der Schülerinnen und Schülern (vgl. Ablaufplan) geeignet notieren.

Kringle die richtige Antwort ein. Wenn du die zugehörigen Buchstaben in die **richtige Reihenfolge** bringst, so ergibt sich der **Name einer Stadt nahe bei Stuttgart**.

1.) Gegeben ist die lineare Funktion mit der Gleichung $y = 1{,}5 \cdot x - 5$. Fülle die Wertetabelle aus:

x:	-2	-1	0	5	12	86
y:						

Die Summe der eingetragenen y-Werte ist: 118 (**P**) 119 (**T**) 120 (**N**) 121 (**A**)

2.) Der y-Wert ist die Hälfte des x-Wertes vermehrt um 3. Gib die Gleichung der linearen Funktion an.

$y = 2 \cdot x + 3$ (**W**) $y = 3 \cdot x + 0{,}5$ (**R**) $y = 3 \cdot x + 1{,}5$ (**B**) $y = 0{,}5 \cdot x + 3$ (**E**)

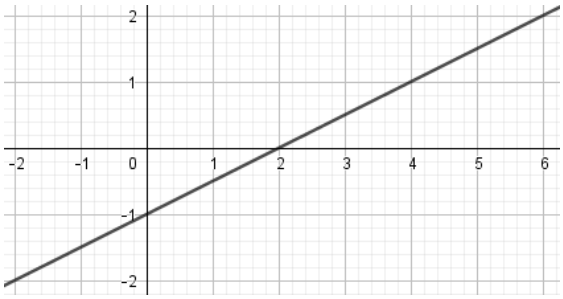
3.) Eine Gerade hat die Steigung -2 und den y-Achsenabschnitt 2. Wie lautet die zugehörige Gleichung?

$y = 2 \cdot x - 2$ (**H**) $y = -2 \cdot x - 2$ (**D**) $y = 2 \cdot x + 2$ (**M**) $y = -2 \cdot x + 2$ (**N**)

4.) Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $y = 3 \cdot x - 4$.
Gib die Steigung m und den y-Achsenabschnitt c der Geraden g an.

m = 3 und c = -3 (**I**) m = 3 und c = -4 (**D**) m = -4 und c = 3 (**K**) m = 3 und c = 4 (**O**)

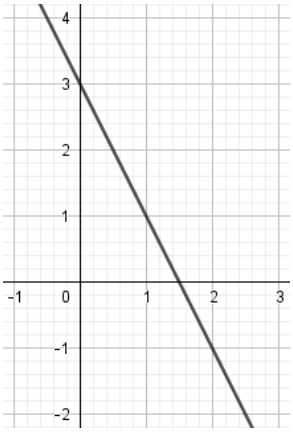
5.) Wie lautet die zugehörige Gleichung?



$y = 2 \cdot x - 1$ (**J**) $y = -x + 2$ (**B**)

$y = 0{,}5 \cdot x - 1$ (**S**) $y = -0{,}5 \cdot x - 1$ (**U**)

6.) Wie lautet die zugehörige Gleichung?

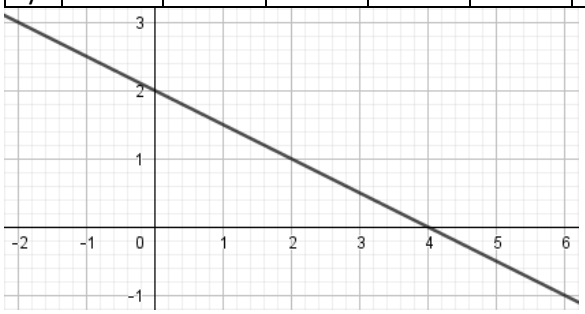


$y = 3 \cdot x + 1{,}5$ (**O**) $y = -3 \cdot x + 1{,}5$ (**K**)

$y = 2 \cdot x + 3$ (**L**) $y = -2 \cdot x + 3$ (**I**)

7.) Fülle mithilfe des Graphen die Wertetabelle aus:

x:	-2	-1	0	1	2	3
y:						



Die Summe der eingetragenen y-Werte ist: 9,5 (**M**) 10,5 (**N**) 11,5 (**P**) 12,5 (**Z**)

8.) Gegeben ist die Wertetabelle einer linearen Funktion. Gib die Funktionsgleichung an: y = ……

X:	-2	-1	0	1	2	3
Y:	-5,5	-2	1,5	5	8,5	12

Addiere Steigung und y-Achsenabschnitt und subtrahiere den y-Achsenabschnitt von der Steigung.

Multipliziere dann diese beiden Zahlen und du erhältst: 3,5 (**U**) 5 (**M**) 10 (**I**) 25 (**W**)

9.) Wenn man bei irgendeiner linearen Funktion y = m·x + c irgendeinen x-Wert um 1 erhöht, dann erhöht sich der zugehörige y-Wert immer …

… auch um 1 (**C**) … um die Steigung m (**F**) … um den y-Achsenabschnitt c (**A**) … um den x-Wert (**K**)

10.) Gegeben ist die Wertetabelle einer linearen Funktion. Gib die Funktionsgleichung an: y = ……

x:	1	2	3	6	8
y:	1,75	1,5	1,25	0,5	0

Multipliziere Steigung und y-Achsenabschnitt und dividiere den y-Achsenabschnitt durch die Steigung.

Addiere dann diese beiden Zahlen und du erhältst: -8,5 (**E**) -8 (**S**) -0,25 (**T**) 2 (**U**)

11.) Gegeben ist die Wertetabelle einer linearen Funktion. Fülle die freien Kästchen aus.

x:	-1	0	2	5		
y:	-14	-10	-2		22	70

Die Summe der drei eingetragenen Zahlen ist: 30 (**E**) 38 (**L**) 46 (**F**) 50 (**N**)

12.) Eine Gerade hat die Steigung 1,5 und den y-Achsenabschnitt -2. Suche die zugehörige Gleichung.

y = 1,5 – 2·x (**S**) y = 2 – 1,5·x (**P**) y = -2 + x·1,5 (**G**) y = -1,5·x – 2 (**H**)

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit feU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Erarbeitung feU 15 Min.	L stellt das Thema vor: *Wie man das Thema Lineare Funktionen in vier Schritten erfassen kann – anschließend spielerisches Üben* L entwickelt und notiert mit den SuS zunächst die Strukturierungs-Punkte 1. bis 3. (*1. Worum es geht | 2. Begriffe | 3. Zusammenhänge / Grundaufgaben* – vgl. Lehrerblatt) in geeigneter Zusammenfassung und holt sich dabei möglichst viele Informationen von den SuS. Für die allgemeine Strategie der Strukturierung ist hier zentral die Visualisierung der Zusammenhänge in den verschiedenen Repräsentationsformen mithilfe von Farben, z.B. y-Achsenabschnitt → grün, Steigung → rot. L variiert das Beispiel $y = 2 \cdot x + 3$ mündlich (ggf. an der Konzepttafel!), insbesondere auch im Hinblick auf negative Werte von m und c. SuS sagen nach Aufforderung des L voraus, welche Aufgaben jetzt auf dem Schüler-Arbeitsblatt „kommen müssen“.	Tafel / Heft
2. Übung EA/PA 25 Min.	SuS bearbeiten das Schülerblatt und suchen das Lösungswort (SINDELFINGEN) L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt
3. Reflexion feU 5 Min.	SuS reflektieren über Schwierigkeiten und „Stolperfallen“ bei der Bearbeitung des Schülerarbeitsblattes. Diese werden in geeigneter Form unter dem Punkt 4. der Strukturierung (*4. Schwierigkeiten* – vgl. Lehrerblatt) notiert.	Tafel / Heft

Lehrerblatt

Voraussetzung und Ziel:

Voraussetzung ist, dass die Unterrichtseinheit Lineare Funktionen im Regelunterricht behandelt wurde. Absicht ist, das Wissen der SuS über lineare Funktionen – auf andere Funktionen übertragbar – zu strukturieren und aus dieser Struktur die typischen Fragestellungen abzuleiten und zu üben.

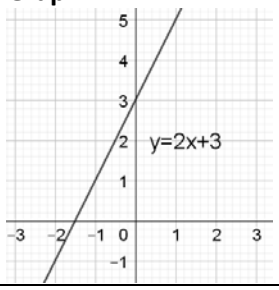
Struktur:

Am Beispiel der Lineare Funktionen wird zunächst exemplarisch erarbeitet (bzw. wiederholt), wie man bei der **Strukturierung* eines mathematischen Sachverhaltes** vorgehen kann – **5 Schritte**, s.u.
Ein Transfer in außermathematische Gebiete ist nicht ausgeschlossen.

1. Worum es geht:
Es werden Zusammenhänge zwischen zwei Größen x und y der Form y = m·x + c betrachtet. Diese Zuordnung heißt lineare Funktion.

2. Begriffe:
Funktionsgleichung, Graph, Steigung einer Geraden, Steigungsdreieck, y-Achsenabschnitt, Wertetabelle

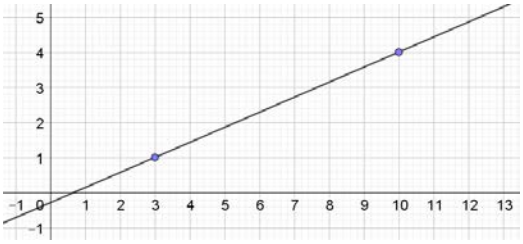
3. Zusammenhänge / Grundaufgaben:
Die vier – insbesondere für die Schule – typischen relevanten Repräsentationsformen einer Funktion sind: Symbol, Tabelle, Graph und Sprache. Ein Beispiel:

Symbol:	**Graph:**
y = 2·x + 3	
Sprache:	
Der y-Wert ist das Doppelte des x-Wertes vermehrt um 3.	
Wertetabelle:	

x:	-2	-1	0	1	2	3	4
y:	-1	1	3	5	7	9	11

Die typischen Aufgaben behandeln die Übergänge zwischen den vier Formen.
Steigung = Erhebung bei Fortgang 1 (ein Element der didaktischen Reduktion: Hilfsbegriffe!)
y-Achsenabschnitt = Stelle, an der die Gerade die y-Achse schneidet
Visualisierung an der Wertetabelle: ***mit kleinen Pfeilen*** *von einer Zahl zur nächsten eintragen: oben → „+1“; unten → „+m“*
Visualisierung im Koordinatensystem: entsprechendes ***Steigungsdreieck*** *an beliebiger Stelle (!)*
Einsatz von Farben *zur Identifikation von Steigung und y-Achsenabschnitt in Gleichung, Wertetabelle und Graph*

4. Schwierigkeiten:
Trick bei der Genauigkeit beim Ablesen:
Suche nach Gitterpunkten.
Am Beispiel rechts: P(3|1) und Q(10|4),
Erhebung 3 bei Fortgang 7, also Steigung m = $\frac{3}{7}$



5. Weiterführende Aufgaben:

Geradengleichung aus 2 Punkten P(x_1|y_1) und P(x_2|y_2): Steigung m = $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

(Merke: „Y durch X“ – entgegen der alphabetischen Reihenfolge!)
y-Achsenabschnitt c bestimmen: durch Vor- oder Rückwärtsschreiten von einem der beiden Punkte aus.

Kringle die richtige Antwort ein. Wenn du die zugehörigen Buchstaben in die **richtige Reihenfolge** bringst, so ergibt sich der **Name einer Stadt nahe bei Stuttgart**.

1.) Gegeben ist die lineare Funktion mit der Gleichung $y = 1{,}5 \cdot x - 5$. Fülle die Wertetabelle aus:

x:	-2	-1	0	5	12	86
y:						

Die Summe der eingetragenen y-Werte ist: 118 (**P**) 119 (**T**) 120 (**N**) 121 (**A**)

2.) Der y-Wert ist die Hälfte des x-Wertes vermehrt um 3. Gib die Gleichung der linearen Funktion an.

$y = 2 \cdot x + 3$ (**W**) $y = 3 \cdot x + 0{,}5$ (**R**) $y = 3 \cdot x + 1{,}5$ (**B**) $y = 0{,}5 \cdot x + 3$ (**E**)

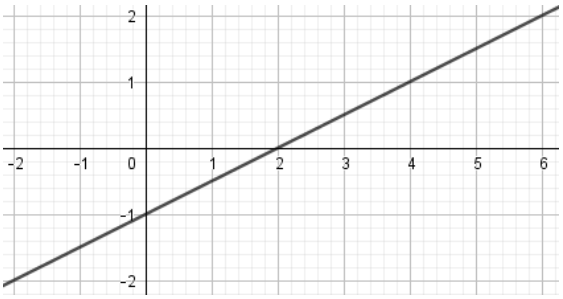
3.) Eine Gerade hat die Steigung -2 und den y-Achsenabschnitt 2. Wie lautet die zugehörige Gleichung?

$y = 2 \cdot x - 2$ (**H**) $y = -2 \cdot x - 2$ (**D**) $y = 2 \cdot x + 2$ (**M**) $y = -2 \cdot x + 2$ (**N**)

4.) Gegeben ist die Gerade g mit der Gleichung $y = 3 \cdot x - 4$.
Gib die Steigung m und den y-Achsenabschnitt c der Geraden g an.

m = 3 und c = -3 (**I**) m = 3 und c = -4 (**D**) m = -4 und c = 3 (**K**) m = 3 und c = 4 (**O**)

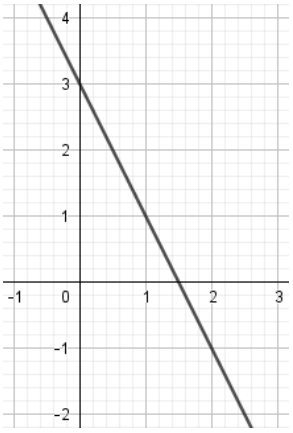
5.) Wie lautet die zugehörige Gleichung?



$y = 2 \cdot x - 1$ (**J**) $y = -x + 2$ (**B**)

$y = 0{,}5 \cdot x - 1$ (**S**) $y = -0{,}5 \cdot x - 1$ (**U**)

6.) Wie lautet die zugehörige Gleichung?

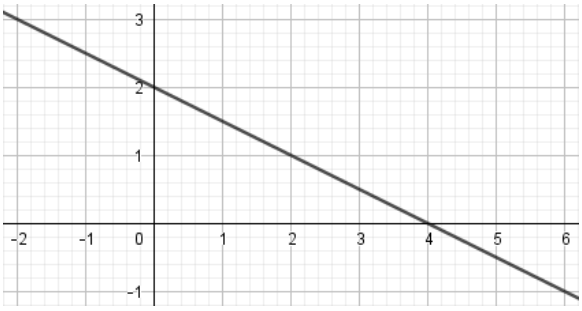


$y = 3 \cdot x + 1{,}5$ (**O**) $y = -3 \cdot x + 1{,}5$ (**K**)

$y = 2 \cdot x + 3$ (**L**) $y = -2 \cdot x + 3$ (**I**)

7.) Fülle mithilfe des Graphen die Wertetabelle aus:

x:	-2	-1	0	1	2	3
y:						



Die Summe der eingetragenen y-Werte ist: 9,5 (**M**) 10,5 (**N**) 11,5 (**P**) 12,5 (**Z**)

8.) Gegeben ist die Wertetabelle einer linearen Funktion. Gib die Funktionsgleichung an: y = ……

X:	-2	-1	0	1	2	3
Y:	-5,5	-2	1,5	5	8,5	12

Addiere Steigung und y-Achsenabschnitt und subtrahiere den y-Achsenabschnitt von der Steigung.

Multipliziere dann diese beiden Zahlen und du erhältst: 3,5 (**U**) 5 (**M**) 10 (**I**) 25 (**W**)

9.) Wenn man bei irgendeiner linearen Funktion y = m·x + c irgendeinen x-Wert um 1 erhöht, dann erhöht sich der zugehörige y-Wert immer …

… auch um 1 (**C**) … um die Steigung m (**F**) … um den y-Achsenabschnitt c (**A**) … um den x-Wert (**K**)

10.) Gegeben ist die Wertetabelle einer linearen Funktion. Gib die Funktionsgleichung an: y = ……

x:	1	2	3	6	8
y:	1,75	1,5	1,25	0,5	0

Multipliziere Steigung und y-Achsenabschnitt und dividiere den y-Achsenabschnitt durch die Steigung.

Addiere dann diese beiden Zahlen und du erhältst: -8,5 (**E**) -8 (**S**) -0,25 (**T**) 2 (**U**)

11.) Gegeben ist die Wertetabelle einer linearen Funktion. Fülle die freien Kästchen aus.

x:	-1	0	2	5		
y:	-14	-10	-2		22	70

Die Summe der drei eingetragenen Zahlen ist: 30 (**E**) 38 (**L**) 46 (**F**) 50 (**N**)

12.) Eine Gerade hat die Steigung 1,5 und den y-Achsenabschnitt -2. Suche die zugehörige Gleichung.

y = 1,5 – 2·x (**S**) y = 2 – 1,5·x (**P**) y = -2 + x·1,5 (**G**) y = -1,5·x – 2 (**H**)

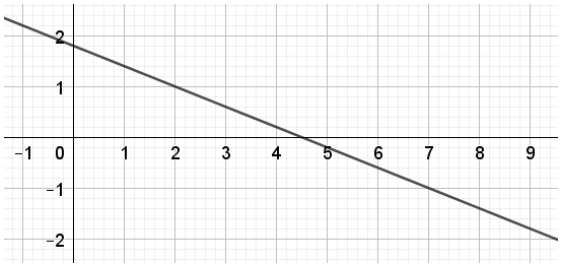
Kringle die richtige Antwort ein. Wenn du die zugehörigen Buchstaben in die **richtige Reihenfolge** bringst, so ergibt sich der **Name eines Tieres**.

1.) Bestimme die Steigung der Geraden.

$m = \frac{4}{3}$ (**Z**) $m = \frac{1}{3}$ (**E**)

m = 3 (**L**) m = 0,3 (**P**)

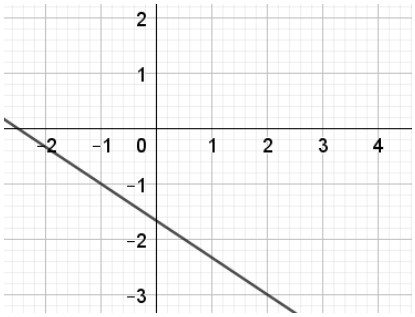
2.) Bestimme die Steigung der Geraden.



m = 5 (**B**) m = 0,4 (**T**)

m = 2,5 (**F**) m = -0,4 (**E**)

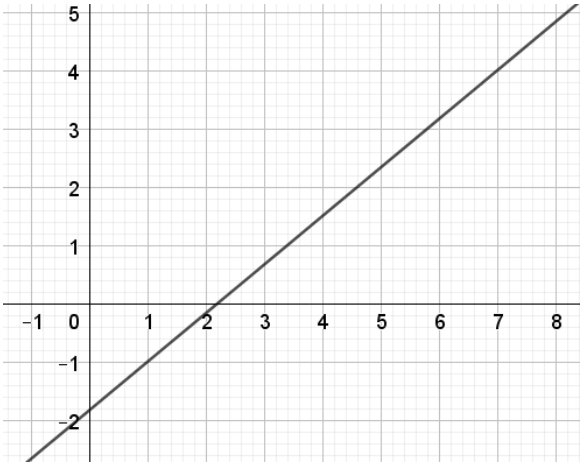
3.) Bestimme den y-Achsenabschnitt der Geraden.



$c = -\frac{2}{3}$ (**R**) $c = -\frac{5}{3}$ (**I**)

c = -1,7 (**K**) $c = -\frac{3}{2}$ (**H**)

4.) Bestimme den y-Achsenabschnitt der Geraden.



c = -1,8 (**N**) $c = -\frac{13}{7}$ (**M**)

$c = -\frac{17}{9}$ (**A**) $c = -\frac{11}{6}$ (**L**)

5.) Bestimme die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte P(1|5) und Q(6|4).

y = -0,2·x + 5,2 (**S**) y = 0,2·x + 5 (**F**) y = -0,2·x + 4,8 (**J**) y = -5·x + 10 (**O**)

6.) Bestimme die Gleichung der Geraden durch die beiden Punkte P(-2|-3) und Q(8|0).

y = -0,3·x + 3 (**U**) y = 0,3·x – 3 (**D**) y = 0,3·x – 2,4 (**W**) y = -0,3·x + 2,4 (**K**)

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird man die 3. und 4. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Erarbeitung I FEU 15 Min.	L stellt das Thema vor: *Wie man das Thema Lineare Funktionen in fünf Schritten erfassen kann – anschließend spielerisches Üben* L entwickelt und notiert mit den SuS zunächst die Punkte 1. bis 3. (vgl. Lehrerblatt) in geeigneter Zusammenfassung und holt sich dabei möglichst viele Informationen von den SuS. Für die allgemeine Strategie der Strukturierung ist hier zentral die Visualisierung der Zusammenhänge in den verschiedenen Repräsentationsformen mithilfe von Farben, z.B. y-Achsenabschnitt → grün, Steigung → rot. L variiert das Beispiel $y = 2 \cdot x + 3$ mündlich (ggf. an der Konzepttafel!), insbesondere auch im Hinblick auf negative Werte von m und c. SuS sagen nach Aufforderung des L voraus, welche Aufgaben jetzt auf dem Schüler-Arbeitsblatt „kommen müssen“.	Tafel / Heft
2. Übung I EA/PA 25 Min.	SuS bearbeiten das Schülerblatt 1 und suchen das Lösungswort (SINDELFINGEN) L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt 1
3. Erarbeitung II FEU 15 Min.	L entwickelt und notiert mit den SuS nun die Punkte 4. und 5. des Lehrerblattes mit dem angegebenen Beispiel $y = \frac{3}{7} \cdot x - \frac{2}{7}$ und holt sich dabei möglichst viele Informationen von den SuS. Die allgemeine Steigungsformel wird an diesem Beispiel entwickelt. Der y-Achsenabschnitt c wird nicht durch eine Punkteprobe bestimmt, sondern anschaulich durch Vor- oder Rückwärtsschreiten. Am Beispiel – Bewegung zur y-Achse hin: von P aus 3 Schritte nach links und damit 3mal $\frac{3}{7}$ nach unten. Es ergibt sich der Geradenpunkt $R(-\frac{2}{7}\|0)$.	Tafel / Heft
4. Übung II EA/PA 25 Min.	SuS bearbeiten das Schülerblatt 2 und suchen das Lösungswort (WIESEL) L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt 2

Lehrerblatt

Voraussetzung und Ziel:

Voraussetzung ist, dass die Unterrichtseinheit *Lineare Gleichungen* im Regelunterricht behandelt wurde. Absicht ist, das Wissen der SuS über lineare Gleichungen – auf andere Gleichungen übertragbar – zu strukturieren und aus dieser Struktur die typischen Fragestellungen abzuleiten und zu üben.

Struktur:

Am Beispiel der Linearen Gleichungen wird zunächst exemplarisch erarbeitet (bzw. wiederholt), wie man bei der **Strukturierung eines mathematischen Sachverhaltes** vorgehen kann – **vier Schritte**, s.u. Ein Transfer in außermathematische Gebiete ist nicht ausgeschlossen.

1. Worum es geht:
Gegeben ist eine Gleichung wie zum Beispiel $5 \cdot x + 6 = 7 \cdot x - 8$. Gesucht ist die Zahl, die man für x setzen muss, damit das Gleichheitszeichen stimmt. Das ist hier die Zahl 7, man könnte sie auch durch geschicktes Probieren erhalten.

Solche Gleichungen heißen linear, nicht lineare Gleichungen wären z. B. $3 \cdot x^2 + 5 = 7 \cdot x$ oder $\frac{5}{x} + 7 = 8$.

2. Begriffe:
Gleichung, Äquivalenzumformung, Lösung, Probe

3. Zusammenhänge / Grundaufgaben:
Äquivalenzumformungen lassen die Lösung der Gleichung unverändert:
- auf beiden Seiten dieselbe Zahl oder denselben Term addieren oder subtrahieren
- auf beiden Seiten mit derselben Zahl multiplizieren oder durch dieselbe Zahl ($\neq 0$) dividieren

Ziel ist durch „Sortieren“, in mehreren Schritten zur Form Zahl = x oder x = Zahl zu kommen.
Beachte: In linearen Gleichungen gibt es zwei Sorten von Summanden, Vielfache von x (wie z.B. $5 \cdot x$ oder $7 \cdot x$) und Zahlen (wie z. B. 6 oder 8).
Vielfache von x kann man untereinander zusammenfassen (z.B. $7 \cdot x - 5 \cdot x = 2 \cdot x$), dasselbe gilt für Zahlen (z.B. 6 + 8 = 14). In der Mischung geht das nicht (z.B. ist $5 \cdot x + 6$ nicht $11 \cdot x$)!

Ein Beispiel mit Erläuterung:

Gleichung:	**Befehl (nach dem Befehlstrich |):**	**Erläuterung:**
$5 \cdot x + 6 = 7 \cdot x - 8$ $< 5 \cdot x - 5 \cdot x + 6 = 7 \cdot x - 5 \cdot x - 8 >$	$\| - 5 \cdot x$	Vielfache von x sollen nur noch auf einer Seite der Gleichung vorkommen
$6 = 2 \cdot x - 8$ $< 6 + 8 = 2 \cdot x - 8 + 8 >$	$\| + 8$	Zahlen ohne x sollen nur noch auf der anderen Seite der Gleichung vorkommen
$14 = 2 \cdot x$	$\| : 2$	Letzter Schritt zur Form Zahl = x oder x = Zahl
$7 = x$		Ziel erreicht
Lösung: 7		Lösung aufschreiben
Probe:		Für x die Zahl 7 einsetzen, getrennt nach Seite
linke Seite: $5 \cdot 7 + 6 = 35 + 6 = 41$		Getrennt nach linker und rechter Seite (Abkürzung „l.S.“ und „r.S.“)
rechte Seite: $7 \cdot 7 - 8 = 49 - 8 = 41$		Ergibt sich dieselbe Zahl darf man hinter „Probe:“ einen Haken machen ☺

4. Schwierigkeiten:
- beim Termumformen
- beim Rechnen

Didaktischer Kommentar

Das Umformen von linearen Termen und das **Lösen von linearen Gleichungen** gilt für Schüler der Klasse 7 anerkanntermaßen als **schwierig**. Vielen von ihnen erscheint das Hantieren mit Variablen und Zeichen – vom bekannten Umgang mit Zahltermen losgelöst – undurchsichtig und fehleranfällig.
In der Tat kann man bei der Lösung der Gleichung $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x$ auf unterschiedliche Weise korrekt vorgehen, auf überraschend vielfältige Weise aber Fehler machen, vgl. Aufgabe 3 und 4 auf dem Schülerblatt. Es ist wichtig, sich dies als Lehrender, der die Sache beherrscht, bewusst zu machen.
Bei keinem Teilgebiet der Schulmathematik fragt sich der Lehrende, was daran „um Gottes Willen" so schwierig sein soll. Also: Geduld, Verständnis und Langmut ☺.

Hat man mit linearen Termen zu tun, ist ein **häufig anzutreffender Fehler** die Zusammenfassung von $a\cdot x + b$ zu $(a+b)\cdot x$, zum Beispiel $3\cdot x + 7 = 10\cdot x$. Dies ist insbesondere dann verführerisch, wenn a + b eine Stufenzahl ist.
Auf dem Lehrerblatt wird deshalb von zwei Sorten von Elementen gesprochen und diese Unterscheidung mit Hilfe von Farben visualisiert. Dies ist natürlich die unterste Stufe der didaktischen Reduktion. Eine höhere Erkenntnisstufe wäre die Erinnerung, dass bei einer gültigen Termumformung die Gleichheit für beliebige Zahl-Einsetzungen richtig sein muss. Man denke sich gerne also etwas „Extremes" für x, zum Beispiel die Zahl 100 (und nicht gerade die Zahl 1 ☺).
Vereinbarungsgemäß lässt man bei der Verknüpfung von Zahl und Variable den Malpunkt gerne weg. Das kann man auch hier tun. Für das Schreiben des Malpunktes spricht die Verdeutlichung der beiden unterschiedlichen Elementsorten.

Alle Schulbücher bemühen für das Kalkül der Gleichungslösung durch Äquivalenzumformungen das **Waage-Modell**, um die Prozesse des „auf beiden Seiten der Gleichung dasselbe tun" und des „schrittweisen Abräumens zur Trennung der beiden Element-Sorten", zu veranschaulichen und zu begründen. Gerne wird man auch in der Mkid-Stunde zu den linearen Gleichungen an diese Vorstellungswelt anknüpfen, trotz des engen Gültigkeitsrahmens dieses Modells.
Ein weiteres Element der didaktischen Reduktion ist das implizite Postulat der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

In unterschiedlichen Schulbüchern wird die **Probe** unterschiedlich stark betont. Aus unserer Sicht kann man vor allem aus erkenntnistheoretischer Sicht deren Wert gar nicht überschätzen.
Die Erziehung zur Stellung der Frage „Stimmt das?" bzw. „Kann das sein?" ist eine grundsätzlich wichtige, weit über das Feld der Mathematik hinaus.
Aus diesem Grund wird im Aufgabenblatt für die Schüler die Probe ausgiebig thematisiert.

Bei der **Notation der Gleichungslösung** kann man – im Falle von Schwierigkeiten – eine Zwischenzeile notieren, so dass der auszuführende Befehl zunächst auf beiden Seiten notiert und erst im nächsten Schritt ausgerechnet wird, vgl. Lehrerblatt im Beispiel zur Erläuterung

$5\cdot x + 6 = 7\cdot x - 8 \quad | - 5\cdot x$
$< 5\cdot x - 5\cdot x + 6 = 7\cdot x - 5\cdot x - 8 >$
$6 = 2\cdot x - 8$

Noch ausführlicher wäre unter Bewusstmachung des Kommutativgesetztes der Addition:

$5\cdot x + 6 = 7\cdot x - 8 \quad | - 5\cdot x$
$< 5\cdot x + 6 - 5\cdot x = 7\cdot x - 8 - 5\cdot x >$
$< 5\cdot x - 5\cdot x + 6 = 7\cdot x - 5\cdot x - 8 >$
$6 = 2\cdot x - 8$

Beide Zielformen, nämlich x = Zahl und Zahl = x, sind zugelassen, die davon getrennte Notation der Lösung „Lösung: …" ist vereinbart, ebenso die Notation der auszuführende „Befehle" hinter dem so genannten Befehlstrich „|".

1.) **Löse die Gleichung** und **mache die Probe**.
Trage jeweils in die Tabelle unten ein: zuerst die Lösungszahl und dann den gemeinsamen Wert der linken Seite und der rechten Seite der Gleichung bei der Probe mit der Lösungszahl.

a) $5 \cdot x + 4 = 19$ b) $6 \cdot x - 5 = 13 + 3 \cdot x$ c) $5 - 4 \cdot x = 9 \cdot x + 18$

d) $3 \cdot x - 8{,}5 = 1{,}5 - x$ e) $x + 2{,}5 \cdot x - 4{,}5 = 6{,}5 - x \cdot 2$ f) $3 \cdot y + 4 + 5 \cdot y = 6 + 7 \cdot y + 8$

2.) Ahmed, Bertram und Cecil lösen die Gleichung $3 \cdot (4 + 3 \cdot x) + 9 = 28 + (5 \cdot x - 25) \cdot (-2)$.
Lösungszahl von Ahmed: 1, Lösungszahl von Bertram: 2, Lösungszahl von Cecil: 3.
Finde heraus wer Recht hat, ohne dass du die Gleichung selbst löst.
Trage die richtige Lösungszahl in die Tabelle unten ein.

3.) Alle vier Versuche zur Lösung der Gleichung $5 \cdot x - 6 = 12 + 3 \cdot x$ enthalten einen Fehler.
Kringle den falsch ausgeführten Befehl nach dem Befehlstrich **ein** und trage die zugehörige Zahl ohne Rechenzeichen oder „x“ (Beispiel: „– 3·x“ → „3“ oder „– 2“ → „2“) in die Tabelle unten ein.

a) $5 \cdot x - 6 = 12 + 3 \cdot x$ | $- 6$ $5 \cdot x = 6 + 3 \cdot x$ | $- 3 \cdot x$ $2 \cdot x = 6$ | $: 2$ $x = 3$ Lösung: 3	b) $5 \cdot x - 6 = 12 + 3 \cdot x$ | $+ 6$ $5 \cdot x = 18 + 3 \cdot x$ | $- 3 \cdot x$ $2 \cdot x = 18$ | $- 2$ $x = 16$ Lösung: 16
c) $5 \cdot x - 6 = 12 + 3 \cdot x$ | $- 3 \cdot x$ $2 \cdot x - 6 = 12$ | $+ 6$ $2 \cdot x = 18$ | $- 1$ $x = 17$ Lösung: 17	d) $5 \cdot x - 6 = 12 + 3 \cdot x$ | $- 5 \cdot x$ $-6 = 12 - 2 \cdot x$ | $+ 12$ $6 = -2 \cdot x$ | $: (-2)$ $-3 = x$ Lösung: -3

4.) Beide Versuche zur Lösung der Gleichung $5 \cdot x - 6 = 12 + 3 \cdot x$ enthalten einen Fehler.
Kringle die Fehlerstelle in einer der Gleichungen **ein** und trage die zugehörige Zahl ohne Rechenzeichen oder „x“ (Beispiel: „– 3·x“ → „3“ oder „– 2“ → „2“) in die Tabelle unten ein.

a) $5 \cdot x - 6 = 12 + 3 \cdot x$ | $+ 6$ $5 \cdot x = 6 + 3 \cdot x$ | $- 3 \cdot x$ $2 \cdot x = 6$ | $: 2$ $x = 3$ Lösung: 3	b) $5 \cdot x - 6 = 12 + 3 \cdot x$ | $+ 6$ $5 \cdot x = 12 + 9 \cdot x$ | $- 9 \cdot x$ $-4 \cdot x = 12$ | $: (-4)$ $x = -3$ Lösung: -3

Aufgabe:	1a)	1a)	1b)	1b)	1c)	1c)	1d)	1d)	1e)	1e)	1f)	1f)
Zahl:												
	Zur Kontrolle: Summe = **67**						Zur Kontrolle: Summe = **100**					

Aufgabe:	2.)	3a)	3b)	3c)	3d)	4a)	4b)
Zahl:							
	Zur Kontrolle: Summe = **39**						

1.) **Löse die Gleichung** und **mache die Probe**.
Trage jeweils **in die Tabelle unten ein**: **zuerst die Lösungszahl** und **dann** den gemeinsamen **Wert der linken Seite und der rechten Seite** der Gleichung bei der Probe mit der Lösungszahl.

a) $5 \cdot x + 4 = 19$ *(3)*
b) $6 \cdot x - 5 = 13 + 3 \cdot x$ *(6)*
c) $5 - 4 \cdot x = 9 \cdot x + 18$ *(-1)*
d) $3 \cdot x - 8{,}5 = 1{,}5 - x$ *(2,5)*
e) $x + 2{,}5 \cdot x - 4{,}5 = 6{,}5 - x \cdot 2$ *(2)*
f) $3 \cdot y + 4 + 5 \cdot y = 6 + 7 \cdot y + 8$ *(10)*

2.) Ahmed, Bertram und Cecil lösen die Gleichung $3 \cdot (4 + 3 \cdot x) + 9 = 28 + (5 \cdot x - 25) \cdot (-2)$.
Lösungszahl von Ahmed: 1, Lösungszahl von Bertram: 2, Lösungszahl von Cecil: 3.
Finde heraus wer Recht hat, ohne dass du die Gleichung selbst löst.
Trage die richtige Lösungszahl in die Tabelle unten ein.

3.) Alle vier Versuche zur Lösung der Gleichung $5 \cdot x - 6 = 12 + 3 \cdot x$ enthalten einen Fehler.
Kringle den falsch ausgeführten Befehl nach dem Befehlstrich **ein** und **trage die zugehörige Zahl** ohne Rechenzeichen oder „x“ (Beispiel: „– 3·x“ → „3“ oder „– 2“ → „2“) **in die Tabelle unten ein**.

a) $5 \cdot x - 6 = 12 + 3 \cdot x$ | - 6 $5 \cdot x = 6 + 3 \cdot x$ | - 3·x $2 \cdot x = 6$ | : 2 $x = 3$ Lösung: 3	b) $5 \cdot x - 6 = 12 + 3 \cdot x$ | + 6 $5 \cdot x = 18 + 3 \cdot x$ | - 3·x $2 \cdot x = 18$ | - 2 $x = 16$ Lösung: 16
c) $5 \cdot x - 6 = 12 + 3 \cdot x$ | - 3·x $2 \cdot x - 6 = 12$ | + 6 $2 \cdot x = 18$ | - 1 $x = 17$ Lösung: 17	d) $5 \cdot x - 6 = 12 + 3 \cdot x$ | - 5·x $-6 = 12 - 2 \cdot x$ | + 12 $6 = -2 \cdot x$ | : (-2) $-3 = x$ Lösung: -3

4.) Beide Versuche zur Lösung der Gleichung $5 \cdot x - 6 = 12 + 3 \cdot x$ enthalten einen Fehler.
Kringle die Fehlerstelle in einer der Gleichungen **ein** und **trage die zugehörige Zahl** ohne Rechenzeichen oder „x“ (Beispiel: „– 3·x“ → „3“ oder „– 2“ → „2“) **in die Tabelle unten ein**.

a) $5 \cdot x - 6 = 12 + 3 \cdot x$ | + 6 $5 \cdot x = 6 + 3 \cdot x$ | - 3·x $2 \cdot x = 6$ | : 2 $x = 3$ Lösung: 3	b) $5 \cdot x - 6 = 12 + 3 \cdot x$ | + 6 $5 \cdot x = 12 + 9 \cdot x$ | - 9·x $-4 \cdot x = 12$ | : (-4) $x = -3$ Lösung: -3

Aufgabe:	1a)	1a)	1b)	1b)	1c)	1c)	1d)	1d)	1e)	1e)	1f)	1f)	2.)	3a)	3b)	3c)	3d)	4a)	4b)
Zahl:	3	19	6	31	-1	9	2,5	-1	2	2,5	10	84	3	6	2	1	12	6	9
	Zur Kontrolle: Summe = **67**						Zur Kontrolle: Summe = **100**						Zur Kontrolle: Summe = **39**						

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit feU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Erarbeitung feU 15 Min.	L stellt das Thema vor: *Wie man das Thema Lineare Gleichungen in vier Schritten erfassen kann – anschließend wird geübt* L entwickelt und notiert mit den SuS zunächst die Punkte 1. bis 3. (vgl. Lehrerblatt) in geeigneter Zusammenfassung und holt sich dabei so viel wie möglich Informationen von den SuS. Für die allgemeine Strategie der Strukturierung ist hier zentral die Visualisierung des Sortierens der beiden Elemente (Vielfache von x und Zahlen) durch Äquivalenzumformungen mithilfe von Farben. „Wie kann man die prüfen, ob die Lösungszahl richtig ist?“ L betont die Wichtigkeit der Probe. L und SuS lösen exemplarisch gemeinsam die Aufgaben 1c) und 3b) des Schülerblattes. Dabei erläutert L auch den Unterschied zwischen Aufgabe 3 und 4 und die Zahl-Einträge in der Tabelle unten mit der abschnittsweisen Kontrollsumme.	Tafel / Heft
2. Übung EA/PA 30 Min.	SuS bearbeiten die Aufgaben des Schülerblattes und kontrollieren sich selbständig mit der Probe und der Tabelle. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt / Heft

Lehrerblatt

Voraussetzung und Ziel:
Voraussetzung ist, dass die Unterrichtseinheit Lineare Gleichungen im Regelunterricht behandelt wurde. Absicht ist, das Wissen der SuS über lineare Gleichungen – auf andere Gleichungen übertragbar – zu strukturieren und aus dieser Struktur die typischen Fragestellungen abzuleiten und zu üben.

Struktur:
Am Beispiel der Linearen Gleichungen wird zunächst exemplarisch erarbeitet (bzw. wiederholt), wie man bei der **Strukturierung eines mathematischen Sachverhaltes** vorgehen kann – **5 Schritte**, s.u.
Ein Transfer in außermathematische Gebiete ist nicht ausgeschlossen.

1. Worum es geht:
Gegeben ist eine Gleichung wie zum Beispiel $5\cdot x + 6 = 7\cdot x - 8$. Gesucht ist die Zahl, die man für x setzen muss, damit das Gleichheitszeichen stimmt. Das ist hier die Zahl 7, man könnte sie auch durch geschicktes Probieren erhalten.

Solche Gleichungen heißen linear, nicht lineare Gleichungen wären z. B. $3\cdot x^2 + 5 = 7\cdot x$ oder $\frac{5}{x} + 7 = 8$.

2. Begriffe:
Gleichung, Äquivalenzumformung, Lösung, Probe

3. Zusammenhänge / Grundaufgaben:
Äquivalenzumformungen lassen die Lösung der Gleichung unverändert:
- auf beiden Seiten dieselbe Zahl oder denselben Term addieren oder subtrahieren
- auf beiden Seiten mit derselben Zahl multiplizieren oder durch dieselbe Zahl ($\neq 0$) dividieren

Ziel ist durch „Sortieren“, in mehreren Schritten zur Form Zahl = x oder x = Zahl zu kommen.
Beachte: In linearen Gleichungen gibt es zwei Sorten von Summanden, Vielfache von x (wie z.B. $5\cdot x$ oder $7\cdot x$) und Zahlen (wie z. B. 6 oder 8).
Vielfache von x kann man untereinander zusammenfassen (z.B. $7\cdot x - 5\cdot x = 2\cdot x$), dasselbe gilt für Zahlen (z.B. 6 + 8 = 14). In der Mischung geht das nicht (z.B. ist $5\cdot x + 6$ nicht $11\cdot x$)!

Ein Beispiel mit Erläuterung:

Gleichung:	**Befehl (nach dem Befehlstrich |):**	**Erläuterung:**
$5\cdot x + 6 = 7\cdot x - 8$ $< 5\cdot x - 5\cdot x + 6 = 7\cdot x - 5\cdot x - 8 >$	$\| - 5\cdot x$	Vielfache von x sollen nur noch auf einer Seite der Gleichung vorkommen
$6 = 2\cdot x - 8$ $< 6 + 8 = 2\cdot x - 8 + 8 >$	$\| + 8$	Zahlen ohne x sollen nur noch auf der anderen Seite der Gleichung vorkommen
$14 = 2\cdot x$	$\| : 2$	Letzter Schritt zur Form Zahl = x oder x = Zahl
$7 = x$		Ziel erreicht
Lösung: 7		Lösung aufschreiben
Probe:		Für x die Zahl 7 einsetzen, getrennt nach Seite
linke Seite: $5\cdot 7 + 6 = 35 + 6 = 41$		Getrennt nach linker und rechter Seite (Abkürzung „l.S.“ und „r.S.“)
rechte Seite: $7\cdot 7 - 8 = 49 - 8 = 41$		Ergibt sich dieselbe Zahl darf man hinter „Probe:“ einen Haken machen ☺

4. Schwierigkeiten:
- beim Termumformen, beim Rechnen

5. Weiterführende Aufgaben:
- Lineare Gleichungen mit Termumformungen bzw. mit Brüchen oder Dezimalzahlen als Koeffizienten

Didaktischer Kommentar

Das Umformen von linearen Termen und das **Lösen von linearen Gleichungen** gilt für Schüler der Klasse 7 anerkanntermaßen als **schwierig**. Vielen von ihnen erscheint das Hantieren mit Variablen und Zeichen – vom bekannten Umgang mit Zahltermen losgelöst – undurchsichtig und fehleranfällig.
In der Tat kann man bei der Lösung der Gleichung $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x$ auf unterschiedliche Weise korrekt vorgehen, auf überraschend vielfältige Weise aber Fehler machen, vgl. Aufgabe 3 und 4 auf dem Schülerblatt. Es ist wichtig, sich dies als Lehrender, der die Sache beherrscht, bewusst zu machen.
Bei keinem Teilgebiet der Schulmathematik fragt sich der Lehrende, was daran „um Gottes Willen" so schwierig sein soll. Also: Geduld, Verständnis und Langmut ☺.

Hat man mit linearen Termen zu tun, ist ein **häufig anzutreffender Fehler** die Zusammenfassung von $a\cdot x + b$ zu $(a+b)\cdot x$, zum Beispiel $3\cdot x + 7 = 10\cdot x$. Dies ist insbesondere dann verführerisch, wenn $a + b$ eine Stufenzahl ist.
Auf dem Lehrerblatt wird deshalb von zwei Sorten von Elementen gesprochen und diese Unterscheidung mit Hilfe von Farben visualisiert. Dies ist natürlich die unterste Stufe der didaktischen Reduktion. Eine höhere Erkenntnisstufe wäre die Erinnerung, dass bei einer gültigen Termumformung die Gleichheit für beliebige Zahl-Einsetzungen richtig sein muss. Man denke sich gerne also etwas „Extremes" für x, zum Beispiel die Zahl 100 (und nicht gerade die Zahl 1 ☺).
Vereinbarungsgemäß lässt man bei der Verknüpfung von Zahl und Variable den Malpunkt gerne weg. Das kann man auch hier tun. Für das Schreiben des Malpunktes spricht die Verdeutlichung der beiden unterschiedlichen Elementsorten.

Alle Schulbücher bemühen für das Kalkül der Gleichungslösung durch Äquivalenzumformungen das **Waage-Modell**, um die Prozesse des „auf beiden Seiten der Gleichung dasselbe tun" und des „schrittweisen Abräumens zur Trennung der beiden Element-Sorten", zu veranschaulichen und zu begründen. Gerne wird man auch in der Mkid-Stunde zu den linearen Gleichungen an diese Vorstellungswelt anknüpfen, trotz des engen Gültigkeitsrahmens dieses Modells.
Ein weiteres Element der didaktischen Reduktion ist das implizite Postulat der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung.

In unterschiedlichen Schulbüchern wird die **Probe** unterschiedlich stark betont. Aus unserer Sicht kann man vor allem aus erkenntnistheoretischer Sicht deren Wert gar nicht überschätzen.
Die Erziehung zur Stellung der Frage „Stimmt das?" bzw. „Kann das sein?" ist eine grundsätzlich wichtige, weit über das Feld der Mathematik hinaus.
Aus diesem Grund wird im Aufgabenblatt für die Schüler die Probe ausgiebig thematisiert.

Bei der **Notation der Gleichungslösung** kann man – im Falle von Schwierigkeiten – eine Zwischenzeile notieren, so dass der auszuführende Befehl zunächst auf beiden Seiten notiert und erst im nächsten Schritt ausgerechnet wird, vgl. Lehrerblatt im Beispiel zur Erläuterung

$$5\cdot x + 6 = 7\cdot x - 8 \quad | - 5\cdot x$$
$$< 5\cdot x - 5\cdot x + 6 = 7\cdot x - 5\cdot x - 8 >$$
$$6 = 2\cdot x - 8$$

Noch ausführlicher wäre unter Bewusstmachung des Kommutativgesetztes der Addition:

$$5\cdot x + 6 = 7\cdot x - 8 \quad | - 5\cdot x$$
$$< 5\cdot x + 6 - 5\cdot x = 7\cdot x - 8 - 5\cdot x >$$
$$< 5\cdot x - 5\cdot x + 6 = 7\cdot x - 5\cdot x - 8 >$$
$$6 = 2\cdot x - 8$$

Beide Zielformen, nämlich x = Zahl und Zahl = x, sind zugelassen, die davon getrennte Notation der Lösung „Lösung: …" ist vereinbart, ebenso die Notation der auszuführende „Befehle" hinter dem so genannten Befehlstrich „|".

Mkid 7-23 Lineare Gleichungen

1.) **Löse die Gleichung** und **mache die Probe**.
Trage jeweils in die Tabelle unten ein: zuerst die Lösungszahl und dann den gemeinsamen Wert der linken Seite und der rechten Seite der Gleichung bei der Probe mit der Lösungszahl.

a) $5\cdot x + 4 = 19$ b) $6\cdot x - 5 = 13 + 3\cdot x$ c) $5 - 4\cdot x = 9\cdot x + 18$

d) $3\cdot x - 8{,}5 = 1{,}5 - x$ e) $x + 2{,}5\cdot x - 4{,}5 = 6{,}5 - x\cdot 2$ f) $3\cdot y + 4 + 5\cdot y = 6 + 7\cdot y + 8$

2.) Ahmed, Bertram und Cecil lösen die Gleichung $3\cdot(4 + 3\cdot x) + 9 = 28 + (5\cdot x - 25)\cdot(-2)$.
Lösungszahl von Ahmed: 1, Lösungszahl von Bertram: 2, Lösungszahl von Cecil: 3.
Finde heraus wer Recht hat, ohne dass du die Gleichung selbst löst.
Trage die richtige Lösungszahl in die Tabelle unten ein.

3.) Alle vier Versuche zur Lösung der Gleichung $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x$ enthalten einen Fehler.
Kringle den falsch ausgeführten Befehl nach dem Befehlstrich **ein** und trage die zugehörige Zahl ohne Rechenzeichen oder „x“ (Beispiel: „– 3·x“ → „3“ oder „– 2“ → „2“) in die Tabelle unten ein.

a) $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x \quad \mid -6$ $5\cdot x = 6 + 3\cdot x \quad \mid -3\cdot x$ $2\cdot x = 6 \quad \mid :2$ $x = 3$ Lösung: 3	b) $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x \quad \mid +6$ $5\cdot x = 18 + 3\cdot x \quad \mid -3\cdot x$ $2\cdot x = 18 \quad \mid -2$ $x = 16$ Lösung: 16
c) $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x \quad \mid -3\cdot x$ $2\cdot x - 6 = 12 \quad \mid +6$ $2\cdot x = 18 \quad \mid -1$ $x = 17$ Lösung: 17	d) $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x \quad \mid -5\cdot x$ $-6 = 12 - 2\cdot x \quad \mid +12$ $6 = -2\cdot x \quad \mid :(-2)$ $-3 = x$ Lösung: -3

4.) Beide Versuche zur Lösung der Gleichung $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x$ enthalten einen Fehler.
Kringle die Fehlerstelle in einer der Gleichungen **ein** und trage die zugehörige Zahl ohne Rechenzeichen oder „x“ (Beispiel: „– 3·x“ → „3“ oder „– 2“ → „2“) in die Tabelle unten ein.

a) $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x \quad \mid +6$ $5\cdot x = 6 + 3\cdot x \quad \mid -3\cdot x$ $2\cdot x = 6 \quad \mid :2$ $x = 3$ Lösung: 3	b) $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x \quad \mid +6$ $5\cdot x = 12 + 9\cdot x \quad \mid -9\cdot x$ $-4\cdot x = 12 \quad \mid :(-4)$ $x = -3$ Lösung: -3

5**.) Löse die Gleichung** und **mache die Probe**.
Trage jeweils in die Tabelle unten ein: zuerst die Lösungszahl und dann den gemeinsamen Wert der linken Seite und der rechten Seite der Gleichung bei der Probe mit der Lösungszahl.

a) $4\cdot x + 5 = 2\cdot(5 - 8\cdot x)$ b) $6\cdot(6 - x) + 1 = (6\cdot x + 2)\cdot 0{,}5$ c) $15\cdot x - 12\cdot x = 3\cdot(2\cdot x + 5)$

d) $\frac{1}{3}\cdot x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{6}\cdot x$ e) $x + 0{,}2\cdot x + 5{,}2 = 8{,}5 - 0{,}3\cdot x$ f) $\frac{1}{4}\cdot z + 0{,}4 + 0{,}5\cdot z = \frac{1}{5} + 1{,}2\cdot z + 0{,}2$

Aufgabe:	1a)	1a)	1b)	1b)	1c)	1c)	1d)	1d)	1e)	1e)	1f)	1f)	2.)	3a)	3b)	3c)	3d)	4a)	4b)
Zahl:																			
	Zur Kontrolle: Summe = **67**						Zur Kontrolle: Summe = **100**						Zur Kontrolle: Summe = **39**						

Aufgabe:	5a)	5a)	5b)	5b)	5c)	5c)	5d)	5d)	5e)	5e)	5f)	5f)
Zahl:												
	Zur Kontrolle: Summe = **23,25**				Zur Kontrolle: Summe = **-12,5**				Zur Kontrolle: Summe = **10,44**			

1.) **Löse die Gleichung** und **mache die Probe**.
Trage jeweils **in die Tabelle unten ein**: **zuerst die Lösungszahl** und **dann** den gemeinsamen **Wert der linken Seite und der rechten Seite** der Gleichung bei der Probe mit der Lösungszahl.

a) $5\cdot x + 4 = 19$ *(3)* b) $6\cdot x - 5 = 13 + 3\cdot x$ *(6)* c) $5 - 4\cdot x = 9\cdot x + 18$ *(-1)*

d) $3\cdot x - 8{,}5 = 1{,}5 - x$ *(2,5)* e) $x + 2{,}5\cdot x - 4{,}5 = 6{,}5 - x\cdot 2$ *(2)* f) $3\cdot y + 4 + 5\cdot y = 6 + 7\cdot y + 8$ *(10)*

2.) Ahmed, Bertram und Cecil lösen die Gleichung $3\cdot(4 + 3\cdot x) + 9 = 28 + (5\cdot x - 25)\cdot(-2)$.
Lösungszahl von Ahmed: 1, Lösungszahl von Bertram: 2, Lösungszahl von Cecil: 3.
Finde heraus wer Recht hat, ohne dass du die Gleichung selbst löst.
Trage die richtige Lösungszahl in die Tabelle unten ein.

3.) Alle vier Versuche zur Lösung der Gleichung $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x$ enthalten einen Fehler.
Kringle den falsch ausgeführten Befehl nach dem Befehlstrich **ein** und **trage die zugehörige Zahl** ohne Rechenzeichen oder „x“ (Beispiel: „– 3·x“ → „3“ oder „– 2“ → „2“) **in die Tabelle unten ein**.

a) $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x \quad \mid -6$ $5\cdot x = 6 + 3\cdot x \quad \mid -3\cdot x$ $2\cdot x = 6 \quad \mid :2$ $x = 3$ Lösung: 3	b) $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x \quad \mid +6$ $5\cdot x = 18 + 3\cdot x \quad \mid -3\cdot x$ $2\cdot x = 18 \quad \mid -2$ $x = 16$ Lösung: 16
c) $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x \quad \mid -3\cdot x$ $2\cdot x - 6 = 12 \quad \mid +6$ $2\cdot x = 18 \quad \mid -1$ $x = 17$ Lösung: 17	d) $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x \quad \mid -5\cdot x$ $-6 = 12 - 2\cdot x \quad \mid +12$ $6 = -2\cdot x \quad \mid :(-2)$ $-3 = x$ Lösung: -3

4.) Beide Versuche zur Lösung der Gleichung $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x$ enthalten einen Fehler.
Kringle die Fehlerstelle in einer der Gleichungen **ein** und **trage die zugehörige Zahl** ohne Rechenzeichen oder „x“ (Beispiel: „– 3·x“ → „3“ oder „– 2“ → „2“) **in die Tabelle unten ein**.

a) $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x \quad \mid +6$ $5\cdot x = 6 + 3\cdot x \quad \mid -3\cdot x$ $2\cdot x = 6 \quad \mid :2$ $x = 3$ Lösung: 3	b) $5\cdot x - 6 = 12 + 3\cdot x \quad \mid +6$ $5\cdot x = 12 + 9\cdot x \quad \mid -9\cdot x$ $-4\cdot x = 12 \quad \mid :(-4)$ $x = -3$ Lösung: -3

5**.) Löse die Gleichung** und **mache die Probe**.
Trage jeweils **in die Tabelle unten ein**: **zuerst die Lösungszahl** und **dann** den gemeinsamen **Wert der linken Seite und der rechten Seite** der Gleichung bei der Probe mit der Lösungszahl.

a) $4\cdot x + 5 = 2\cdot(5 - 8\cdot x)$ *(0,25)* b) $6\cdot(6 - x) + 1 = (6\cdot x + 2)\cdot 0{,}5$ *(4)* c) $15\cdot x - 12\cdot x = 3\cdot(2\cdot x + 5)$ *(-5)*

d) $\frac{1}{3}\cdot x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{6}\cdot x$ *(6)* e) $x + 0{,}2\cdot x + 5{,}2 = 8{,}5 - 0{,}3\cdot x$ *(2,2)* f) $\frac{1}{4}\cdot z + 0{,}4 + 0{,}5\cdot z = \frac{1}{5} + 1{,}2\cdot z + 0{,}2$ *(0)*

Aufgabe:	1a)	1a)	1b)	1b)	1c)	1c)	1d)	1d)	1e)	1e)	1f)	1f)	2.)	3a)	3b)	3c)	3d)	4a)	4b)
Zahl:	3	19	6	31	-1	9	2,5	-1	2	2,5	10	84	3	6	2	1	12	6	9
	Zur Kontrolle: Summe = **67**						Zur Kontrolle: Summe = **100**						Zur Kontrolle: Summe = **39**						

Aufgabe:	5a)	5a)	5b)	5b)	5c)	5c)	5d)	5d)	5e)	5e)	5f)	5f)
Zahl:	0,25	6	4	13	-5	-15	6	1,5	2,2	7,84	0	0,4
	Zur Kontrolle: Summe = **23,25**				Zur Kontrolle: Summe = **-12,5**				Zur Kontrolle: Summe = **10,44**			

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung! Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird man die 3. und 4. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Erarbeitung I FEU 15 Min.	L stellt das Thema vor: *Wie man das Thema Lineare Gleichungen in fünf Schritten erfassen kann – anschließend wird geübt* L entwickelt und notiert mit den SuS zunächst die Punkte 1. bis 3. (vgl. Lehrerblatt) in geeigneter Zusammenfassung und holt sich dabei so viel wie möglich Informationen von den SuS. Für die allgemeine Strategie der Strukturierung ist hier zentral die Visualisierung des Sortierens der beiden Elemente (Vielfache von x und Zahlen) durch Äquivalenzumformungen mithilfe von Farben. „Wie kann man die prüfen, ob die Lösungszahl richtig ist?“ L betont die Wichtigkeit der Probe. L und SuS lösen exemplarisch gemeinsam die Aufgaben 1c und 3b des Schülerblattes. Dabei erläutert L auch den Unterschied zwischen Aufgabe 3 und 4 und die Zahl-Einträge in der Tabelle unten mit der abschnittsweisen Kontrollsumme.	Tafel / Heft
2. Übung I EA/PA 30 Min.	SuS bearbeiten die Aufgaben 1 bis 4 des Schülerblattes und kontrollieren sich selbständig mit der Probe und der Tabelle. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt / Heft
3. Erarbeitung II FEU 15 Min.	L entwickelt und notiert mit den SuS weiterführende Aufgaben mit Termumformungen und Brüche oder Dezimalzahlen als Koeffizienten: $3\cdot(2\cdot x + 4) = 4\cdot(3 - x) - 10 \quad \mid T$ … Lösung: -1 $\frac{2}{3}\cdot x - \frac{1}{9} = \frac{5}{9} - \frac{4}{3}\cdot x \quad \mid \cdot 9$ $(\frac{2}{3}\cdot x - \frac{1}{9})\cdot 9 = (\frac{5}{9} - \frac{4}{3}\cdot x)\cdot 9 \quad \mid T$ $9\cdot\frac{2}{3}\cdot x - 9\cdot\frac{1}{9} = 9\cdot\frac{5}{9} - 9\cdot\frac{4}{3}\cdot x$ … Lösung: $\frac{1}{3}$	Tafel / Heft
4. Übung II EA/PA 15 Min.	SuS bearbeiten die Aufgabe 5 des Schülerblattes und kontrollieren sich selbständig mit der Probe und der Tabelle. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt / Heft
5. Kür EA/PA 15 Min.	SuS „erfinden“ selbst Gleichungen, indem sie sich eine Lösungszahl vorgeben und damit zwei Zahlterme mit gleichem Wert erstellen.	Heft

Lehrerblatt

Voraussetzung und Ziel:

Voraussetzung ist, dass lineare Gleichungen und Textaufgaben hierzu im Regelunterricht behandelt wurden.
Absicht ist, das Wissen der Schülerinnen und Schüler über Textaufgaben zu linearen Gleichungen – auf Textaufgaben zu anderen Gleichungen übertragbar – zu strukturieren und die Vorgehensweise zu üben.

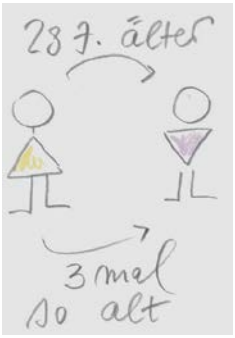
Struktur:

Am Beispiel des Themas Textaufgaben zu linearen Gleichungen wird zunächst exemplarisch erarbeitet (bzw. wiederholt), wie man bei der **Strukturierung eines mathematischen Sachverhaltes** vorgehen kann – **vier Schritte**, s.u. Ein Transfer in außermathematische Gebiete ist nicht ausgeschlossen.

1. Worum es geht:
Mithilfe von Informationen aus einem Text soll eine Größe bestimmt werden. Erfahrungsgemäß liegt die Schwierigkeit darin, die gegebenen Informationen in eine Gleichung zu transformieren.
Je länger und verwickelter der Text, desto schwieriger die Transformation.

2. Begriffe:
Variable einführen, Gleichung aufstellen, Äquivalenzumformung, Lösung, Probe am Text (!)

3. Zusammenhänge / Grundaufgaben:
Ein Musterbeispiel:
Dirk ist dreimal so alt wie seine Tochter Elena, er ist 28 Jahre älter als sie. Wie alt ist Elena?



- **Aneignung der Aufgabe**: Aufgabe durchlesen und wichtige Informationen farbig markieren, ggf. eine kleine Zeichnung mit zwei Personen und dem Eintrag dieser Informationen „dreimal so alt“ und „28 Jahre älter“ z.B. mithilfe von Pfeilen anfertigen
- **Weitere Aneignung der Aufgabe** – was in Schulbüchern und im Mathematikunterricht häufig zu kurz kommt:
  Für die gesuchte Größe einfach einmal einen Wert annehmen und die Auswirkung beobachten.
  - Wenn Elena 10 Jahre alt wäre, dann wäre Dirk 30 Jahre alt und damit 20 Jahre älter.
  → Das ist zu wenig.
  - Wenn Elena 20 Jahre alt wäre, dann wäre Dirk 60 Jahre alt und damit 40 Jahre älter.
  → Das ist zu viel.
  Ggf. führt das systematische Weiterprobieren hier direkt zum Ziel, ganz ohne Gleichungskalkül!
- **Variable einführen**: Alter von Elena in Jahren: x
- **Schlussfolgerungen für andere beteiligten Größen ziehen**: Alter von Dirk in Jahren: 3·x
- **Gleichung aufstellen**: $3 \cdot x - x = 28$ oder $3 \cdot x = x + 28$
- **Gleichung lösen**: $2 \cdot x = 28$; $x = 14$
- **Probe am Text durchführen**: Wenn Elena 14 Jahre alt wäre, dann wäre Dirk 42 Jahre alt, also 28 Jahre älter. → Das stimmt.
- **Antwortsatz aufschreiben**, der die gestellte Frage beantwortet ☺: Elena ist 14 Jahre alt. (Nicht: Dirk ist 42 Jahre alt.)

4. Schwierigkeiten:
- beim Verstehen der Textaufgabe
- bei der Transformation in eine Gleichung

Didaktischer Kommentar

Hat man das Umformen von linearen Termen und das Lösen von linearen Gleichungen einigermaßen „verdaut“, erscheint mit dem Lösen von Textaufgaben eine neue, ganz andere Hürde.
Das sinnerfassende Lesen und die Formalisierung und Übertragung der Information in mathematische Zeichensprache gilt als besonders anspruchsvoll und schulungsbedürftig.

Ein Beispiel:
In einer Klasse sind drei Mädchen mehr als Jungen. Drücke das durch eine Gleichung aus.
Einige Lösungsansätze:

- Mädchen + 3 = Jungen
- Anzahl der Mädchen + 3 = Anzahl der Jungen
- Beispiel: 15 Mädchen und 12 Jungen, als Gleichung: 15 Mädchen – 3 = 12 Jungen
- Anzahl der Mädchen – 3 = Anzahl der Jungen

Einige Erkenntnisse:

- Es geht nicht um die Individuen, sondern um Anzahlen. Diesen Begriff „Anzahl“ muss der Lehrer einführen, pflegen und dessen Verwendung einfordern.
- Die richtige Lösung ist kontraintuitiv.
- Zahlenbeispiele helfen bei der Lösungsfindung.

Bei der **Aneignung der Aufgabe** kann es helfen, für die gesuchte Größe einfach einmal einen Wert annehmen und die Auswirkung beobachten.

Im einfachen (Regel-)Fall wird man **für die gesuchte Größe eine Variable einführen** und die anderen beteiligten unbekannten Größen in Abhängigkeit von dieser Variablen ausdrücken. Ansonsten wäre man schon bei linearen Gleichungssystemen.

Bei der **Festlegung der verwendeten Variablen** muss die Größe und die verwendete Einheit genannt werden und nicht nur die Größe oder gar nur die Einheit.
Also: „Länge der Strecke in Meter: x“ (ggf. kürzer: „Länge [m]: x“) und nicht „Länge der Strecke: x“ oder gar „die Meter: x“.
Hier könnte man eine kleine mündliche Übung einschieben. Der Lehrer sagt die Größe, die Schüler eine mögliche Einheit und umgekehrt:

- Länge – Meter; Flächeninhalt – Ar
- Volumen – Liter;
- Zeit – Stunde
- Gewicht (Masse) – Kilogramm;
- Preis – Euro pro Kilogramm
- Geschwindigkeit – Kilometer pro Stunde; usw.

Die Schülerinnen und Schüler können auch selbst Aufgaben stellen.

Wichtig ist, dass die **Probe am Text** und nicht an der aufgestellten Gleichung durchgeführt wird. Diese könnte nicht mit dem Aufgabentext harmonieren.

Der **Clou beim Lösen** von mathematischen Problemen mithilfe **von Gleichungen** lautet so, das sollte man den Schülern auch so verdeutlichen:
Wenn wir eine Größe nicht kennen, ist das für uns Mathematiker kein Beinbruch. Wir nennen sie einfach x und rechnen „fröhlich“ damit weiter.

Mkid 7-24B Textaufgaben zu linearen Gleichungen

1.) Finde die Zahl, deren Doppeltes um 21 vermehrt 57 ergibt.

2.) Subtrahiert man von 35 die Hälfte der gesuchten Zahl, so erhält man ihr Doppeltes.

3.) Welche Zahl ist um 18 kleiner als ihr Vierfaches?

4.) Lars bekommt 26 € geschenkt und besitzt damit jetzt dreimal so viel Geld wie vorher. Wie viel Geld hatte Lars vorher?

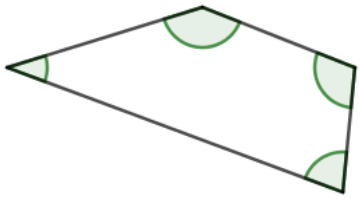
5.) Arne ist doppelt so alt, wie seine Schwester Lena in zwei Jahren sein wird. Zusammen sind sie jetzt 19 Jahre alt. Wie alt ist Lena?

6.) Petra ist dreimal so alt wie ihre Tochter Mareike. In elf Jahren wird sie nur noch doppelt so alt sein. Wie alt sind die beiden jetzt?

7.) Susanne wird in zwei Jahren viermal so alt sein, wie ihre Tochter Luise heute ist. Heute sind sie zusammen 43 Jahre alt. Wie alt ist Luise?

8.) In einem Dreieck sind zwei Winkel gleich groß und der dritte doppelt so groß wie die anderen beiden zusammen. Wie groß sind die beiden gleich großen Winkel?

9.) In einem Viereck ist der zweite Winkel doppelt so groß wie der erste, der dritte dreimal und der vierte viermal so groß wie der erste. Wie groß ist der erste Winkel?



Zur Kontrolle: Die Lösungszahlen der Aufgaben finden sich in der Zahlenreihe:
3 5 6 9 10 11 13 14 18 33 36 45 48 50 60

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit feU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Erarbeitung feU 15 Min.	L stellt das Thema vor: *Wie man das Thema Textaufgaben zu linearen Gleichungen in vier Schritten erfassen kann.* L entwickelt und notiert mit den SuS das Musterbeispiel (vgl. Lehrerblatt: Struktur 3.) in geeigneter Zusammenfassung und holt sich dabei so viel wie möglich Informationen von den SuS. L legt hierbei besonderen Wert auf das mehrfache „Durchspielen“ der Aufgabe mit angenommen Werten, ggf. bis hin zur Lösung. Die Aufgabe wird ggf. also doppelt gelöst. Eventuell Einschub: Kleine Übung mit Größen und zugehörigen Einheiten (vgl. didaktischer Kommentar) L und SuS lösen gemeinsam die Aufgaben 3 und 7 des Schülerblattes, ggf. auch zuerst durch Probieren. Zu <u>Aufgabe 3</u>: der intuitive Ansatz $x - 14 = 4 \cdot x$ ist falsch! L-Impulsfragen: „Was ist hier größer, x oder $4 \cdot x$?“ „Was muss man für eine Gleichheit noch hinzufügen?“ Zu <u>Aufgabe 7:</u> Auf jeden Fall mindestens einmal mit einem angenommenen Alter von Luise „durchspielen“, vgl. z.B. Zahlen am Rand. Alle beteiligten Größen genau aufschreiben. Alter von Luise heute [J.]: x 10 Alter von Susanne in 2 Jahren [J.]: $4 \cdot x$ 40 Alter von Susanne heute [J.]: $4 \cdot x - 2$ 38	Tafel / Heft
2. Übung EA/PA 30 Min.	SuS lösen (ggf. zuerst auch durch Probieren!) die Aufgaben 1; 2; 4; 5 und 6 des Schülerblattes. Zur Differenzierung: Aufgaben 8 und 9. Hier müssen zusätzliche Kenntnisse über die Winkelsumme im Dreieck bzw. im Viereck eingebracht werden. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend. Lösungen: 1.) 18 2.) 14 3.) 6 4.) 13 € 5.) Lena ist 5 Jahre 6.) Mareike ist 11 Jahre, Petra ist 33 Jahre alt 7.) Luise ist 9 Jahre alt 8.) 45° (die Winkelsumme im Dreieck ist 180°) 9.) 36° (die Winkelsumme im Viereck ist 360°)	Schülerblatt / Heft

Lehrerblatt

Voraussetzung und Ziel:

Voraussetzung ist, dass lineare Gleichungen und Textaufgaben hierzu im Regelunterricht behandelt wurden.
Absicht ist, das Wissen der SuS über Textaufgaben zu linearen Gleichungen – auf Textaufgaben zu anderen Gleichungen übertragbar – zu strukturieren und die Vorgehensweise zu üben.

Struktur:

Am Beispiel des Themas Textaufgaben zu linearen Gleichungen wird zunächst exemplarisch erarbeitet (bzw. wiederholt), wie man bei der **Strukturierung eines mathematischen Sachverhaltes** vorgehen kann – **5 Schritte**, s.u. Ein Transfer in außermathematische Gebiete ist nicht ausgeschlossen.

1. Worum es geht:
Mithilfe von Informationen aus einem Text soll eine Größe bestimmt werden. Erfahrungsgemäß liegt die Schwierigkeit darin, die gegebenen Informationen in eine Gleichung zu transformieren.
Je verwickelter der Text, desto schwieriger die Transformation.
Als Beispiel sei hier der Rätsel-Klassiker „Wie alt ist Anna?“ genannt: *Maria ist 24 Jahre alt. Sie ist doppelt so alt wie Anna war, als Maria so alt war, wie Anna heute ist. Wie alt ist Anna?*
Die Aufgaben des Schülerarbeitsblattes führen sukzessive zur Bewältigung dieses kniffligen Rätsels.

2. Begriffe:
Variable einführen, Gleichung aufstellen, Äquivalenzumformung, Lösung, Probe am Text (!)

3. Zusammenhänge / Grundaufgaben:
Ein Musterbeispiel:
Dirk ist dreimal so alt wie seine Tochter Elena, er ist 28 Jahre älter als sie. Wie alt ist Elena?

- **Aneignung der Aufgabe**: Aufgabe durchlesen und wichtige Informationen farbig markieren, ggf. eine kleine Zeichnung mit zwei Personen und dem Eintrag dieser Informationen „dreimal so alt“ und „28 Jahre älter“ z.B. mithilfe von Pfeilen anfertigen
- **Weitere Aneignung der Aufgabe** – was in Schulbüchern und im Mathematikunterricht häufig zu kurz kommt:
  Für die gesuchte Größe einfach einmal einen Wert annehmen und die Auswirkung beobachten.
  - Wenn Elena 10 Jahre alt wäre, dann wäre Dirk 30 Jahre alt, 20 Jahre älter. → Das ist zu wenig.
  - Wenn Elena 20 Jahre alt wäre, dann wäre Dirk 60 Jahre alt, 40 Jahre älter. → Das ist zu viel.
  Ggf. führt das systematische Weiterprobieren hier direkt zum Ziel, ganz ohne Gleichungskalkül!
- **Variable einführen**: Alter von Elena in Jahren: x
- **Schlussfolgerungen für andere beteiligten Größen ziehen**: Alter von Dirk in Jahren: $3 \cdot x$
- **Gleichung aufstellen**: $3 \cdot x - x = 28$
- **Gleichung lösen**: $x = 14$
- **Probe am Text durchführen**: Wenn Elena 14 Jahre alt wäre, dann wäre Dirk 42 Jahre alt, also 28 Jahre älter. → Das stimmt.
- **Antwortsatz aufschreiben**, der die gestellte Frage beantwortet ☺: Elena ist 14 Jahre alt. (Nicht: Dirk ist 42 Jahre alt.)

4. Schwierigkeiten:
- beim Verstehen der Textaufgabe, bei der Transformation in eine Gleichung

5. Weiterführende Aufgaben:
- eingeführte Variable ist nicht die gesuchte Größe
- man muss beim Erstellen der Gleichung noch zusätzliche Informationen heranziehen

Didaktischer Kommentar

Hat man das Umformen von linearen Termen und das Lösen von linearen Gleichungen einigermaßen „verdaut“, erscheint mit dem Lösen von Textaufgaben eine neue, ganz andere Hürde.
Das sinnerfassende Lesen und die Formalisierung und Übertragung der Information in mathematische Zeichensprache gilt als besonders anspruchsvoll und schulungsbedürftig.
Ein Beispiel:
In einer Klasse sind drei Mädchen mehr als Jungen. Drücke das durch eine Gleichung aus.
Einige Lösungsansätze:

- Mädchen + 3 = Jungen
- Anzahl der Mädchen + 3 = Anzahl der Jungen
- Beispiel: 15 Mädchen und 12 Jungen, als Gleichung: 15 Mädchen – 3 = 12 Jungen
- Anzahl der Mädchen – 3 = Anzahl der Jungen

Einige Erkenntnisse:

- Es geht nicht um die Individuen, sondern um Anzahlen. Diesen Begriff „Anzahl“ muss der Lehrer einführen, pflegen und dessen Verwendung einfordern.
- Die richtige Lösung ist kontraintuitiv.
- Zahlenbeispiele helfen bei der Lösungsfindung.

Bei der **Aneignung der Aufgabe** kann es helfen, für die gesuchte Größe einfach einmal einen Wert annehmen und die Auswirkung beobachten.

Im einfachen (Regel-)Fall wird man **für die gesuchte Größe eine Variable einführen** und die anderen beteiligten unbekannten Größen in Abhängigkeit von dieser Variablen ausdrücken. Ansonsten wäre man schon bei linearen Gleichungssystemen.

Bei der **Festlegung der verwendeten Variablen** muss die Größe und die verwendete Einheit genannt werden und nicht nur die Größe oder gar nur die Einheit.
Also: „Länge der Strecke in Meter: x“ (ggf. kürzer: „Länge [m]: x“) und nicht „Länge der Strecke: x“ oder gar „die Meter: x“.
Hier könnte man eine kleine mündliche Übung einschieben. Der Lehrer sagt die Größe, die Schüler eine mögliche Einheit und umgekehrt:
Länge – Meter; Flächeninhalt – Ar; Volumen – Liter; Gewicht (Masse) – Kilogramm; Preis – Euro pro Kilogramm; Geschwindigkeit – Kilometer pro Stunde; usw. (SuS können auch selbst Aufgaben stellen).

Wichtig ist, dass die **Probe am Text** und nicht an der aufgestellten Gleichung durchgeführt wird. Diese könnte nicht mit dem Aufgabentext harmonieren.

Der **Clou beim Lösen** von mathematischen Problemen mithilfe **von Gleichungen** lautet so, das sollte man den Schülern auch so verdeutlichen: Wenn wir eine Größe nicht kennen, ist das für uns Mathematiker kein Beinbruch. Wir nennen sie einfach x und rechnen „fröhlich“ damit weiter.

Erhöhte Anforderungen:
- Bereitstellen von Zusatzinformationen wie Winkelsummensatz oder Oberflächeninhalt eines Quaders
- eingeführte Variable ist nicht die gesuchte Größe – Beispiel „Wie alt ist Anna?“

Der Aufgabentext in der (hard-core-)Originalversion ist bewusst knapp und verwickelt formuliert.
Eine „Soft-“Variante könnte so lauten:
Maria ist heute 24 Jahre alt. Sie ist doppelt so alt wie Anna vor einigen Jahren war. Damals war Maria so alt, wie Anna heute ist. Wie alt ist Anna?
Vergangene Jahre seit „damals“: x;
Alter von Anna damals [J.]: 12; Alter von Anna heute [J.]: 12 + x
Alter von Maria damals [J.]: 24 – x; Alter von Maria heute [J.]: 24
Gleichung: 12 + x = 24 – x; x = 6; Anna ist 18 Jahre alt.

1.) Finde die Zahl, deren Doppeltes um 21 vermehrt 57 ergibt.

2.) Subtrahiert man von 35 die Hälfte der gesuchten Zahl, so erhält man ihr Doppeltes.

3.) Welche Zahl ist um 18 kleiner als ihr Vierfaches?

4.) Lars bekommt 12 € geschenkt und besitzt damit jetzt dreimal so viel Geld wie vorher. Wie viel Geld hatte Lars vorher?

5.) Arne ist doppelt so alt, wie seine Schwester Lena in zwei Jahren sein wird. Zusammen sind sie jetzt 19 Jahre alt. Wie alt ist Lena?

6.) Petra ist dreimal so alt wie ihre Tochter Mareike. In elf Jahren wird sie nur noch doppelt so alt sein. Wie alt sind die beiden jetzt?

7.) Susanne wird in zwei Jahren viermal so alt sein, wie ihre Tochter Luise vor drei Jahren war. Heute sind sie zusammen 41 Jahre alt. Wie alt ist Luise?

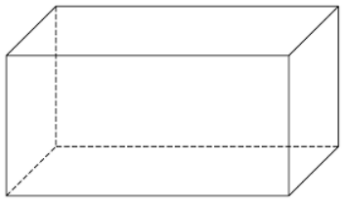
8.) In einem Dreieck sind zwei Winkel gleich groß und der dritte doppelt so groß wie die anderen beiden zusammen. Wie groß sind die beiden gleich großen Winkel?

9.) In einem Viereck ist der zweite Winkel doppelt so groß wie der erste, der dritte dreimal und der vierte viermal so groß wie der erste. Wie groß ist der erste Winkel?

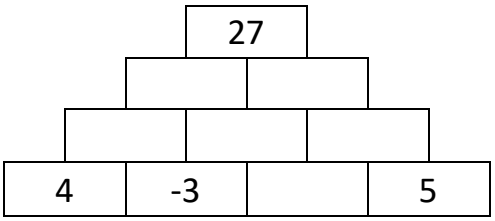
10.) Ein Rechteck ist 6cm lang, sein Umfang beträgt 20cm. Welchen Flächeninhalt hat das Rechteck?

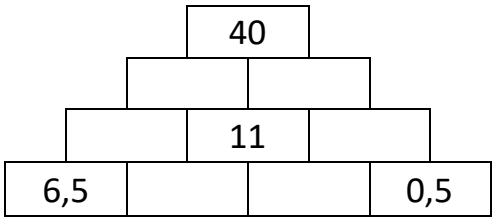
11.) Ein Quader ist 7cm lang und 4cm breit. Seine Kanten sind zusammen 64cm lang. Welches Volumen hat der Quader?

12.) Ein Quader ist 6cm lang und 3cm breit. Sein Oberflächeninhalt beträgt 108cm^2. Welches Volumen hat der Quader?



13.) Fülle die beiden Rechenmauern aus.
Die Zahl in einem Rechteck ergibt sich, indem du die beiden Zahlen darunter addierst.





14.) Knobelaufgabe: Maria ist 24 Jahre alt. Sie ist doppelt so alt wie Anna war, als Maria so alt war, wie Anna heute ist. Wie alt ist Anna?

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf wird man eine Auswahl treffen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Erarbeitung I FEU 15 Min.	L stellt das Thema vor: *Wie man das Thema Textaufgaben zu linearen Gleichungen in fünf Schritten erfassen kann.* L stellt den Rätsel-Klassiker „Wie alt ist Anna?“ (vgl. Lehrerblatt) vor und sagt an, dass alle SuS dieses Rätsel am Ende der Stunde werden lösen können ☺. L entwickelt und notiert mit den SuS das Musterbeispiel (vgl. Lehrerblatt: Struktur 3.) in geeigneter Zusammenfassung und holt sich dabei so viel wie möglich Informationen von den SuS. L legt hierbei besonderen Wert auf das mehrfache „Durchspielen“ der Aufgabe mit angenommen Werten, ggf. bis hin zur Lösung. Die Aufgabe wird ggf. also doppelt gelöst. Eventuell Einschub: Kleine Übung mit Größen und zugehörigen Einheiten (vgl. didaktischer Kommentar) L und SuS lösen gemeinsam die Aufgaben 3 und 7 des Schülerblattes, ggf. auch zuerst durch Probieren. Zu <u>Aufgabe 3</u>: der intuitive Ansatz $x - 14 = 4 \cdot x$ ist falsch! L-Impulsfragen: „Was ist hier größer, x oder $4 \cdot x$?“ „Was muss man für eine Gleichheit noch hinzufügen?“ Zu <u>Aufgabe 7:</u> Auf jeden Fall mindestens einmal mit einem angenommenen Alter von Luise „durchspielen“, vgl. z.B. Zahlen am Rand. Alle beteiligten Größen genau aufschreiben. Alter von Luise heute [J.]: x 10 Alter von Luise vor 3 Jahren [J.]: x–3 7 Alter von Susanne in 2 Jahren [J.]: $4 \cdot (x-3)$ 28 Alter von Susanne heute [J.]: $4 \cdot (x-3) - 2$ 26	Tafel / Heft
2. Übung I EA/PA 30 Min.	SuS lösen (ggf. zuerst auch durch Probieren!) die Aufgaben 1; 2; 4; 5 und 6 des Schülerblattes. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt / Heft
3. Erarbeitung II FEU 15 Min.	L und SuS lösen gemeinsam die weiterführende Aufgabe 11 des Schülerblattes (vgl. Lehrerblatt Struktur 5.).	Tafel / Heft
4. Übung II EA/PA 30 Min.	SuS bearbeiten die Aufgaben 8; 9; 10; 12; 13 und 14 (evtl. in der Softvariante – vgl. didaktischer Kommentar) des Schülerblattes. Lösungen der Aufgabe 11: 11a) Eintrag im Rechteck der unteren Zeile: 9 11b) Der Eintrag in den beiden Rechtecken der unteren Zeile ist beliebig: x und 11-x L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend.	Schülerblatt / Heft

Lehrerblatt

Der Bau von LED-Smileys bietet die Möglichkeit, die Löttechnik zu üben und gleichzeitig ein kleines Deko-Objekt mit dem besonderen Pfiff leuchtender Augen zu bauen.
Die LED-Smileys können sowohl mit einer 9 V-Batterie als auch mit einer 4,5 V-Batterie betrieben werden. 9 V-Batterien gibt es in jedem Supermarkt. Sie sind aber etwas teurer als 4,5 V-Batterien, die vor allem in Elektroläden oder im Elektronikhandel erhältlich sind. Die Batterien zum Testen in der Stunde können an vielen Schulen aus der Physiksammlung ausgeliehen werden. Für zuhause müssten sich die SchülerInnen um eigene Batterien kümmern.
Sie werden vermutlich in einem Physik- oder Technikraum arbeiten. Machen Sie sich vorher zusammen mit einem Physik- bzw. Techniklehrer mit dem Raum vertraut (Strom einschalten, Sicherheitseinrichtungen wie z.B. Not-Aus etc.).

Zeitbedarf:
Ungefähr 60 min – je nach Vorkenntnissen der SchülerInnen.

Materialliste (je Schüler):
- □ 2 Leuchtdioden (LEDs)
- □ 1 Widerstand 470 Ohm
- □ ca. 25 cm Silberdraht
- □ 2 Büroklammern aus Metall
- □ bleifreies Lötzinn

Werkzeug (pro 2er-Gruppe):
- □ Lötkolben mit sicherer Ablage
- □ Reinigungsgewölle für den Lötkolben
- □ Schutzunterlage für die den Tisch
- □ 2 Zagen
- □ Seitenschneider
- □ 9 V- oder 4,5 V-Batterien zum Testen

Sicherheitshinweise:

- Der Umgang mit Lötkolben und Experimente mit Elektrizität sind an Schulen nur unter Einhaltung gewisser Sicherheitsmaßnahmen erlaubt. **Sprechen Sie frühzeitig mit einem Physiklehrer der Schule über diese Maßnahmen, die Nutzung eines geeigneten Raums und die Anwesenheit eines Physik- bzw. Techniklehrers**!
- Sie dürfen nur mit Schüler löten, wenn Sie selbst vorher an eine **Schulung zur Sicherheit beim Löten** teilgenommen haben. Eine solche Schulung ist z.B. Teil der Mkid-Fortbildungen für Klasse 7.
- Sie benötigen eine **schriftliche Gefährdungsbeurteilung (GBU)** und müssen die relevanten **Betriebsanweisungen (BA)** Ihrer Schule kennen sowie alle dort genannten **Vorgaben und Vorsichtsmaßnahmen einhalten**. Klären Sie dies mit den Physik- oder Techniklehrern Ihrer Schule ab. Beispiele für diese Dokumente finden Sie im Mkid-Material. In diesem können Sie sich auch über wichtigste Sicherheitsregeln informieren. Es sind aber stets die Dokumente und Vorgaben Ihrer Schule zu beachten.
- Bevor die **SchülerInnen** löten dürfen, müssen sie **über alle wichtigen Sicherheitsregeln informiert werden**. Dabei sollte auch vom Lehrer vorgeführt werden, wie das Löten funktioniert.
  Zu den wichtigsten Regeln gehört es, die Stromkabel vor jeder Benutzung der Lötkolben auf Schäden zu überprüfen. Beim Löten darf die Lötspitze diese Kabel nicht berühren (das sonst die Isolation der Kabel schmelzen könnte). Beim Berühren der heißen Lötspitze gibt es schmerzhafte Brandblasen

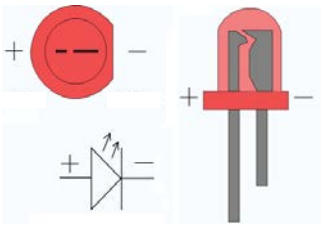
oder -wunden, was daher unbedingt vermieden werden muss. Nach dem Löten müssen alle mit Seife die Hände waschen (Zeit einplanen, vorher ggf. Seife und Papiertücher organisieren).

- Sie werden für dieses Modul in einem **naturwissenschaftlichen Fachraum oder Technikraum** arbeiten. Dort dürfen sich SchülerInnen **nicht ohne fachkundige Aufsicht** aufhalten. Am einfachsten erreichen Sie das durch die Anwesenheit eines Physiklehrers (oder Techniklehrers).

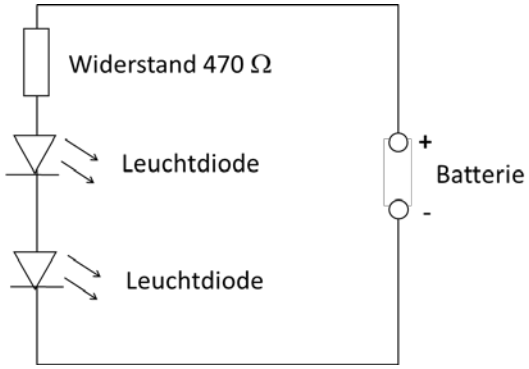
Vorgehen:
Lassen Sie die SchülerInnen zuerst den Kopf zusammenlöten und die Büroklammern als Füße ergänzen. Die Leuchtdioden sollten erst gelötet werden, wenn man schon erste Erfahrungen mit der Löttechnik gesammelt hat. Der Grund ist, dass eine Leuchtdiode - anders als der Draht und die Büroklammern – hitzeempfindlich ist und man an ihr nicht länger als 5 s am Stück löten sollte. Hat das Verlöten in dieser Zeit noch nicht (richtig) geklappt, muss man zum Abkühlen kurz warten, bevor es weiter geht.

Bei der Gestaltung der Gesichter sind der Phantasie der SchülerInnen wenige Grenzen gesetzt.
Die folgenden Punkte müssen allerdings beachtet werden:

- Leuchtdioden lassen Strom nur in eine Richtung zu, schließ man sie verkehrt herum an die Batterie an, leuchte sie nicht. Daher muss man darauf achten, dass bei jeder LED das lange Beinchen in Richtung des Pluspols der Batterie zeigt und das kurze Beinchen in Richtung des Minuspols. Wie man außer an der Länge der Beinchen erkennen kann, welche Seite in Richtung Pluspol zeigen muss, zeigt die nebenstehende Abbildung.

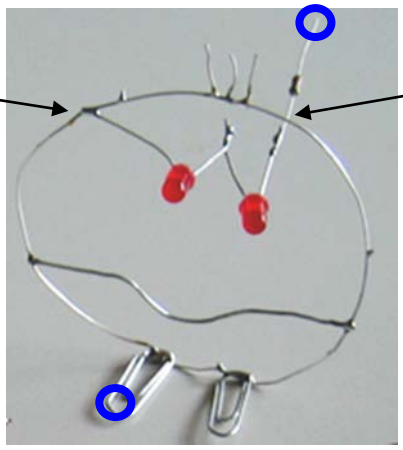


- Die beiden Leuchtdioden werden in Reihe („hintereinander“) geschaltet. Zusätzlich muss ein Schutzwiderstand in Reihe zu den Leuchtdioden geschaltet werden, um die Stromstärke auf Werte (von typischerweise ca. 20 mA) zu begrenzen, die LEDs aushalten können. Der Schaltplan sieht somit folgendermaßen aus:



- Die LED-Augen dürfen nicht links und rechts mit dem Kopf verlötet werden, denn sonst hat man die beiden LEDs mit einem Draht überbrückt. Die LEDs können dann nicht leuchten und beim Anschluss an die Batterie erhält man einen Kurzschluss.

LED-Augen nur an einer Seite an den Kopf anlöten.



Hier darf die LED / der Widerstand nicht den Kopf berühren.
Der LED- / Widerstandsdraht geht nach hinten weg und wird später an den Pluspol der Batterie angeschlossen.

Geeignete Stellen, um die Batterie anzuschließen.

Zum Anschluss an die Batterie kann man einen der Füße auf einen Pol der Batterie klemmen und den Draht am Widerstand zum andern Pol der Batterie biegen. Abhängig davon, in welcher Orientierung die LEDs eingebaut wurden, müssen – wie oben erwähnt – Plus- und Minuspol der Batterie richtig herum angeschlossen werden. Das ist ein häufiger Grund dafür, dass bei einzelnen Smileys die LEDs nicht leuchten. Ein weiterer ist, dass die beiden LEDs nicht in der gleichen Orientierung eingebaut wurden (vgl. den Schaltplan).

Schnelle Schülergruppen können ihre LED-Smiley beliebig verschönern und erweitern (z.B. mit Haaren, Ohren, …) oder anderen Gruppen helfen.

007 Die Lizenz zum Löten

Sicherheit beim Löten in der Schule

Löten mit Lötkolben oder Lötstation

Was dürfen SchülerInnen?

Maschinen- und Geräteinsatz im Unterricht	Jahrgangsstufen 5/6	7/8	ab 9
Lötkolben (elektrisch)	TS	S	S

A: Unter direkter Aufsicht arbeiten (D.h. Lehrer steht direkt daneben.)
TS: Teilselbstständig arbeiten (D.h. der Lehrer hat alle im Blickfeld.)
S: Selbstständig arbeiten (Lehrer ist im Raum und beaufsichtigt wie üblich.)

Hinweis: Arbeiten im Fachraum nur in Anwesenheit eines Fachlehrers erlaubt.

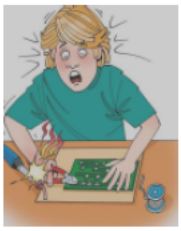
Sicherheitshinweise

An Schulen dürfen die üblichen Lötarbeiten (Weichlöten) durchgeführt werden. Hierfür reicht in der Regel die natürliche Raumlüftung (Fensterlüftung) aus. Es dürfen nur bleifreie Lote eingesetzt werden, siehe auch II – 5.6.

Parameter	Bleihaltige Lote	Bleifreie Lote
Schmelzpunkt typischer Lote [°C]	Ca. 179 bis 189	Ca. 217 bis 227
Temperatur an der Lötstelle [°C]	Ca. 215	Ca. 250
Lötzeit [sec]	2 bis 3	> 3
Lötspitzentemperatur [°C]	Ca. 350 bis 400	Ca. 390 bis 400

Sicherheitshinweise

- Vor Verwendung des Lötkolbens die Zuleitungen auf Schäden prüfen.
- Achtung: Heiße Lötspitze nicht berühren.



- Berührungen der heißen Lötkolbenspitze mit dem Zuleitungskabel vermeiden. Möglichst Lötkolben mit Silikonkabel einsetzen oder Lötstationen mit 12 Volt Ausgangsspannung verwenden.
- Nach der Arbeit Hände waschen.
- Nachbearbeitung Platinen:
- Überstehende Drahtstücke nach dem Einlöten der Bauteile mit Abisolierzange so abschneiden, dass die Drahtstücke nicht als Geschoss durch die Luft fliegen.

Gefährdungsbeurteilung und Betriebsanweisung

Dokumentation zur Gefährdungsbeurteilung
Bau einer Selbsthalteschaltung (Zauberlicht)

Schule / Dienststelle:
Unterrichtsfach / Fachbereich:

Klassenstufe: Klasse 7
Experiment: Bau einer Selbsthalteschaltung (Zauberlicht)

Wer führt das Experiment durch? ☐ **Lehrkraft** ☒ **Schülerinnen / Schüler**

Sind Gefährdungen durch elektrische Energie vorhanden?

☒ **Nicht berührungsgefährliche Spannung,**
da ausschließlich mit Spannungen bis zu maximal 9 V experimentiert wird. Die Spannung wird ausschließlich durch Batterien zur Verfügung gestellt, es werden keine Netzgeräte verwendet.

Es müssen die allgemeinen Sicherheitsmaßnahmen für Experimente mit elektrischer Energie und für das Experimentieren generell beachtet werden. Schülerexperimente sind in allen Klassenstufen erlaubt.

Sind weitere Gefährdungen vorhanden (z. B. mechanische, thermische, optische)?

☒ **Thermische Gefährdungen beim Löten**
Bei der Verwendung der Lötkolben besteht die Gefahr von Verbrennungen bei unsachgemäßem Umgang mit den Lötkolben.
☒ **Mechanische Gefährdungen beim Sägen**
Möglichkeit von Schnittverletzungen

Gefährdungsbeurteilung und Betriebsanweisung

… Schulname …

Betriebsanweisung
für das Arbeiten mit
Lötstationen & Lötkolben

Muster

Gefahren für Mensch und Umwelt

- Elektrische Gefahr bei defekter Kabelisolierung

- Heiße Oberfläche des Lötkolbens, heiße Metallteile, heißes Lötmittel

- Flussmittel- und Lotdämpfe: Sensibilisierung oder Reizung durch Einatmen oder Hautkontakt möglich.

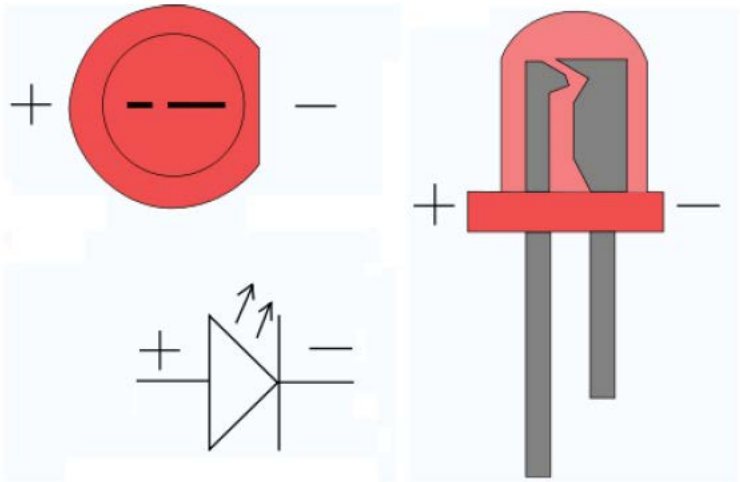
Schutzmaßnahmen und Verhaltensregeln

- Nur bleifreies Lötzinn verwenden.
- Lötkolben und –stationen vor Verwendung auf sichtbare Schäden überprüfen. (Besonders auf intakte Isolierung der Kabel achten.)
- Nichtbrennbare Unterlagen verwenden.
- Für ausreichende Be- bzw. Entlüftung sorgen.
- Standsichere Ablage für Lotkolben verwenden.
- Löttemperatur nicht zu hoch wählen.
- Kabel und Lötkolben so führen, dass die heißen Teile des Lötkolbens nicht die Isolierung der Kabel berühren und schmelzen können.
- Nach dem Löten Hände waschen.
- Lötkolben bis zum vollständigen Abkühlen so lagern, dass die Spitze keine Kabel oder brennbaren Materialien berührt.

Verhalten bei Störungen und im Gefahrenfall

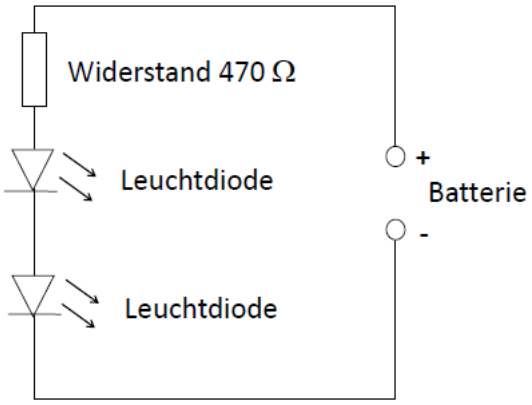
Praktische Übung: LED-Smileys bauen

Leuchtdioden

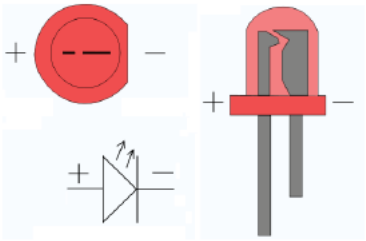


Leuchtdioden (LED)

Leuchtdioden benötigen einen **Schutzwiderstand,** der in Reihe geschaltet ist.



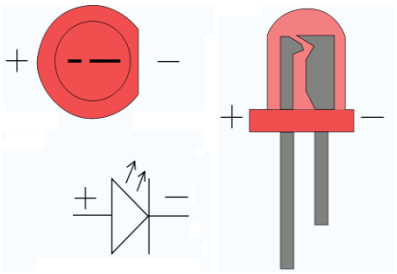
Richtige Orientierung der LED erkennen:



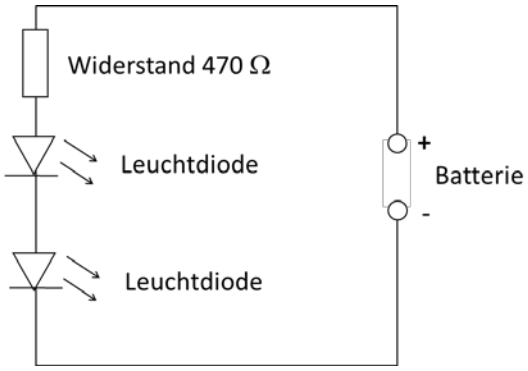
Vorlage für einen LED-Smiley

Beispiel für einen LED-Smiley:

So erkennt man bei einer LED, welche Seite in Richtung Pluspol zeigen muss:



Schaltplan eins LED-Smileys:



… Schulname …

Betriebsanweisung

für das Arbeiten mit

Lötstationen & Lötkolben

Muster

Gefahren für Mensch und Umwelt

- Elektrische Gefahr bei defekter Kabelisolierung

- Heiße Oberfläche des Lötkolbens, heiße Metallteile, heißes Lötmittel

- Flussmittel- und Lotdämpfe: Sensibilisierung oder Reizung durch Einatmen oder Hautkontakt möglich.

Schutzmaßnahmen und Verhaltensregeln

- Nur bleifreies Lötzinn verwenden.
- Lötkolben und –stationen vor Verwendung auf sichtbare Schäden überprüfen. (Besonders auf intakte Isolierung der Kabel achten.)
- Nichtbrennbare Unterlagen verwenden.
- Für ausreichende Be- bzw. Entlüftung sorgen.
- Standsichere Ablage für Lotkolben verwenden.
- Löttemperatur nicht zu hoch wählen.
- Kabel und Lötkolben so führen, dass die heißen Teile des Lötkolbens nicht die Isolierung der Kabel berühren und schmelzen können.
- Nach dem Löten Hände waschen.
- Lötkolben bis zum vollständigen Abkühlen so lagern, dass die Spitze keine Kabel oder brennbaren Materialien berührt.

Verhalten bei Störungen und im Gefahrenfall

- Defekte Lötgeräte nicht weiter verwenden und vom Netz trennen.
- Bei Beschädigung der Isolierung einer Netzleitung oder eines Kabels Lötgerät vom Netz trennen – ggf. Not-Aus-Schalter verwenden.
- Wenn keine ausreichende Lüftung mehr sichergestellt ist, Lötarbeiten beenden.

Erste Hilfe

- Verbrennungen mit Wasser kühlen (jedoch nicht bei offenen Brandwunden).
- Ggf. Wundversorgung bei Brandwunden.
- Bei Reizung Lötarbeiten beenden und ggf. für Frischluft sorgen.
- Bei Unfällen mit elektrischer Energie ist grundsätzlich ein Notarzt zu rufen. Bewusstseinskontrolle durchführen und notwendige Maßnahmen ergreifen.

Instandhaltung

- Beim Beenden des Lötens die Lötspitzen reinigen und mit einer dünnen Lötzinnschicht versehen (Oxidationsschutz).
- Reparaturen an elektrischen Geräten dürfen nur von einer Elektrofachkraft durchgeführt werden.

Datum: 14.05.2019

Dokumentation zur Gefährdungsbeurteilung
Bau von LED-Smileys in Löttechnik

Schule / Dienststelle:
Unterrichtsfach / Fachbereich:

Klassenstufe: Klasse 7
Experiment: Bau eines LED-Smileys

Wer führt das Experiment durch? ☐ **Lehrkraft** ☒ **Schülerinnen / Schüler**

Sind Gefährdungen durch elektrische Energie vorhanden?

☒ **Nicht berührungsgefährliche Spannung**,
da ausschließlich mit Spannungen bis zu maximal 9 V experimentiert wird. Die Spannung wird ausschließlich durch Batterien zur Verfügung gestellt, es werden keine Netzgeräte verwendet.

Es müssen die allgemeinen Sicherheitsmaßnahmen für Experimente mit elektrischer Energie und für das Experimentieren generell beachtet werden. Schülerexperimente sind in allen Klassenstufen erlaubt.

Sind weitere Gefährdungen vorhanden (z. B. mechanische, thermische, optische)?

☒ **Thermische Gefährdungen beim Löten**
Bei der Verwendung der Lötkolben besteht die Gefahr von Verbrennungen bei unsachgemäßem Umgang mit den Lötkolben.

☒ **Schmelzen der Isolierung an Stromkabeln mit der heißen Lötspitze**
In der Folge kann es zu sehr gefährlichen Elektrounfällen kommen, falls die blanken Drähte der Netzzuleitung berührt werden.

☒ **Auftreten eventuell reizender Dämpfe beim Löten**
Möglichkeit der Reizung der Atemwege

Welche Sicherheitsmaßnahmen werden durchgeführt?

☒ Allgemeine Schutzmaßnahmen und Verhaltensregeln für Experimente mit elektrischer Energie

☒ Sichtkontrolle aller Lötstationen/ Lötkolben vor der Verwendung durch den Lehrer/ Kursleiter: Überprüfen aller Kabel auf sichtbare Defekte, Überprüfen der Gehäuse auf sichtbare Defekte.

☒ Die Schüler werden über den richtigen Umgang mit Lötkolben und die möglichen Gefahren dabei informiert. Dazu gehören unter anderem:

- Nur bleifreies Lötzinn verwenden.
- Lötkolben nur auf der Ablage ablegen.
- Wer den Lötkolben in der Hand hält, schaut ständig auf die Spitze des Lötkolbens.
- Darauf achten, dass keine Kabel mit der heißen Lötspitze berührt werden (Gefahr des Schmelzens der Isolierung der Kabel).
- Hände nach dem Löten gründlich waschen.
- Alle weiteren Verhaltensregeln der Betriebsanweisung „Lötstationen und Lötkolben“ (siehe Anlange) beachten.

☒ Beachtung der Betriebsanweisung „Lötstationen und Lötkolben“

☒ Für ausreichende Lüftung sorgen (z.B. Fenster öffnen).

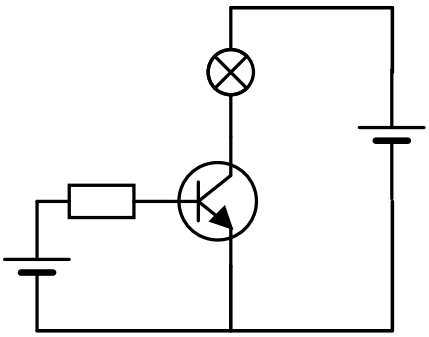
Datum, Unterschrift _____

Lehrerblatt

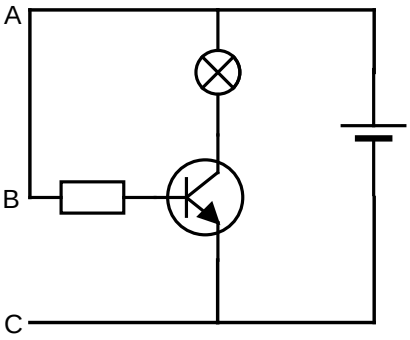
Sachanalyse und didaktische Reduktion:

Diese Stunde dient als Vorbereitung zum Bau des magischen Lichtgalgens (umgangssprachlich-diskriminierend auch als Ostfriesenlicht bezeichnet). Die Grundidee ist eine rückgekoppelte Schaltung, bei der der angesteuerte Verbraucher den Schalter selbst beeinflusst. Für das Verständnis der Schaltung, muss man den Transistor als Schalter begreifen. Dies wird in zwei bis drei Stufen erreicht.

Es wird vorausgesetzt, dass die SuS wissen, was ein Stromkreis ist. In der ersten Stufe, soll noch einmal reflektiert werden, dass ein Lämpchen im geschlossenen Stromkreis brennt und dieser mit einem Schalter unterbrochen werden kann.
Die zweite Stufe kann je nach Ausstattung der Schule, als Schülerexperiment durchgeführt werden, die Lehrperson vorführen oder auch nur theoretisch bearbeitet werden. Der entscheidende Gedanke ist die Trennung in einen Steuer- und einen Arbeitsstromkreis. Man verwendet ein Relais, das den Arbeitsstromkreis schließt, wenn im Steuerstromkreis Strom fließt. Man kann in diesem Beispiel (bei praktischer Durchführung) erkennen, dass bei langsamem Ansteigen des Stroms im Steuerstromkreis ab einem Schwellwert schlagartig der Strom im Arbeitsstromkreis fließt oder nicht fließt. Man hat also aus einem kontinuierlichen Stromverlauf einen Ein-Aus-Stromverlauf erzeugt.
Dies wird nun in der dritten Stufe mit einem Transistor erreicht. Der Steuerstromkreis befindet sich zwischen Basis und Emitter, der Arbeitsstromkreis zwischen Kollektor und Emitter.



Zum Schutz des Transistors baut man auch in den Steuerstromkreis einen Widerstand ein. Ein möglicher Aufbau könnte also wie rechts dargestellt aussehen. Wenn man als Spannungsquellen 4,5 V-Flachbatterien verwendet, dann ersetzt man den Widerstand durch zwei einen Festwiderstand und einen regelbaren Widerstand um den Strom kontinuierlich ansteigen zu lassen. BITTE auf die Polung achten: Minus liegt immer am Emitter. Man kann sich eine Spannungsquelle sparen, indem man die Basis über den Widerstand direkt an die rechte Spannungsquelle anschließt. Der Basisstrom kann nun auf zwei Weisen unterbrochen werden. Erstens, indem man den Stromkreis zwischen A und B unterbricht und zweitens, indem man zwischen B und C einen Kurzschluss einbaut (also B und C verbindet). Das kann man mit einem Schalter jeweils demonstrieren. Im ersten Fall unterbricht ein geöffneter Schalter den Stromkreis, im zweiten Fall ein geschlossener Schalter.



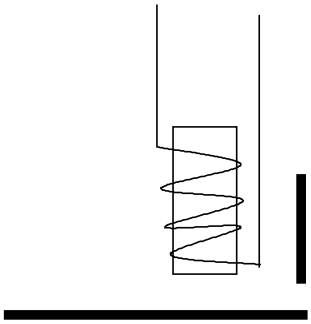
Nun kann man diese Schaltung zu Steuerungszwecken verwenden. Neu hinzu kommt, dass es Bauelemente gibt, die den Strom abhängig von Licht, Wärme oder anderen Einflüssen unterschiedlich stark fließen lassen. Für unser Beispiel verwenden wir einen LDR (Light Dependend Resistor), also einen lichtempfindlichen Widerstand. Dieser lässt umso mehr Strom fließen, je heller er beleuchtet wird. Man baut statt der Schalter alternativ einen LDR ein. Ist er zwischen A und B, dann leuchtet die Lampe, wenn er beleuchtet wird. Ist er zwischen B und C, dann leuchtet die Lampe, wenn er nicht beleuchtet wird. Ist die Lampe nahe an der Strecke AB, dann kann sie mit ihrem Licht den LDR beleuchten und damit ihren Stromkreis aufrecht erhalten Man benötigt nur einen kurzen Lichtimpuls, um die Lampe anzuschalten und eine kurze Unterbrechung des Lichtflusses, um sie auszuschalten.

Grundlagen der Selbsthalteschaltung

Es soll Menschen geben, die noch nicht gelernt haben, dass man ein Licht mit einem Schalter ein- und ausschaltet. Für diese Menschen wollen wir eine elektrische Lampe bauen, die man mit einem Streichholz anschalten und dann auch ausblasen kann.
Um diese Lampe zu erfinden, muss man einige Grundlagen verstehen. Diese werden nun erforscht.

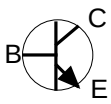
1. Ein- und Ausschalten einer Lampe
Baue einen Stromkreis mit einer Lampe auf. Im Stromkreis soll ein Schalter sein. Zeichne ein Schaltbild:

2. Ein Schalter ist ein mechanisches Bauteil, das den Stromkreis öffnet und schließt. Man kann es durch ein magnetisches Relais ersetzen.



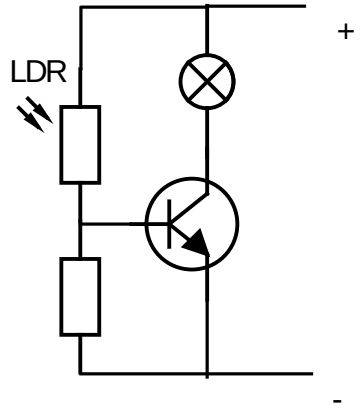
Überlege, wie man mit diesem Bauteil eine Lampe aus und einschalten kann.

3. Das Relais kann man durch ein elektronisches Bauteil ersetzen, den Transistor.



Der Schalter befindet sich zwischen dem Kollektor C und dem Emitter E. Fließt zwischen der Basis B und dem Emitter E ein Strom, dann ist der Schalter CE geschlossen, sonst ist er offen. Zeichne eine Schaltung zum Schalten einer Lampe und baue sie dann auf.

4. Was ist nun der Vorteil dieser elektronischen Schaltung? Man kann in den Basis-Emitter-Stromkreis Sensoren schalten, die die Lampe aus- und ein-schalten. Hier ein entsprechender Stromkreis:



Der LDR ist ein Bauteil, das bei Beleuchtung viel Strom durchfließen lässt und im Dunkeln praktisch keinen Strom fließen lässt. Kannst du erklären, was passiert, wenn man den LDR beleuchtet? Baue die Schaltung auf.

5. Vertausche den LDR mit dem Widerstand. Was erwartest du?

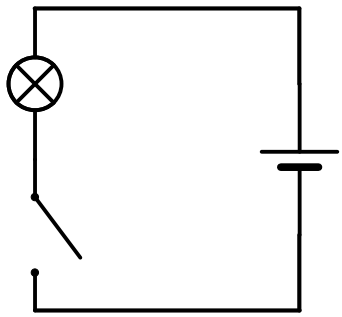
6. Es gibt entsprechende Bauteile, die abhängig von der Temperatur den Strom mehr oder weniger durchlassen. Experimentiere mit diesen Bauteilen.

Lösungen zum Schülerblatt und Experimentierhinweise

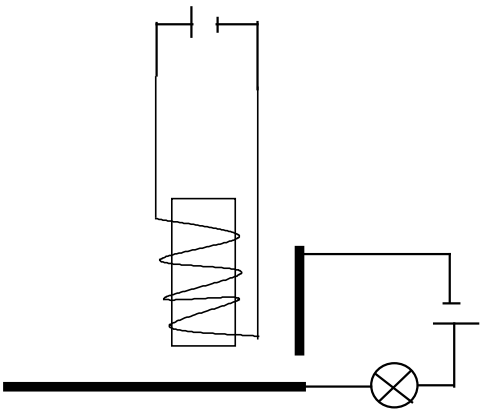
Leider hängt die experimentelle Durchführung stark von der Ausstattung der Schule ab. Die Schule hat vermutlich Steckbretter, auf denen elektronische Schaltungen aufgebaut werden können. Wichtig ist, dass vor der Basis des Transistors immer ein Widerstand von mindesten 100 Ω eingebaut wird. Wenn man Leistungstransistoren verwendet, dann gehen diese auch kaum kaputt. Die Experimente sollten unbedingt vorher ausprobiert werden. Mit einem Spannungsmesser kann man etwaige Fehler in Schaltungen aufdecken. Dazu schließt man den negativen Pol an den negativen Pol der Spannungsquelle an und misst nun mit dem positiven Pol an verschiedenen Punkten der Schaltung. Grundsätzlich gilt: Erhält man einen hohen Spannungswert zwischen Kollektor und Emitter, dann ist der „Schalter“ offen. Zwischen Basis und Emitter hat man bei einem gängigen Silizium-Transistor eine Spannung von ca. 0,6 V bis 0,7 V, wenn er den Kollektor-Emitter-Stromkreis schließt.
Benötigt werden pro Gruppe:
1 Steckbrett, Kabel und Stecker (je nach Ausstattung)
Werte im Folgenden nur Vorschläge – geht auch mit ähnlichen Bauelementen – ausprobieren!
1 NPN-Transistor 2N2222, 1 Widerstand 100 Ω (vor der Basis nur zur Sicherheit), Widerstände mit 1 kΩ und 10 kΩ, 1 LDR, evtl. 1 PTC (wärmeempfindlicher Widerstand), 1 Potentiometer 10 kΩ, Flachbatterie 4,5 V, Lämpchen 3,7 V, 0,3 A mit Fassung.
Bitte auf Polung achten: MINUS immer am Emitter.

Lösungen des Arbeitsblattes:

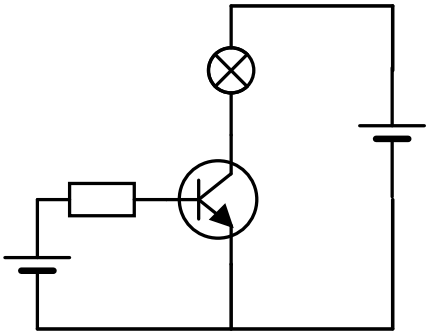
1.



2.



3.



4. Wenn der LDR beleuchtet wird, kann viel Strom durch ihn fließen und damit fließt Strom von der Basis zum Emitter, der Transistor schaltet durch, die Lampe leuchtet.

5. Nun macht der LDR bei Beleuchtung einen Kurzschluss, d.h. die Lampe geht aus. Wenn er nicht beleuchtet wird, leuchtet sie.

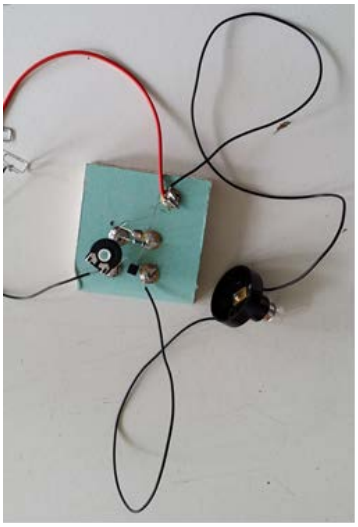
Lehrerblatt

Bau eines magischen Lichtgalgens

Das Experimentierset „Galgen“ kann man bei Conrad-Elektronik mit der Best.Nr. 29 90 22 für 10,99 Euro erwerben. Für eine Gruppe von 15 Schülerinnen und Schüler entstehen also ca. 170.-, die die Schule aus den Fördermitteln aufbringen muss. Alternativ kann man auch ohne Bausatz mit selbst zusammengestellten Elementen (natürlich billiger, aber auch aufwändiger) zurechtkommen. Vorteil des Eigenbaus ist, dass die SuS auch die Schaltung selbst entwerfen können und dadurch nicht nur mehr lernen, sondern auch ein größeres Erfolgserlebnis haben. Die Gefahr eines Misserfolgs dürfte aber auch größer sein.
Lehrerpersonen, die keine Elektronik-Erfahrungen haben, sollten den Bausatz verwenden.
Vorbereitend kann die Stunde „Selbsthalteschaltung 1“ verwendet werden.

Kostenvergleich

Bausatz Conrad 10,99 4,5 V Flachbatterie 1,99 2 Büroklammern **Summe 12,98**	Transistor BC 517 TO92 Fotowiderstand A9069 Potentiometer 5k Lampe 3,5 V 0,2A mit Fassung 4,5 V Flachbatterie Sperrholz 0,5 cm x 10 cm x 30 cm Holzstab 1 cm x 1 cm x 40 cm Doppellitze 0,4 m Summe: **9,14**	0,29 1,79 0,57 1,80 1,99 2,00 0,50 0,20



Da man beim Selbstbau keine vorgefertigte Platine hat, muss man mit einem 3 mm Holzbohrer Löcher in ein Holzbrettchen bohren und dort das Bauelement + ein Kabel jeweils einstecken und mit Lötzinn vergießen. Im Bild ist eine Reißnagelschaltung dargestellt.

Außer dem Bausatz bzw. den Bauelementen benötigt man noch
Klebstoff,
Lötstation,
bleifreies Lötzinn,
einen kleinen Schraubendreher,
Zange,
evtl. Entlötpumpe,
Handbohrer 3 mm und evtl. auch 1 mm,
Handsäge,
für die Anwendung dann ein Feuerzeug bzw. eine Taschenlampe.

Anleitung: Man kann die mit dem Bausatz gelieferte Anleitung oder das Arbeitsblatt verwenden.

Zum Kleben: Holzleim dauert zu lange zum Trocknen, selbst Alleekleber erfordert Geduld. Deshalb wurden beim Arbeitsblatt die Holzarbeiten vorgezogen. Der Kleb kann trocknen, während gelötet wird. Mit Heißkleber geht es wesentlich schneller. Das kann dann evtl. die Lehrperson auch schon in der Vorbereitung erledigen. Entscheiden Sie aufgrund der Gruppe und der Schulausstattung.

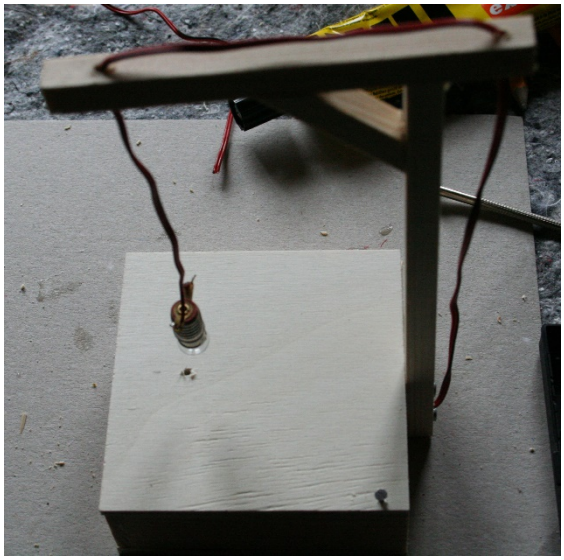
Das Bohren der Löcher erfordert ein bisschen Geschick und könnte evtl. auch schon in der Vorbereitung erledigt werden. Ob man wegen der zwei Sägeschnitte eine Handsäge bereitlegt, hängt wieder von der

Gruppe ab. Hier bietet es sich wirklich an, die beiden Schnitte in der Vorbereitung schon auszuführen. Vielleicht können SuS eine Laubsäge mitbringen?

Es bietet sich an vorher eine kleine Lötübung durchzuführen. Unbedingt auf die richtige Polung des Transistors und der Batterie achten. Der Transistor kann gut geschützt werden, wenn man zwischen Lötstelle und Transistor das Beinchen mit einer Zange anfasst, damit die Wärme abgeleitet wird. SuS erwärmen gerne das Lötzinn statt der Lötstelle. Darauf sollte man hinweisen. Insgesamt benötigt man für den Bau 2 Sitzungen.

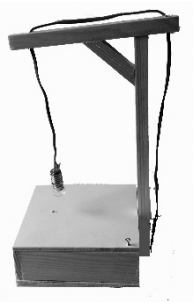
Gehäuse aus Karton, Galgen aus Draht

Zum Vergleich die Bausatz-Variante



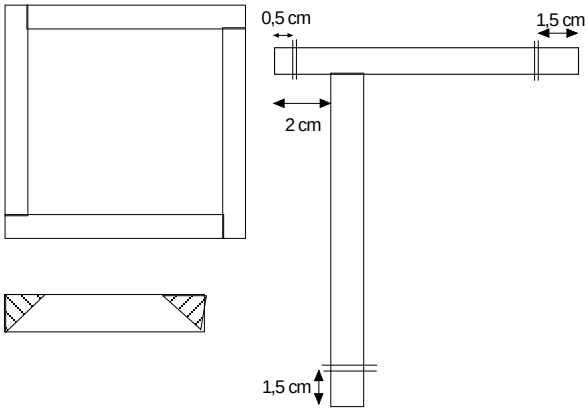
Bau eines magischen Lichtgalgens

Im Folgenden bauen wir den rechts abgebildeten Lichtgalgen. Es handelt sich dabei um eine elektrische Lampe, die man mit einem Streichholz anzünden und anschließend ausblasen kann.



1. Holzarbeiten

Klebe zuerst das Gehäuse mit einer Grundplatte und dann den Galgen zusammen.



Die Querstrebe musst du im 45°-Winkel absägen und dann ankleben. Dann solltest du noch mit einem 3mm-Bohrer Löcher an den angegebenen Stellen bohren.
Entweder musst du mit dem Bohren warten, bis der Klebstoff gut getrocknet ist, oder du bohrst die Löcher schon vor dem Kleben an der passenden Stelle. Zuletzt wird der Galgen mittig an der Grundplatte angeklebt. Nun legst du alles zum Trocknen zur Seite

2. Montage der Bauelemente auf der Platine

Die Position der Bauelemente ist auf der Oberseite der Platine eingezeichnet. Gelötet wird auf der Unterseite. In Partnerarbeit geht ihr jeweils so vor:
a) Steckt das Bauelement von oben durch die jeweils vorgebohrten Löcher und knickt den Draht auf der Unterseite um.
b) Der Draht, der verlötet wird, wird vom einen Partner mit einer Zange auf der Oberseite zwischen Bauelement und Platine gehalten. Der andere Partner hat in der einen Hand den Lötkolben und in der anderen Hand das Lötzinn. Nun erwärmt er die Lötstelle und hält das Lötzinn auf die Lötstelle (nicht an den Lötkolben). Das Lötzinn bildet eine kleine Haube über dem Draht und der Lötstelle.
BEACHTET dabei Position und Abstand der Bauelemente, wie im Folgenden beschrieben.

Einbau der Reihe nach:
LDR: Er soll ungefähr 1,5 cm bis 2 cm von der Oberseite der Platine abstehen (WICHTIG).

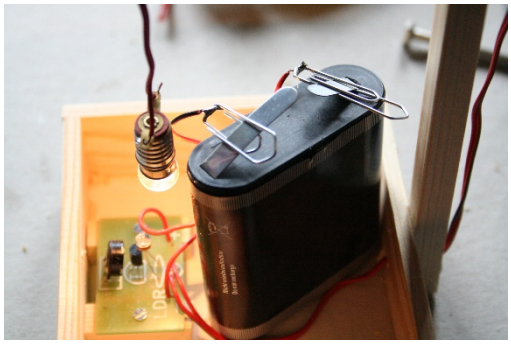
Transistor: Achtet darauf, dass die abgeflachte Kante genau wie im Bild auf der Oberseite der Platine liegt (sonst wären Kollektor und Emitter vertauscht!). Hier ist die Zange am Draht ganz wichtig, weil der Transistor empfindlich ist. Wird er zu heiß, ist er kaputt (und es gibt keinen Ersatz!!!)
Potentiometer: Die Seite, an der man einen Schraubendreher einstecken kann, muss zur Außenseite der Platine zeigen.

Nun schneidet man ein ca. 10 cm langes Stück des Kabels ab und trennt an beiden Enden die beiden Kabel ca. 2 cm voneinander und entfernt ca. 1 cm der Isolierung. Dann lötet man das schwarze Kabel bei Minus und das rote Kabel bei Plus an. Das Kabel wird auch von oben durch die Bohrungen geführt.

Zuletzt lötet man eine Seite des restlichen Kabels in die beiden Bohrungen der Platine für das Lämpchen. Hier spielt die Polung keine Rolle.
Nun schraubt man die Platine durch die beiden Löcher auf die beiden verbliebenen Holzstäbchen.

3. Zusammenbau

Die Platine wird mittig auf die dem Galgen gegenüberliegende Seite des Gehäuses gelegt, sodass das Potentiometer zur Gehäusewand zeigt. Bohre nun in der Höhe des Schraubendreher-Anschlusses des Potentiometers mit dem 3mm-Bohrer ein Loch, sodass du von außen mit einem kleinen Schraubendreher das Potentiometer einstellen kannst. Auf der Seite des Galgens bohrst du im Loch am Fuß des Galgens durch das Gehäuse. Nun kannst du das Kabel für die Lampe durch die Löcher des Galgens führen und so abschneiden, dass ungefähr 6 cm oberhalb des Gehäuses endet. Dort lötest du die Fassung der Lampe an. Auf die Polung kommt es dabei nicht an.
An das 10 cm lange Kabel, das du an Plus und Minus angeschlossen hast, lötest du jeweils eine Büroklammer.
Zuletzt muss noch in die Deckplatte des Gehäuses ein 3mm-Loch direkt unterhalb der Lampe und direkt über dem LDR gebohrt werden. Damit das passt, kannst du die Platine verschieben. Sie sollte aber möglichst mittig am Rand des Gehäuses sein und du solltest das Kabel so formen, dass es möglichst gerade vom Galgen hängt. Wenn alles passt, kannst du die Platine am Boden des Gehäuses festkleben. Die Deckplatte befestigt man mit einer Schraube in einer Ecke, damit man sie zur Seite drehen kann.



ACHTE beim Anschließen der Batterie auf die Polung. Die kurze Lasche muss an Plus und die lange an Minus angeschlossen werden. Wenn alles richtig ist, leuchtet die Lampe. Drehe nun am Potentiometer bis sie ausgeht und dann wieder ein kleines Stück zurück. Nun kannst du die Deckplatte anbringen. Zum „Anzünden“ der Lampe kann man ein Streichholz oder auch eine Taschenlampe verwenden.
Evtl. muss du durch das Loch in der Außenwand das Potentiometer nachjustieren.

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf 5. und 6. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Einstieg Vorführung 10 Min.	L zeigt die Galgen-Lampe ohne Erklärung. Ziel ist es so etwas zu bauen. Dazu muss man etwas über Transistoren lernen. Austeilen der Experimentieranordnungen	Galgenlampe
2. Erarbeitung I PA - Schülerexp. 15 Min.	SuS - bauen erste Schaltung - ersetzen Schalter durch Relais (alternativ Lehrerexperiment)	Schülerblatt Experiment
3. Sicherung FEU 10 Min.	Schaltungen werden an der Tafel besprochen Lehrerhinweis für nächste Phase: Auf Polung und auf Schutzwiderstand achten.	Tafel / Heft?
4. Erarbeitung II PA – Schülerexp. 10 Min.	Transistorschaltung	Schülerblatt Experiment
5. Sicherung FEU 5 Min.	Schaltung wird an der Tafel besprochen Kurze Erklärung des LDR für nächste Phase	Tafel / Heft?
6. Erarbeitung III PA – Schülerexp. 10 Min.	Schaltungen mit LDR	Schülerblatt Experiment
7. Sicherung FEU 5 Min.	Schaltung wird an der Tafel besprochen. Evtl. dann Erklärung der Galgenlampe	Tafel / Heft?
8. Erarbeitung IV (optional) PA – Schülerexp. 10 Min.	Schaltungen mit PTC	Schülerblatt Experiment
9. Sicherung (optional) FEU 5 Min.	Schaltung wird an der Tafel besprochen.	Tafel / Heft?

… Schulname …

Betriebsanweisung

für das Arbeiten mit

Lötstationen & Lötkolben

Muster

Gefahren für Mensch und Umwelt

- Elektrische Gefahr bei defekter Kabelisolierung

- Heiße Oberfläche des Lötkolbens, heiße Metallteile, heißes Lötmittel

- Flussmittel- und Lotdämpfe: Sensibilisierung oder Reizung durch Einatmen oder Hautkontakt möglich.

Schutzmaßnahmen und Verhaltensregeln

- Nur bleifreies Lötzinn verwenden.
- Lötkolben und –stationen vor Verwendung auf sichtbare Schäden überprüfen. (Besonders auf intakte Isolierung der Kabel achten.)
- Nichtbrennbare Unterlagen verwenden.
- Für ausreichende Be- bzw. Entlüftung sorgen.
- Standsichere Ablage für Lotkolben verwenden.
- Löttemperatur nicht zu hoch wählen.
- Kabel und Lötkolben so führen, dass die heißen Teile des Lötkolbens nicht die Isolierung der Kabel berühren und schmelzen können.
- Nach dem Löten Hände waschen.
- Lötkolben bis zum vollständigen Abkühlen so lagern, dass die Spitze keine Kabel oder brennbaren Materialien berührt.

Verhalten bei Störungen und im Gefahrenfall

- Defekte Lötgeräte nicht weiter verwenden und vom Netz trennen.
- Bei Beschädigung der Isolierung einer Netzleitung oder eines Kabels Lötgerät vom Netz trennen – ggf. Not-Aus-Schalter verwenden.
- Wenn keine ausreichende Lüftung mehr sichergestellt ist, Lötarbeiten beenden.

Erste Hilfe

- Verbrennungen mit Wasser kühlen (jedoch nicht bei offenen Brandwunden).
- Ggf. Wundversorgung bei Brandwunden.
- Bei Reizung Lötarbeiten beenden und ggf. für Frischluft sorgen.
- Bei Unfällen mit elektrischer Energie ist grundsätzlich ein Notarzt zu rufen. Bewusstseinskontrolle durchführen und notwendige Maßnahmen ergreifen.

Instandhaltung

- Beim Beenden des Lötens die Lötspitzen reinigen und mit einer dünnen Lötzinnschicht versehen (Oxidationsschutz).
- Reparaturen an elektrischen Geräten dürfen nur von einer Elektrofachkraft durchgeführt werden.

Datum: 14.05.2019

Dokumentation zur Gefährdungsbeurteilung
Bau einer Selbsthalteschaltung (Zauberlicht)

Schule / Dienststelle:
Unterrichtsfach / Fachbereich:

Klassenstufe: Klasse 7
Experiment: Bau einer Selbsthalteschaltung (Zauberlicht)

Wer führt das Experiment durch? ☐ **Lehrkraft** ☒ **Schülerinnen / Schüler**

Sind Gefährdungen durch elektrische Energie vorhanden?

☒ **Nicht berührungsgefährliche Spannung**,
da ausschließlich mit Spannungen bis zu maximal 9 V experimentiert wird. Die Spannung wird ausschließlich durch Batterien zur Verfügung gestellt, es werden keine Netzgeräte verwendet.

Es müssen die allgemeinen Sicherheitsmaßnahmen für Experimente mit elektrischer Energie und für das Experimentieren generell beachtet werden. Schülerexperimente sind in allen Klassenstufen erlaubt.

Sind weitere Gefährdungen vorhanden (z. B. mechanische, thermische, optische)?

☒ **Thermische Gefährdungen beim Löten**
Bei der Verwendung der Lötkolben besteht die Gefahr von Verbrennungen bei unsachgemäßem Umgang mit den Lötkolben.

☒ **Mechanische Gefährdungen beim Sägen**
Möglichkeit von Schnittverletzungen

Welche Sicherheitsmaßnahmen werden durchgeführt?

☒ Allgemeine Schutzmaßnahmen und Verhaltensregeln für Experimente mit elektrischer Energie

☒ Sichtkontrolle aller Lötstationen/ Lötkolben vor der Verwendung durch den Lehrer/ Kursleiter: Überprüfen aller Kabel auf sichtbare Defekte, Überprüfen der Gehäuse auf sichtbare Defekte.

☒ Die Schüler werden über den richtigen Umgang mit Lötkolben und die möglichen Gefahren dabei informiert. Dazu gehören unter anderem:

- Nur bleifreies Lötzinn verwenden.
- Lötkolben nur auf der Ablage ablegen.
- Wer den Lötkolben in der Hand hält schaut ständig auf die Spitze des Lötkolbens.
- Darauf achten, dass keine Kabel mit der heißen Lötspitze berührt werden (Gefahr des Schmelzens der Isolierung der Kabel).
- Hände nach dem Löten gründlich waschen.
- Alle weiteren Verhaltensregeln der Betriebsanweisung „Lötstationen und Lötkolben“ (siehe Anlange) beachten.

☒ Beachtung der Betriebsanweisung „Lötstationen und Lötkolben“

☒ Sägen nur mit Handsägen unter direkter Aufsicht des Lehrers/ Kursleiters und nach Einweisung durch den Lehrer/ Kursleiter. Beachten der Sicherheitsvorgaben für den Umgang mit Handsägen.

_____

Datum, Unterschrift

Lehrerblatt

Voraussetzungen:

- Prozentrechnung aus dem Unterricht
- Mkid-Stunde *Prozentrechnung* (idealerweise haben die SuS die Arbeitsblätter aus dieser Stunde dabei)

Organisatorische Vorbereitung der Stunde:
Unterrichtsstunden in Computerräumen setzen gewisse organisatorische Vorarbeiten voraus. Lassen Sie sich dabei durch eine Ansprechperson der Schule helfen.

- Computerraum reservieren
- „Gastzugang" für die Mkid-Lehrkraft beantragen
- Klärung folgender Fragen:
  - Haben alle SuS einen Zugang zum Computernetz? Wissen die SuS, wie sie sich im Schulnetz einloggen können?
  - Gibt es die Möglichkeit, Dateien (z.B. mit einem Beamer) für alle sichtbar zu machen? Können die Rechner der SuS für Phasen des feU gesperrt werden?
  - Welches Tabellenkalkulationsprogramm ist im Schulnetz installiert? Wie wird es aufgerufen?

Ziele und Vorbemerkung:
Im Zentrum dieser Stunde steht die Bearbeitung von Aufgaben zur Prozentrechnung mit Hilfe eines Tabellenkalkulationsprogrammes. Dies fördert ein vertieftes Verständnis dieser Aufgaben. Gleichzeitig ermöglicht die (erfolgreiche) Arbeit mit einem Tabellenkalkulationsprogramm Kompetenzerleben und besitzt daher einen hohen Motivationsgrad.
Auf den Arbeitsblättern wird jeweils das Programm *Excel* erwähnt. Selbstverständlich können die Blätter aber auch mit anderen Tabellenkalkulationsprogrammen bearbeitet werden.

Didaktische Überlegungen:
In der Regel weisen Schülergruppen eine sehr große Heterogenität im Umgang mit dem Computer im Allgemeinen und mit Programmen im Besonderen auf. Dabei sollte auch unerfahrenen SuS ein Kompetenzerleben ermöglicht werden. Dies geschieht nicht dadurch, dass man am Rechner dieser SuS schnell alles selbst durchführt, sondern dadurch dass diese SuS Schritt für Schritt bei der Bearbeitung der Aufgaben begleitet werden. Da die Betreuung unerfahrener SuS in der Regel nicht ausschließlich von der Lehrkraft geleistet werden kann, bietet sich die Einführung eines „Mastersystems" an. Hierzu tragen sich SuS, die eine Aufgabe gut bewältigt haben, in eine Liste ein und bieten sich dadurch als Helfer an. Umgekehrt können SuS, die bei einer Aufgabe Unterstützung benötigen, einen dort eingetragenen Helfer um Hilfe bitten.

Prinzipiell ist es wünschenswert, dass alle SuS an einem eigenen Computer arbeiten können. Erfahrungsgemäß gibt es aber auch SuS, die sich alleine am Computer unsicher fühlen und daher lieber zusammen mit einem Partner arbeiten. In diesem Fall sollte darauf geachtet werden, dass sich die beiden SuS bei der Arbeit mit dem Computer abwechseln.

Zu Beginn der Stunde müssen die SuS vermutlich in das Tabellenkalkulationsprogramm eingeführt werden. Hierzu dient das Arbeitsblatt *Tabellenkalkulation – Erstes Kennenlernen*. An manchen Schulen wird bereits in Klasse 5/6 mit einem Tabellenkalkulationsprogramm gearbeitet. In der Regel erlangen die SuS dadurch aber nur oberflächliche Kenntnisse, so dass das Bearbeiten des Arbeitsblattes trotzdem sinnvoll sein wird. Sollten wider Erwarten alle SuS über solide Kenntnisse verfügen, kann die

Bearbeitung dieses Blattes abgekürzt werden, indem die Lehrkraft lediglich die verschiedenen Arten von Einträgen sowie den Aufbau von Formeln wiederholt.

Es folgt die Bearbeitung der Aufgaben zur Prozentrechnung. Im Gegensatz zum AB *Prozentrechnung Schülerblatt 1* wird der Prozentwert hier auch als Multiplikationsaufgabe berechnet, da dies beim anschließenden AB *Tabellenkalkulation – Rechnungen* der günstigere Weg ist. Da die SuS unterschiedlich lange für die Bearbeitung des Blattes brauchen werden, erfolgt die Besprechung nicht im Plenum. Vielmehr kontrollieren die SuS anhand ausgehängter Lösungen bzw. besprechen sich mit anderen SuS.

Das AB *Tabellenkalkulation – Rechnungen* zeigt den Alltagsbezug der Prozentrechnung und von Tabellenkalkulationsprogrammen auf. Gleichzeitig machen die SuS hier erste Erfahrungen mit dem Kopieren von Formeln. Bei Aufgabe 3b) bietet sich eigentlich bereits ein absoluter Zellbezug an (Formel *= C§3*B…*). Dies soll aus didaktischen Gründen nur thematisiert werden, falls den SuS auffällt, dass das Kopieren der Formel *=C3*B7* nicht zu richtigen Ergebnissen führt.

Sehr schnelle SuS können die Datei *Rechnung* derart abwandeln, dass Preise mit Mehrwertsteuer eingegeben und Preise ohne Mehrwertsteuer berechnet werden. Oft fällt es SuS dabei schwer zu erkennen, dass der Preis mit Mehrwertsteuer einem Prozentwert (119% des Preises ohne MwSt.) entspricht und nicht einem Grundwert.

Tabellenkalkulation - Erstes Kennenlernen

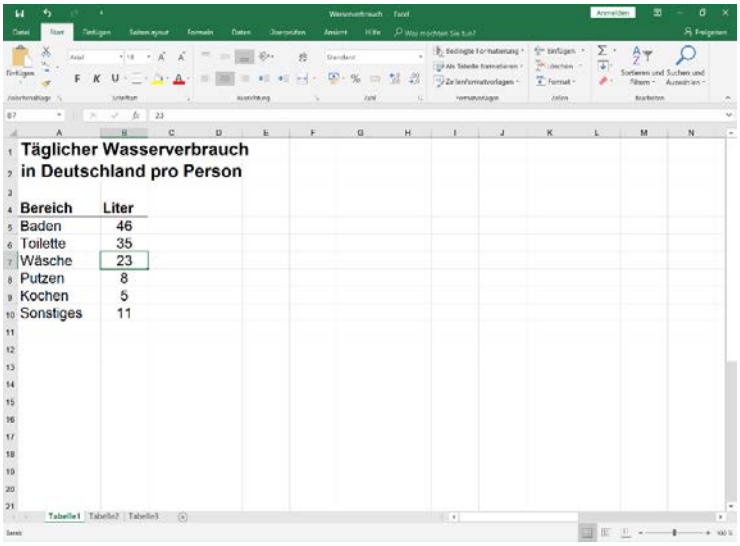
1. Bezeichnungen

Nach dem Öffnen des Programms *Excel* öffnet sich eine Arbeitsmappe, die zunächst aus 3 verschiedenen Tabellenblättern bestehen. Bei Bedarf kannst du weitere Tabellenblätter ergänzen.

Aufgabe:

- Öffne Excel und gib einige Daten ein (z.B. so wie in der Abbildung rechts). Lerne Excel kennen, indem du ausprobierst, was beim Klicken auf verschiedene Bereiche deiner Tabelle passiert.
- Beschrifte den Excel-Bildschirm:

  (Du hast folgende Begriffe zur Verfügung: Programmzeile, Symbolleiste, Zellzeiger für aktive Zelle, Menüzeile, Eingabefeld, Spaltennamen, Arbeitsbereich, Name der aktiven Zelle, Tabellenblatt)



	A	B
1	**Täglicher Wasserverbrauch**	
2	**in Deutschland pro Person**	
3		
4	**Bereich**	**Liter**
5	Baden	46
6	Toilette	35
7	Wäsche	23
8	Putzen	8
9	Kochen	5
10	Sonstiges	11

2. Arten von Einträgen:

In Excel gibt es verschiedene Arten von Einträgen:

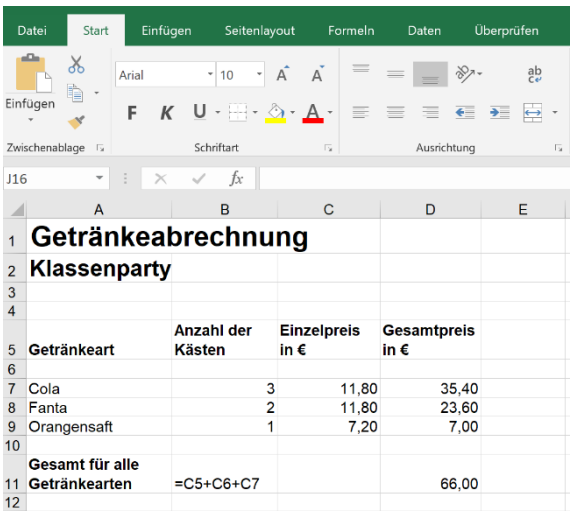
Text

Zahlen (hier kann die Anzahl der Stellen nach dem Komma eingestellt werden)

Formeln

Aufgabe:

- Markiere die verschiedenen Arten von Einträgen mit verschiedenen Farben (z.B. Text mit rot, Zahlen ohne Stellen nach dem Komma mit grün ...)
- Fülle den Merksatz zum Aufbau von Formeln aus:

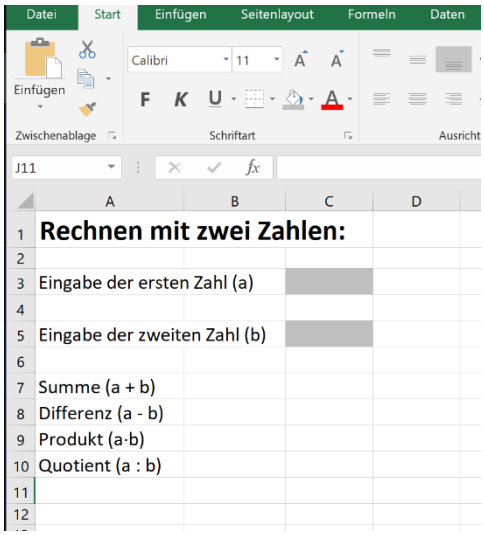


	A	B	C	D	E
1	**Getränkeabrechnung**				
2	**Klassenparty**				
3					
4					
5	**Getränkeart**	**Anzahl der Kästen**	**Einzelpreis in €**	**Gesamtpreis in €**	
6					
7	Cola	3	11,80	35,40	
8	Fanta	2	11,80	23,60	
9	Orangensaft	1	7,20	7,00	
10					
11	**Gesamt für alle Getränkearten**	=C5+C6+C7		66,00	
12					

Achtung: Eine Formel beginnt immer mit einem ……

3. Erste Berechnungen mit Formeln

Erstelle eine Datei wie abgebildet für die Grundrechenarten mit zwei Zahlen. Verwende dabei auch Fettdruck, verschiedene Schriftgrößen und verschiedene Hintergrundarten für die Zellen.



In Zelle C3 soll die erste Zahl eingegeben werden, in Zelle C5 die zweite.

In Zelle C7 soll die Summe ausgegeben werden, in Zelle C8 die Differenz…

Speichere die Datei unter dem Namen *Grundrechenarten.xls* ab.

Gib in Zelle C3 die Zahl 5 und in Zelle C5 die 7 ein. Berechne die Summe in Zelle C7 mit der Formel *=7+5* .

Ändere nun die erste Zahl in der Zelle C3 ab. Notiere, was dann mit der Summe in Zelle C7 passiert:

……

Berechne nun die Summe in Zelle C7 mit der Formel *=C3+C5* . Verändere auch hier die erste Zahl in der Zelle C3 und beobachte, was nun mit der Summe in Zelle C7 passiert.

……

Welche Formel hältst du für besser: *=7+5* oder *=C3+C5* ? Begründe deine Antwort.

……

Aufgabe:

- Gib in den Zellen C8, C9 und C10 Formeln ein, die die Differenz bzw. das Produkt bzw. den Quotienten von zwei Zahlen berechnen. Schreibe die Formeln auf:

	Formel:
Differenz:	
Produkt:	
Quotient:	

= C3 – C5
= C3*C5
= C3/C5

In der Mkid-Stunde zur **Prozentrechnung** wurden unter anderem die 3 Grundaufgaben der Prozentrechnung wiederholt (Berechnung des Prozentwerts – Berechnung des Grundwerts – Berechnung des Prozentsatzes). Du sollst heute diese Grundaufgaben von einem Tabellenkalkulationsprogramm berechnen lassen.

1. Berechnung des Prozentwertes:

a) … mit dem Dreisatz

	A	B	C	D	E	F
1	**Berechnung des Prozentwertes**					
2						
3	**Wie viel sind**	**30**	**Prozent von**	**500**	**Euro?**	
4						
5	100	Prozent entsprechen	=D3			
6	1	Prozent entsprechen	=D3/100			
7	=B3	Prozent entsprechen	=D3/100*B3			
8						

Abb. 1

	A	B	C	D	E	F
1	**Berechnung des Prozentwertes**					
2						
3	**Wie viel sind**	**30**	**Prozent von**	**500**	**Euro?**	
4						
5	100	Prozent entsprechen				
6	1	Prozent entsprechen				
7		Prozent entsprechen				
8						

Abb. 2

Aufgabe:

- Mache dir bewusst, wie der Prozentwert berechnet wird (Tipp: AB „Erfassung der Prozentrechnung in fünf Schritten“)
- Abbildung 1 zeigt eine Datei, die den Prozentwert berechnet. Man kann dazu in Zelle B3 den Prozentsatz und in Zelle D3 den Grundwert eingeben. Versuche, die Formeln in der Abbildung zu verstehen.
- Trage in den umrahmten Zellen in Abbildung 2 die Zahlenwerte ein, die mit den Formeln bei diesem Beispiel berechnet werden.
- Erstelle in Excel eine Datei wie in Abbildung 1 und speichere sie unter dem Namen *Prozentwert.xls* ab.

  Berechne mit ihr weitere Prozentwerte und kontrolliere deine Datei, indem du diese Prozentwerte auch selbst berechnest.

b) … als Multiplikationsaufgabe

30 Prozent von 500 Euro entsprechen einem Anteil: $\frac{30}{100}$ von 500 Euro. In der 6. Klasse hast du gelernt, dass solche *„von-Aufgaben“* als Multiplikationsaufgaben geschrieben werden können:

Beispiel: $\frac{3}{4}$ von 12 kann gerechnet werden als $\frac{3}{4} \cdot 12$.

Aufgabe:

- Schreibe die folgenden Aufgaben als Multiplikationsaufgabe:

$\frac{1}{5}$ von 20 : ……

$\frac{20}{100}$ von 50 : ……

15 % von 40 : ……

- Erstelle in Excel eine Datei wie in der Abbildung, die Prozentwerte als Multiplikationsaufgabe berechnet. Das Ergebnis soll in Zelle B5 ausgegeben werden.

	A	B	C	D	E
1	**Berechnung des Prozentwertes (Multiplikation)**				
2					
3	**Wie viel sind**	**30**	**Prozent von**	**500**	**Euro?**
4					
5	Prozentwert:				
6					

Notiere die Formel in Zelle B5: ……..

Teste deine Datei, indem du mit ihr einige Prozentwerte berechnest.

2. Berechnung des Grundwertes:

	A	B	C	D	E
1	**Berechnung des Grundwertes**				
2					
3	**Von wieviel sind**	**30**	**Prozent**	**150**	**Euro?**
4					
5		Prozent entsprechen			
6		Prozent entsprechen			
7		Prozent entsprechen			
8					

Aufgabe:

- Mache dir auch hier bewusst, wie der Grundwert berechnet wird (Tipp: AB Erfassung der Prozentrechnung in fünf Schritten)
- Die Abbildung zeigt eine Datei zur Berechnung des Grundwertes. Dazu wird in Zelle B3 der Prozentsatz und in Zelle D3 der Prozentwert eingegeben. Löse die Aufgabe zunächst selbst und trage in den umrahmten Zellen die entsprechenden Zahlenwerte ein.
- Erstelle in Excel eine Datei, die den Grundwert berechnet und speichere sie unter *Grundwert.xls* ab.
- Teste auch diese Datei, indem du weitere Grundwerte mit ihr berechnest.

3. Berechnung des Prozentsatzes:

	A	B	C	D	E
1	**Berechnung des Prozentsatzes**				
2					
3	**Wieviel Prozent sind**	**150**	**Euro von**	**500**	**Euro?**
4					
5					
6	Prozentsatz:				
7					

Aufgabe:

- Auch hier: mache dir bewusst, wie der Prozentsatz aus dem Grundwert und dem Prozentwert berechnet wird.
- Erstelle in Excel eine Datei, die den Prozentsatz berechnet. Speichere sie unter *Prozentsatz.xls.*
- In Zelle B6 soll der Prozentsatz berechnet werden. Probiere dazu folgende Formeln aus und notiere jeweils, was Excel ausgibt:

  *=B3/D3*100* (mit der rechten Maustaste auf *Zellen* formatieren klicken und für Zelle B6 das Format *Standard* wählen):

  ……

  ……

  =B3/D3 (mit der rechten Maustaste auf *Zellen* formatieren klicken und für Zelle B6 das Format *Standard* wählen):

  ……

  ……

  =B3/D3 (mit der rechten Maustaste auf *Zellen* formatieren klicken und für Zelle B6 das Format *Prozent* wählen):

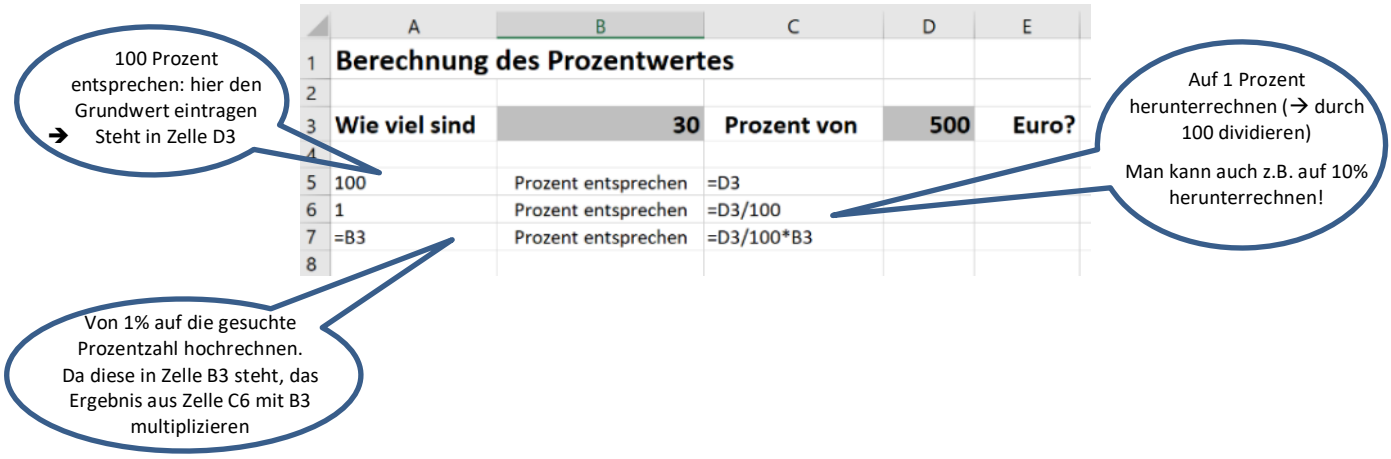
  ……

  ……

- Teste auch diese Datei, indem du weitere Grundwerte mit ihr berechnest.

1. Berechnung des Prozentwertes:

a) … mit dem Dreisatz



	A	B	C	D	E
1	**Berechnung des Prozentwertes**				
2					
3	**Wie viel sind**	**30**	**Prozent von**	**500**	**Euro?**
4					
5	100	Prozent entsprechen	=D3		
6	1	Prozent entsprechen	=D3/100		
7	=B3	Prozent entsprechen	=D3/100*B3		
8					

	A	B	C	D	E	F
1	**Berechnung des Prozentwertes**					
2						
3	**Wie viel sind**	**30**	**Prozent von**	**500**	**Euro?**	
4						
5	100	Prozent entsprechen	500	Euro		
6	1	Prozent entsprechen	5	Euro		
7	30	Prozent entsprechen	150	Euro		
8						

b) … als Multiplikationsaufgabe

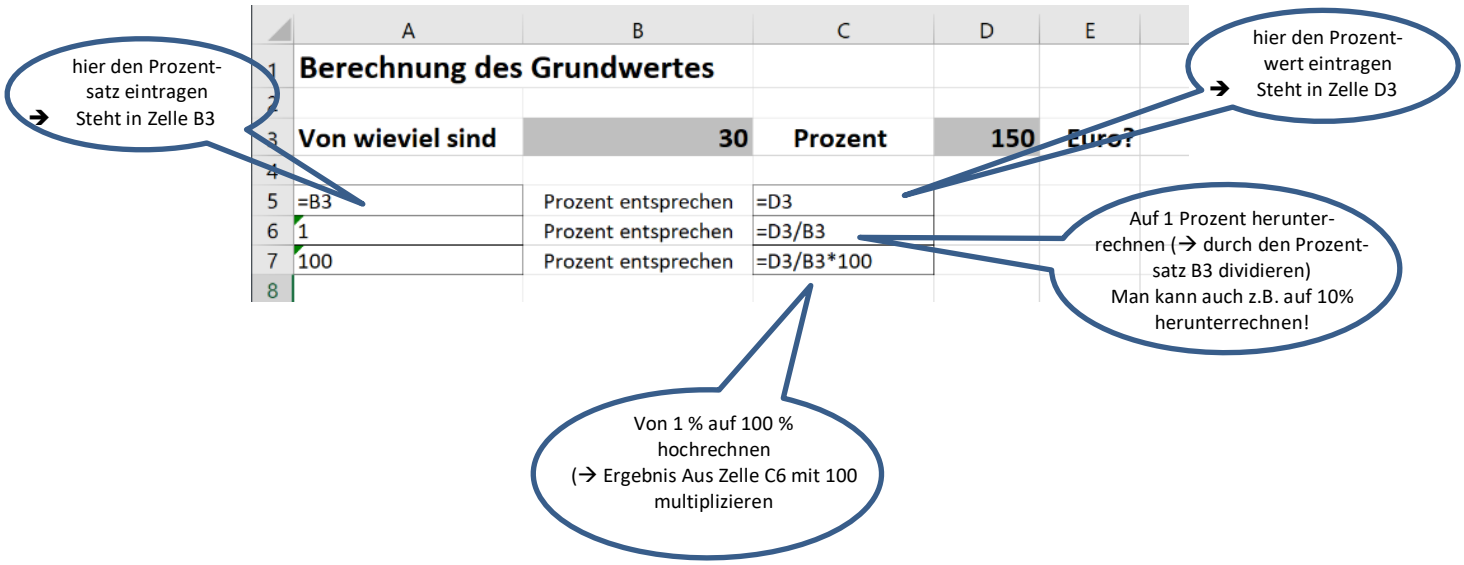
- Schreibe die folgenden Aufgaben als Multiplikationsaufgabe:

$\frac{1}{5}$ von 20 :	$\frac{1}{5} \cdot 20$
$\frac{20}{100}$ von 50 :	$\frac{20}{100} \cdot 50$
15 % von 40 :	$\frac{15}{100} \cdot 40$

- Notiere die Formel in Zelle B5: = B3/100 * D3

	A	B	C	D	E
1	**Berechnung des Prozentwertes (Multiplikation)**				
2					
3	**Wie viel sind**	**30**	**Prozent von**	**500**	**Euro?**
4					
5	Prozentwert:				
6					

2. Berechnung des Grundwertes:



	A	B	C	D	E
1	**Berechnung des Grundwertes**				
2					
3	**Von wieviel sind**	**30**	**Prozent**	**150**	**Euro?**
4					
5	=B3	Prozent entsprechen	=D3		
6	1	Prozent entsprechen	=D3/B3		
7	100	Prozent entsprechen	=D3/B3*100		
8					

3. Berechnung des Prozentsatzes:

	A	B	C	D	E
1	**Berechnung des Prozentsatzes**				
2					
3	**Wieviel Prozent sind**	**150**	**Euro von**	**500**	**Euro?**
4					
5					
6	Prozentsatz:				
7					

Aufgabe:

- In Zelle B6 soll der Prozentsatz berechnet werden. Probiere dazu folgende Formeln aus und notiere jeweils, was Excel ausgibt:

  *=B3/D3*100* (mit der rechten Maustaste auf *Zellen* formatieren klicken und für Zelle B6 das Format *Standard* wählen):

  Gibt im obigen Beispiel *30* als Ergebnis aus (entspricht dem Prozentsatz, aber ohne Prozentzeichen!)

  =B3/D3 (mit der rechten Maustaste auf *Zellen* formatieren klicken und für Zelle B6 das Format *Standard* wählen):

  Gibt im obigen Beispiel *0,3* als Ergebnis aus (entspricht dem Prozentsatz als Dezimalzahl!)

  =B3/D3 (mit der rechten Maustaste auf *Zellen* formatieren klicken und für Zelle B6 das Format *Prozent* wählen):

  Gibt im obigen Beispiel *30 %* als Ergebnis aus (entspricht dem Prozentsatz mit Prozentzeichen!)

Rechnungen ohne und mit Mehrwertsteuer

Viele Händler erstellen Rechnungen mit Excel. Beim Verkauf einer Ware wird die *Mehrwertsteuer* fällig. Sie beträgt in Deutschland zurzeit 19 % und muss vom Kunden bezahlt werden.

	A	B	C	D	E
1	**Rechnung**				
2					
3	**Höhe der Mehrwertsteuer:**		19%		
4					
5		**Preis ohne**	**Mehrwert-**	**Preis mit**	
6		**Mehrwertsteuer**	**steuer**	**Mehrwertsteuer**	
7	Laptop	390,00 €	74,10 €	464,10 €	
8	Maus	19,00 €			
9	Mauspad	3,00 €			
10	USB-Stick	8,00 €			
11	externe Festplatte	32,00 €			
12					
13					
14			**Summe:**		
15					

Aufgabe 1:

- Erstelle die abgebildete Rechnung eines Computerhändlers in Excel und speichere sie unter *Rechnung.xls* ab.

  Achtung: Das Euro-Zeichnen musst du nicht eingeben: Gib die Zahlen ein. Klicke dann die Zellen mit der rechten Maustaste an. Wähle bei *Zellen formatieren* das Format *Währung* (Euro). Nun erscheint überall das Euro-Zeichen.

- Lass die Zahlen in den umrandeten Zellen mit Formeln berechnen. Schreibe die Formeln auf:

  Formel in Zelle C8: ……

  Formel in Zelle C9: ……

  Formel in Zelle D8: ……

  Formel in Zelle D14: ……

C8: $= \frac{19}{100} \cdot$ B8 C9: $= \frac{19}{100} \cdot$ B9 D8: = B8 + C8 oder $= \frac{119}{100} \cdot$ B8 D14: = D7+D8+D9+D10*D11

Aufgabe 2: Kopieren von Formeln

- Lösche zunächst die Einträge in den Zellen C8 – D11.

- Formeln können in EXCEL kopiert werden.
  (Wie im Textverarbeitungsprogramm: Formel markieren, Menü *Bearbeiten – Kopieren – Einfügen* bzw. über die Symbolleiste).
  Kopiere die Formel in Zelle C7 und füge sie in den Zellen C8, C9 ... ein.

  Notiere, was EXCEL jetzt in den Zellen C8, C9 ... ausgibt: .....

  Versuche, eine Erklärung dafür zu finden. (Welche Formel hat EXCEL in den Zellen C8, C9 ...) eingetragen?

  .....

  .....

- Fülle Spalte D aus, indem du die Formel in Zelle D7 kopierst und diese in D8-D11 einfügst.

Aufgabe 3: Erweiterungen

a) Manche Händler gewähren ihren Kunden einen Preisnachlass von einigen Prozent (bezogen auf den Preis mit Mehrwertsteuer), wenn die Rechnung innerhalb eines bestimmten Zeitraumes bezahlt wird. Man nennt dies Skonto. In der Rechnung steht dann beispielsweise „2% Skonto bei Zahlung innerhalb von 14 Tagen nach Rechnungseingang“.

   Ergänze deine Datei so, dass auch der Preis mit Skonto von 2% berechnet wird.

b) In anderen Ländern gibt es andere Prozentsätze für die Mehrwertsteuer. So beträgt der Mehrwertsteuersatz in Österreich oder Frankreich derzeit 20%.

   Ändere deine Datei so ab, dass sich die Rechnungen automatisch anpassen, wenn du in Zelle C3 einen anderen Mehrwertsteuersatz eingibst.

   Tipp: Verwende in deinen Formeln die Zellbezeichnung C3.

Rechnungen ohne und mit Mehrwertsteuer

Viele Händler erstellen Rechnungen mit Excel. Beim Verkauf einer Ware wird die *Mehrwertsteuer* fällig. Sie beträgt in Deutschland zurzeit 19 % und muss vom Kunden bezahlt werden.

	A	B	C	D	E
1	**Rechnung**				
2					
3	**Höhe der Mehrwertsteuer:**		19%		
4					
5		**Preis ohne**	**Mehrwert-**	**Preis mit**	
6		**Mehrwertsteuer**	**steuer**	**Mehrwertsteuer**	
7	Laptop	390,00 €	74,10 €	464,10 €	
8	Maus	19,00 €			
9	Mauspad	3,00 €			
10	USB-Stick	8,00 €			
11	externe Festplatte	32,00 €			
12					
13					
14			**Summe:**		
15					

Aufgabe 1:

- Erstelle die abgebildete Rechnung eines Computerhändlers in Excel und speichere sie unter *Rechnung.xls* ab.

  Achtung: Das Euro-Zeichnen musst du nicht eingeben: Gib die Zahlen ein. Klicke dann die Zellen mit der rechten Maustaste an. Wähle bei *Zellen formatieren* das Format *Währung* (Euro). Nun erscheint überall das Euro-Zeichen.

- Lass die Zahlen in den umrandeten Zellen mit Formeln berechnen. Schreibe die Formeln auf:

  Formel in Zelle C8: ……

  Formel in Zelle C9: ……

  Formel in Zelle D8: ……

  Formel in Zelle D14: ……

C8: =0,19*B8 C9: =0,19*B9 D8: =B8 + C8 oder =1,19*B8 D14: = D7+D8+D9+D10*D11

Aufgabe 2: Kopieren von Formeln

- Welche Formel hat EXCEL in den Zellen C8, C9 ... eingetragen?

In C8: $= \frac{19}{100} \cdot B8$ In C9: $= \frac{19}{100} \cdot B9$

Wenn man eine Formel kopiert und eine Zeile weiter unten wieder einfügt, passen sich die Zellnamen an: aus der Zelle B7 wird dann die Zelle B8 …

Aufgabe 3: Erweiterungen

a) Ergänze deine Datei so, dass auch der Preis mit Skonto von 2% berechnet wird.

	A	B	C	D	E
1	**Rechnung**				
2					
3	**Höhe der Mehrwertsteuer:**		19%		
4					
5		**Preis ohne**	**Mehrwert-**	**Preis mit**	
6		**Mehrwertsteuer**	**steuer**	**Mehrwertsteuer**	
7	Laptop	390,00 €	74,10 €	464,10 €	
8	Maus	19,00 €	3,61 €		
9	Mauspad	3,00 €	0,57 €		
10	USB-Stick	8,00 €	1,52 €		
11	externe Festplatte	32,00 €	6,08 €		
12					
13					
14			**Summe:**		
15					
16		**Preisnachlass:**	**Skonto 2%**	=2/100 * D14	
17					
18		**Endgültiger Preis:**		=D14 - D16	
19					

b) Ändere deine Datei so ab, dass sich die Rechnungen automatisch anpassen, wenn du in Zelle C3 einen anderen Mehrwertsteuersatz eingibst.

	A	B	C	D	E
1	**Rechnung**				
2					
3	**Höhe der Mehrwertsteuer:**		19%		
4					
5		**Preis ohne**	**Mehrwert-**	**Preis mit**	
6		**Mehrwertsteuer**	**steuer**	**Mehrwertsteuer**	
7	Laptop	390,00 €	=C3*B7	=B7+C7	
8	Maus	19,00 €	=C3*B8	=B8+C8	
9	Mauspad	3,00 €			
10	USB-Stick	8,00 €			
11	externe Festplatte	32,00 €			
12					
13					
14			**Summe:**		
15					

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Bei guten Vorkenntnissen der SuS kann Phase 2 gekürzt werden.
Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf 5. – 7. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Einstieg FEU 5 Min.	Abfragen der Vorerfahrung: Kennt ihr ein Tabellenkalkulationsprogramm? Habt ihr schon mit einem solchen Programm gearbeitet? Was kann man damit tun?	
2. Erarbeitung 1 EA / PA 15 Min.	SuS bearbeiten das AB „Tabellenkalkulation – Erstes Kennenlernen“ L unterstützt bei Schwierigkeiten	AB Computer
3. Ergebnis 1 FEU 5 Min.	Besprechung der wichtigen Punkte des Abs: - Aufbau von Formeln (Gleichheitszeichen) - Vorteil von Formeln mit Zellbezug L. demonstriert ggfs. anhand einer Datei und mit Beamer	AB Evtl. Beamer
4. Erarbeitung 2 + Ergebnis 2 EA / PA 20 – 25 Min.	SuS bearbeiten das AB „Tabellenkalkulation – Prozentrechnung“ Bei Schwierigkeiten Unterstützung durch L und andere SuS („Mastersystem“) SuS kontrollieren ihre Datei mit Hilfe ausgehängter Lösungen.	AB Computer Ausgehängte Lösungen
5. Erarbeitung 3 EA / PA 15 - 20 Min.	SuS bearbeiten das AB „Tabellenkalkulation – Rechnungen“ (soweit sie kommen) SuS kontrollieren ihre Datei mit Hilfe ausgehängter Lösungen.	AB Computer Ausgehängte Lösungen
6. Ergebnis 3 FEU 5 Min.	1 S stellt seine Datei (mit Hilfe des Beamers) vor - Wie lauten die Formeln? - Was passiert beim Kopieren von Formeln?	Computer Beamer
7. optional: Vertiefung EA / PA	Abwandlung der Datei *Rechnung:* Es sollen Preise mit Mehrwertsteuer eingegeben und die Preise ohne Mehrwertsteuer berechnet werden.	Computer

Lehrerblatt

Für den zweiten Teil des Themas Tabellenkalkulation ist der erste Teil Voraussetzung. Die Schülerinnen und Schüler sollen also mit den Grundzügen eines Tabellenkalkulationsprogramms vertraut sein:

- Zellen und ihre Adressen
- Texteintrag mit Formatierung, z.B. „fett“ oder „zentriert“
- Zahleintrag mit Formatierung, z.B. auf „Währung“ mit 2 Dezimalen (Menü → Rechtsklick)
- Einrichten der Spaltenbreite durch Ziehen mit der Maus (→ gedrückte linke Maustaste)
- Markieren von Zellbereichen durch Ziehen mit der Maus (→ gedrückte linke Maustaste)
- Formeleintrag (→ beginnt immer mit dem Zeichen „=“)
  mit der Schwierigkeit, dass das Berechnungs-Ergebnis angezeigt wird, die Formel dabei „unsichtbar“ im Hintergrund steht bzw. nur in der Bearbeitungsleiste angezeigt wird
- zur Verwendung in Formeln: Grundrechenarten + | – | * | /
  z.B.: =B7*0,09 berechnet 9% des Wertes der Zelle B7
- zur Verwendung in Formeln: Funktionen
  z.B.: =Summe(C7:E10) berechnet die Summe der 12 Zahlen aus dem Bereich C7:E10
- Kopieren Formeln in markierten Zellen durch Ziehen mit der Maus

Die Grundlagen zur Prozentrechnung, hier zumindest die Berechnung des Prozentwertes aus dem Grundwert und dem Prozentsatz, werden ebenfalls vorausgesetzt.
Der Begriff *Zinsen* ist den Schülerinnen und Schülern möglicherweise noch nicht bekannt, diesen wird die Lehrkraft erläutern: Es handelt sich um eine Gebühr für das Geldausleihen.
Bemerkungen zur organisatorischen Vorbereitung und grundsätzliche didaktische Überlegungen entnimmt man dem Lehrerblatt des ersten Teils.

Didaktische Bemerkungen:

Die Lehrkraft demonstriert die Bearbeitung der Aufgabe 1 **Kredit** mithilfe des Beamers.
Sie geht dabei auch auf das Prozedere des Abzahlungsprozesses ein: aus der gleich bleibenden jährlichen Rate von Marc werden die Zinsen bezahlt und die Schulden abgetragen (der Begriff *Tilgung* muss nicht thematisiert werden).
Die Schülerinnen und Schüler, die das Schülerblatt bereits erhalten haben, machen sich Notizen und diktieren der Lehrkraft die jeweiligen Zelleinträge. Diese sind auf dem Schülerblatt in verbalisierter Form angegeben. Hier die tatsächlichen Einträge:

B6: 5190	C6: =B6*0,09	D6: 937,70	E6: B6+C6–D6
B7: =E6	C7: =B7*0,09	D7: 937,70	E7: B7+C7–D7

Die Lehrkraft erläutert kurz die relative Anpassung der Zelladressen beim Kopieren von Zellen.
Der Begriff der absoluten Adressierung wird nicht thematisiert.

Anschließend erstellen die Schülerinnen und Schüler das Kalkulationsblatt zur Aufgabe 1 selbständig.
Es werden keine Datei-Vorlagen zur Verfügung gestellt.
Bei der Aufgabe 2 **Sparvertrag** können die Schülerinnen und Schüler im Prinzip wie bei der Aufgabe 1 vorgehen, der **Screenshot** dient zur **Selbstkontrolle**. Als zusätzliche Hilfe sind bei beiden Aufgaben die zu kopierende Zellen (der Bereich B7:E7) grau unterlegt, der Zielbereich ist hellgrau unterlegt.
Hier die Einträge bei der Aufgabe 2:

B6: 1500	C6: =B6	D6: =C6*0,03	E6: C6+D6
B7: 1500	C7: =E6+B7	D7: =C7*0,03	E7: C7+D7

Der Zeitbedarf beträgt insgesamt etwa 45 Min.

1.) Marc kauft sich ein gebrauchtes Motorrad und leiht sich dafür von der ABC-Bank 5190 €.
Die Bank berechnet Marc jedes Jahr 9% Zinsen, jeweils von seinen Schulden am Jahresanfang.
Der **Kredit** läuft über 8 Jahre, Marc bezahlt an jedem Jahresende 937,70 €.

	A	B	C	D	E
1	**Motorradkauf auf Raten**				
2					
3		das Motorrad kostet: 5190 €	Zinssatz pro Jahr: 9%	jährliche Rate: 937,70 €	
4					
5	**Jahr**	**Schulden am Jahresanfang:**	**Zinsen am Jahresende:**	**Rate am Jahresende:**	**Schulden am Jahresende:**
6	1	5.190,00 €	467,10 €	937,70 €	4.719,40 €
7	2	4.719,40 €	424,75 €	937,70 €	4.206,45 €
8	3	4.206,45 €	378,58 €	937,70 €	3.647,33 €
9	4	3.647,33 €	328,26 €	937,70 €	3.037,89 €
10	5	3.037,89 €	273,41 €	937,70 €	2.373,60 €
11	6	2.373,60 €	213,62 €	937,70 €	1.649,52 €
12	7	1.649,52 €	148,46 €	937,70 €	860,28 €
13	8	860,28 €	77,42 €	937,70 €	0,00 €

Erstelle ein Tabellenkalkulationsblatt wie im Bild oben.

- B6: Zahleintrag – Kosten des Motorrades
- C6: Formeleintrag – die Zinsen betragen 9% der Schulden am Jahresanfang
- D6: Zahleintrag – festgesetzte Jahresrate
- E6: Formeleintrag – die Schulden am Jahresende ergeben sich aus den Schulden am Jahresanfang plus den Zinsen minus der Rate am Jahresende
- B7: Formeleintrag – die Schulden am Jahresanfang des 2. Jahres sind die Schulden am Jahresende des 1. Jahres
- C7: Formeleintrag – die Zinsen betragen 9% der Schulden am Jahresanfang
- D7: Zahleintrag – festgesetzte Jahresrate
- E7: Formeleintrag – die Schulden am Jahresende ergeben sich aus den Schulden am Jahresanfang plus den Zinsen minus der Rate am Jahresende
- markiere den Bereich B7:E7
- kopiere den Bereich B7:E7 in den Bereich B8:E13

Zusatzaufgabe: Wie viele Zinsen wurden insgesamt bezahlt? [Ergebnis: 2311,60 €]

2.) Herr Huber zahlt 10 Jahre lang 1500 € für seinen **Sparvertrag** bei der ABC-Bank ein.
Herr Huber bekommt jedes Jahr 3% Zinsen von seinem Guthaben am Jahresanfang gutgeschrieben.
Erstelle ein Tabellenkalkulationsblatt wie im Bild unten.

	A	B	C	D	E
1	**Sparvertrag**				
2					
3		Jährliche Rate: 1500 €	Zinssatz pro Jahr: 3%		
4					
5	**Jahr:**	**Einzahlung am Jahresanfang:**	**Guthaben am Jahresanfang:**	**Zinsen am Jahresende:**	**Guthaben am Jahresende:**
6	2020	1.500,00 €	1.500,00 €	45,00 €	1.545,00 €
7	2021	1.500,00 €	3.045,00 €	91,35 €	3.136,35 €
8	2022	1.500,00 €	4.636,35 €	139,09 €	4.775,44 €
9	2023	1.500,00 €	6.275,44 €	188,26 €	6.463,70 €
10	2024	1.500,00 €	7.963,70 €	238,91 €	8.202,61 €
11	2025	1.500,00 €	9.702,61 €	291,08 €	9.993,69 €
12	2026	1.500,00 €	11.493,69 €	344,81 €	11.838,50 €
13	2027	1.500,00 €	13.338,50 €	400,16 €	13.738,66 €
14	2028	1.500,00 €	15.238,66 €	457,16 €	15.695,82 €
15	2029	1.500,00 €	17.195,82 €	515,87 €	17.711,69 €

Zusatzaufgabe: Wie viele Zinsen hat Herr Huber insgesamt bekommen? [Ergebnis: 2711,69 €]

Lehrerblatt

Voraussetzungen:

- Zins- und Prozentrechnung aus dem Unterricht
- Mkid-Stunde *Tabellenkalkulation 1*

Organisatorische Vorbereitung der Stunde:

- siehe Lehrerblatt „Tabellenkalkulation 1“
- zusätzlich: Wie können Excel-Dateien als Vorlagen den SuS im Schulnetz zur Verfügung gestellt werden?

Ziele:

- Anwendung und Vertiefung der Kenntnisse im Umgang mit Tabellenkalkulationsprogrammen
- Entwicklung eines tieferen Verständnisses der Zins- und Zinseszinsrechnung und Förderung der Argumentationskompetenz
- Nutzung der Tabellenkalkulation zum Lösen von Aufgaben
- Kompetenzerleben beim (erfolgreichen) Lösen der Aufgaben
- Entwicklung von systematischen Vorgehensweisen beim Bearbeiten von Aufgaben mit der Tabellenkalkulation

Didaktische Überlegungen:

Die didaktischen Überlegungen zur Arbeit im Unterricht mit Computern aus der Mkid-Stunde „Tabellenkalkulation 1“ gelten auch für diese Stunde (z.B. Mastersystem, Arbeit im Computer in Einzel- oder Partnerarbeit…).

Die Stunde knüpft an die Erfahrungen zur Prozentrechnung und mit dem Tabellenkalkulationsprogramm an und beginnt mit der Bearbeitung des Arbeitsblattes *Zinseszinsrechnung*. Vermutlich ist es sinnvoll, die Teilaufgaben a) und b) gemeinsam zu besprechen. Dabei sollte der (Jahres-)Zins als Prozentwert der Einfachheit halber nicht mit dem Dreisatz, sondern über eine Multiplikationsaufgabe berechnet werden (→ vgl. Tabellenkalkulation 1 – AB *Prozentrechnung*, Aufg. 1b).

Bei Aufgabe c) geben die SuS die Formeln in jeder Zeile neu ein. Der anschließende Vergleich der selbst berechneten Ergebnisse mit denen der Tabellenkalkulation dürfte ihr Selbstbewusstsein stärken und eine Motivation für sie darstellen. Anschließend wird eine (neue weitere) Tabelle in den Teilaufgaben d) und e) automatisch durch Kopieren von Formeln ausgefüllt. Dies ist ansatzweise bereits aus der Mkidstunde Tabellenkalkulation 1 bekannt – allerdings werden absolute und relative Zellbezüge erst in der heutigen Stunde eingeführt. Aus Zeitgründen sollte für die Bearbeitung der Teilaufgabe d) die Vorlage *Zinseszins-rechnung* zur Verfügung gestellt werden.

Das Arbeitsblatt *Sparplan* stellt eine Erweiterung der Zinseszinsrechnung dar. Vermutlich werden manche SuS auch hier Schwierigkeiten bei der Berechnung des Kapitals in Aufgabe a) haben. Es ist also auch hier sinnvoll, diese Aufgabe gemeinsam mit den SuS zu besprechen, bevor die SuS die übrigen Aufgaben in ihrem individuellen Tempo bearbeiten. Aus Zeitgründen sollen hier die Dateivorlagen *Sparplan – Vorlage 1* und *Sparplan – Vorlage 2* verwendet werden. Bei Zeitknappheit kann auf die Bearbeitung der Teilaufgaben e) – f) verzichtet werden und stattdessen die „*Komfort-Tabelle*“ als fertige Datei zum Lösen der Forschungsaufgaben zur Verfügung gestellt werden.

Bei den Forschungsaufgaben sollen die SuS den Nutzen eines Tabellenkalkulationsprogrammes erfahren: Einerseits können durch „Spielen / Ausprobieren“ Aufgaben gelöst werden. Andererseits kann es zur Überprüfung eigener Überlegungen herangezogen werden. Dabei sollte das Spielen durchaus mit System erfolgen. So sollte in der letzten Plenumsphase die Vorgehensweise bei der Bearbeitung von Aufgabe 1 c) und d) thematisiert werden: einige SuS werden die Aufgabe vermutlich ähnlich wie eine Intervallschachtelung angehen. Weiterhin sollte über Begründungen für die Aufgaben 2 und 3 diskutiert werden (sofern diese bereits von einigen SuS bearbeitet wurden).

In 90-Minuten-Stunden können sich die SuS intensiver mit den Forschungsaufgaben befassen und/oder das AB *Tilgungsplan* bearbeiten.

Zinseszinsrechnung

Wenn man bei einer Bank Geld anlegt, erhält man dafür *Zinsen*. Wenn man das Geld (in der Bankensprache spricht man auch vom *Kapital*) für mehrere Jahre anlegt, erhält man für die Zinsen wieder Zinsen. Diese nennt man *Zinseszinsen*.

Aufgabe: Ein Kapital von 500 € wird für einige Jahre zu einem Zinssatz von 2 % angelegt.

a) Berechne das Kapital nach 1, 2 und 3 Jahren. Trage alle dafür notwendigen Rechnungen und Ergebnisse in die entsprechenden Zellen in der nebenstehenden Tabelle ein.

	A	B	C	D
1	**Zinseszins-Rechnung**			
2				
3	**Kapital**	500,00 €		
4	**Zinssatz**	2,00%		
5				
6	**Jahr**	**Kapital (am Jahresanfang)**	**(Jahres-) Zins**	**Kapital (am Jahresende)**
7	1	500,00 €		
8	2			
9	3			

b) Trage in der nebenstehenden Tabelle alle Formeln ein, mit denen das Kapital nach 1, 2, und 3 Jahren berechnet wird.

Tipp: Erinnerst du dich? – Formeln beginnen in Excel immer mit einem Gleichheitszeichen.

c) Gib diese Tabelle dann in EXCEL ein und berechne so das Kapital nach 1, 2 und 3 Jahren. Vergleiche das Ergebnis mit deinen Berechnungen aus Aufgabe a).

	A	B	C	D
1	**Zinseszins-Rechnung**			
2				
3	**Kapital**	500,00 €		
4	**Zinssatz**	2,00%		
5				
6	**Jahr**	**Kapital (am Jahresanfang)**	**(Jahres-) Zins**	**Kapital (am Jahresende)**
7	1	500,00 €		=B7+C7
8	2			
9	3			
10	4			

Hinweis:
Achte auf die passenden Zellformatierungen:
Zelle B4: Format *Prozent*
Zellen B3, B7 – D10: Format *Währung (€)*

	A	B	C	D
1	**Zinseszins-Rechnung**			
2				
3	**Kapital**	500,00 €		
4	**Zinssatz**	2,00%		
5				
6	**Jahr**	**Kapital (am Jahresanfang)**	**(Jahres-) Zins**	**Kapital (am Jahresende)**
7	1	500,00	=B4*B7	=B7+C7
8	2			
9	3			

d) Kopieren von Formeln:

Formeln können in EXCEL kopiert werden.
(Wie im Textverarbeitungsprogramm: Formel markieren, Menü *Bearbeiten – Kopieren – Einfügen* bzw. über die Symbolleiste).

Verwende (aus Zeitgründen) die Datei *Zinseszinsrechnung - Vorlage.* Trage die Formeln in C7 und D7 ein. Kopiere die Formel aus Zelle C7 und füge sie in den Zellen C8 und C9 ein.

Notiere, was EXCEL jetzt in den Zellen C8 und C9 ausgibt:

.....

Versuche, eine Erklärung dafür zu finden. (Welche Formel hat EXCEL in den Zellen C8 und C9 eingetragen?)

.....

.....

Achtung: Verschiedene Zellbezüge:

1. Zellnamen der Form A2 sind ***relative Zellbezüge*:**
   Beispiel**:** Kommt in einer Formel in Zelle B2 der Zellname A1 vor, so bedeutet dies: „Gehe ein Feld nach oben und ein Feld nach links und hole dort die Zahl."
   Beim Kopieren von Formeln werden die Zellnamen automatisch auf die neue Lage der Formel umgeschrieben.

   Beispiele:
   Wird eine Formel von B2 nach B4 kopiert, so wird der Zellname A1 durch .... ersetzt.
   Wird eine Formel von C3 nach D6 kopiert, so wird der Zellname B1 durch .... und der Zellname A2 durch .... ersetzt.

   (Lösungen: C4 A3 B5)

2. Soll die Lage einer Zelle beim Kopieren von Formeln nicht verändert werden, so verwendet man den ***absoluten Zellbezug.*** Dieser wird mit **$-Zeichen** dargestellt, wie zum Beispiel $B$3 für die Zelle B3.

e) Automatisches Ausfüllen von Tabellen:

	A	B	C	D	E
6	**Jahr**	**Kapital (am Jahresanfang)**	**(Jahres-) Zins**	**Kapital (am Jahresende)**	
7	0	500,00 €	10,00 €	510,00 €	
8	1	510,00 €	10,20 €	520,20 €	
9	2				

Trage die Formeln in den Zeilen 7 und 8 ein. Benutze in der Spalte C den absoluten Zellbezug. Markiere die Zellen B8 – D8 und setze den Cursor auf den unteren rechten Rand der Markierung.
Ziehe das dabei auftauchende schwarze Kreuz mit der linken Maustaste nach unten. Dadurch werden automatisch die unteren Zeilen ausgefüllt.
Speichere die Datei unter *Zinseszins.xls* ab.

Zinseszinsrechnung (Lösungen)

Aufgabe: Ein Kapital von 500 € wird für einige Jahre zu einem Zinssatz von 2 % angelegt.

a) Berechne das Kapital nach 1, 2 und 3 Jahren.

	A	B	C	D
1	**Zinseszins-Rechnung**			
2				
3	**Kapital**	500,00 €		
4	**Zinssatz**	2,00%		
5				
6	**Jahr**	**Kapital (am Jahresanfang)**	**(Jahres-) Zins**	**Kapital (am Jahresende)**
7	1	500,00 €	=0,02*500 = 10	=500 + 10 = 510
8	2	510,00	=0,02*510 = 10,20	=510 + 10,20 = 520,20
9	3	=520,20	=0,02*520,20 = 10,40	=520,20 + 10,40 = 530,60

b) Trage in der nebenstehenden Tabelle alle Formeln ein, mit denen das Kapital nach 1, 2, und 3 Jahren berechnet wird.

	A	B	C	D
1	**Zinseszins-Rechnung**			
2				
3	**Kapital**	500,00 €		
4	**Zinssatz**	2,00%		
5				
6	**Jahr**	**Kapital (am Jahresanfang)**	**(Jahres-) Zins**	**Kapital (am Jahresende)**
7	1	500,00 €	=B4*B7	=B7+C7
8	2	=D7	=B4*B8	=B8+C8
9	3	=D8	=B4*B9	=B9+C9

c) Kopieren von Formeln:

Notiere, was EXCEL jetzt in den Zellen C8 und C9 ausgibt:

In Zelle C8:0,00

In Zelle C9:#WERT!

	A	B	C	D
1	**Zinseszins-Rechnung**			
2				
3	**Kapital**	500,00 €		
4	**Zinssatz**	2,00%		
5				
6	**Jahr**	**Kapital (am Jahresanfang)**	**(Jahres-) Zins**	**Kapital (am Jahresende)**
7	1	500,00	=B4*B7	=B7+C7
8	2			
9	3			

Versuche, eine Erklärung dafür zu finden. (Welche Formel hat EXCEL in den Zellen C8 und C9 eingetragen?)

Formel in Zelle C8: =B5*B8 (in beiden Zellen steht nichts drin → wird als 0,00 gewertet!)

Formel in Zelle C9: =B6*B9 (in B6 steht ein Text → damit kann Excel nicht rechnen!)

Beim Kopieren der Formeln um eine Zeile nach unten rutschen auch die Zellnamen um eine Zeile nach unten: aus B4 wird B5, aus B7 wird B8 …

Sparplan

Sparplan - Aufgabe:

Hannah bekommt zu Jahresbeginn immer 500 € von ihren Großeltern. Diese zahlt sie sogleich auf ihr Sparbuch ein, auf dem das Geld zu 1,5% Jahreszinsen verzinst wird.

a) Berechne den Kontostand (nach der Einzahlung am Jahresbeginn) zu Beginn des 1., 2. und 3. Jahres.

Trage alle dafür notwendigen Rechnungen und Ergebnisse in die entsprechenden Zellen in der nebenstehenden Tabelle ein.

	A	B
1	Jahr	Kontostand nach der Einzahlung am Jahresbeginn
2	1	
3	2	
4	3	

Und nun mit Formeln:

b) Trage in der nebenstehenden Tabelle alle Formeln ein, mit denen das Kapital zu Beginn des 1., 2. und 3. Jahres (nach der Einzahlung am Jahresbeginn) berechnet wird.

c) Öffne die Datei *Sparplan – Vorlage 1*. Gib in ihr die Formeln aus Aufgabe b) ein und berechne so das Kapital zu Beginn des 1., 2. und 3. Jahres. Vergleiche das Ergebnis mit deinen Berechnungen aus Aufgabe a).

	A	B
1	Jahr	Kontostand nach der Einzahlung am Jahresbeginn
2	1	
3	2	
4	3	

Achtung: Alle Zellen müssen ansehnlich formatiert sein (z.B. Format Zelle Währung)

d) Übertrage die Formel durch Kopieren und berechne so den Kontostand für weitere Jahre. (Kontrolliere dabei, ob die Formel richtig kopiert wird!)
Speichere die Datei unter *Sparplan_einfach.xls* ab.

	A	B
1	Jahr	Kontostand nach der Einzahlung am Jahresbeginn
2	1	
3	2	
4	3	
5	4	
6	5	
7	6	
8	7	
9	8	

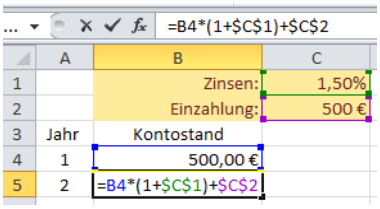
„Komfort-Tabelle“

e) Eine solche Tabelle kann auch so angelegt werden, **dass man zuvor Felder festlegt, in denen der jährliche Einzahlungsbetrag und die Zinsen eingetragen werden können** (im nebenstehenden Bild Zelle C1 und C2).

	A	B	C
1		Zinsen:	1,50%
2		Einzahlung pro Jahr:	500,00 €
3	Jahr	Kontostand nach der Einzahlung am Jahresbeginn	
4	1	500,00 €	
5	2		

Erläutere die Formel, die in der unteren Tabelle im Feld **B5** eingetragen wurde.

Warum kann man diese Formel problemlos nach unten kopieren und damit den Sparplan einfach fertigstellen?



Welchen Vorteil hat die „Komforttabelle“ im Vergleich zur „einfachen Tabelle“ aus Aufgabe a)-d)?

f) Öffne die Datei *Sparplan Vorlage* 2 und fülle die Spalte B mit den passenden Formeln. Speichere die Datei unter *Sparplan_Komfort.xls* ab und kontrolliere, ob die Tabelle den Kontostand richtig berechnet.

Forschungsaufgaben:

a) … mit der Datei „*Sparplan*“:

Aufgabe 1:

a) Wieviel Geld hat Hannah nach 10 Jahren auf ihrem Konto bei einer jährlichen Einzahlung von 500 € und einem Zinssatz von 1,5 % (bzw. 2,5 %)?

b) Wann ist Hannahs Kontostand bei einer jährlichen Einzahlung von 500 € und einem Zinssatz von 1,5 % erstmals über 3000 €?

c) Welchen Zinssatz müsste Hannah bekommen, wenn sie bei einer jährlichen Einzahlung von 500 € zu Beginn des 9. Jahres bereits über 5000 € auf dem Konto haben möchte?

d) Wie viel müsste Hannah zu Beginn jeden Jahres einzahlen, wenn sie bei einem Zinssatz von 1,50 % zu Beginn des 5. Jahres (möglichst) exakt 3000 € auf ihrem Konto haben möchte?

Denke daran: Euro-Beträge können nur 2 Stellen nach dem Komma haben.

b) … mit der Datei „*Zinseszins*“:

Aufgabe 2:

Richtig oder falsch: *„Wenn das Anfangskapital verdoppelt wird (und der Zinssatz und die Zeitdauer gleichbleiben), dann verdoppelt sich auch das Endguthaben.“*
Überlege zuerst selbst und prüfe dann mit EXCEL nach:

Aufgabe 3:

Nach wie vielen Jahren hat sich ein Anfangskapital von 500 € bei einem Zinssatz von 3% (4%, 5%) verdoppelt? Notiere die jeweiligen Ergebnisse.
Ändert sich diese Verdoppelungszeit, wenn das Anfangsguthaben geändert wird? Überlege zunächst selbst und teste dann mit EXCEL.
Suche eine Begründung für deine Beobachtungen.

Für Schnelle:

Was ist besser - Ein Kapital 3 Jahre lang zu 4% Zinsen anlegen oder 6 Jahre lang zu 2% Zinsen?
Überlege zunächst selbst und prüfe dann mit Excel nach.
Gilt dies auch für andere Zinssätze und Zeitdauern (z.B. *4 Jahre, 2%* im Vergleich zu *8 Jahre, 1%*)?

Sparplan (Lösungen)

Sparplan - Aufgabe:

Hannah bekommt zu Jahresbeginn immer 500 € von ihren Großeltern. Diese zahlt sie sogleich auf ihr Sparbuch ein, auf dem das Geld zu 1,5% Jahreszinsen verzinst wird.

a)

A	B
Jahr	Kontostand nach der Einzahlung am Jahresbeginn
1	=500
2	=500*(1 + 0,015) + 500 = 1007,5
3	=1007,5*(1 + 0,015) + 500 = 1522,61

b)

	A	B
1	Jahr	Kontostand nach der Einzahlung am Jahresbeginn
2	1	=500
3	2	=B2*(1 + 0,015) + 500
4	3	=B3*(1 + 0,015) + 500

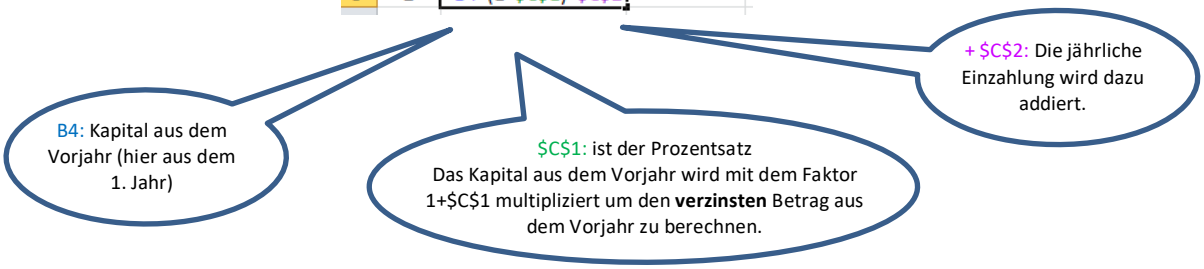
d)

	A	B
1	Jahr	Kontostand nach der Einzahlung am Jahresbeginn
2	1	500,00 €
3	2	1.007,50 €
4	3	1.522,61 €
5	4	2.045,45 €
6	5	2.576,13 €
7	6	3.114,78 €
8	7	3.661,50 €
9	8	4.216,42 €
10	9	4.779,67 €
11	10	5.351,36 €

„Komfort-Tabelle“

Erläutere die Formel, die in der unteren Tabelle im Feld **B5** eingetragen wurde.

	A	B	C
1		Zinsen:	1,50%
2		Einzahlung:	500 €
3	Jahr	Kontostand	
4	1	500,00 €	
5	2	=B4*(1+$C$1)+$C$2	



Warum kann man diese Formel problemlos nach unten kopieren und damit den Sparplan einfach fertigstellen?
Weil bei den Zelladressen, die sich beim Kopieren nicht verändern sollen (also bei den Zellen C1 und C2) immer ein Dollarzeichen davor steht.

Welchen Vorteil hat die „Komforttabelle“ im Vergleich zur „einfachen Tabelle“ aus Aufgabe a-d?
Man kann ganz leicht die Kontostände bei einem anderen Zinssatz oder bei einer anderen Einzahlung berechnen. Man muss dazu nur in Zelle C1 bzw. C2 etwas anderes eingeben.

In der „einfachen Tabelle“ müsste man dazu viele Formeln ändern. (z.B. *=500*(1 + **0,02**) + 500* wenn der Zinssatz von 1,5% auf 2% ansteigt).

Forschungsaufgaben:

Aufgabe 1:

a) Wieviel Geld hat Hannah nach 10 Jahren auf ihrem Konto bei einer jährlichen Einzahlung von 500 € und einem Zinssatz von 1,5 % (bwz. 2,5 %)?
Bei einem Zinssatz von 1,5%: 5351,36 € Bei einem Zinssatz von 2,5%: 5601,69 €

b) Wann ist Hannahs Kontostand bei einer jährlichen Einzahlung von 500 € und einem Zinssatz von 1,5 % erstmals über 3000 €?
Zu Beginn des 6. Jahres.

c) Welchen Zinssatz müsste Hannah bekommen, wenn sie bei einer jährlichen Einzahlung von 500 € zu Beginn des 9. Jahres bereits über 5000 € auf dem Konto haben möchte?
Bei einem Zinssatz von 2,62% hat Hannah zu Beginn des 9. Jahres 5001,59 € auf dem Konto (bei einem Zinssatz von 2,61% sind es nur 4999,56 €.

d) Wie viel müsste Hannah zu Beginn jeden Jahres einzahlen, wenn sie bei einem Zinssatz von 1,50 % zu Beginn des 5. Jahres (möglichst) exakt 3000 € auf ihrem Konto haben möchte?
Bei einer monatlichen Einzahlung von 603,62 € hat Hannah zu Beginn des 5. Jahres 3000,03 € auf dem Konto (bei einer Einzahlung von 603,15 € sind es nur 2999,99 €.

Aufgabe 2:

Richtig oder falsch: *„Wenn das Anfangskapital verdoppelt wird (und der Zinssatz und die Zeitdauer gleichbleiben), dann verdoppelt sich auch das Endguthaben.“*
Überlege zuerst selbst und prüfe dann mit EXCEL nach:
Stimmt. Beim doppelten Anfangskapital (und gleichbleibendem Zinssatz) bekommt man auch doppelt so viele Zinsen. Also hat man nach einem Jahr doppelt so viel Kapital.
So geht das in jedem Jahr. Also hat man irgendwann auch das doppelte Endguthaben.

Aufgabe 3:

Nach wie vielen Jahren hat sich ein Anfangskapital von 500 € bei einem Zinssatz von 3% (4%, 5%) verdoppelt? Notiere die jeweiligen Ergebnisse.
Ändert sich diese Verdoppelungszeit, wenn das Anfangsguthaben geändert wird? Überlege zunächst selbst und teste dann mit EXCEL.
Suche eine Begründung für deine Beobachtungen.

Zinssatz	Anfangskapital 500 €	1000 €	100 €
3 %	Ca. 24 Jahre	Ca. 24 Jahre	Ca. 24 Jahre
4 %	Ca. 17 Jahre	Ca. 17 Jahre	Ca. 17 Jahre
5 %	Ca. 15 Jahre	Ca. 15 Jahre	Ca. 15 Jahre

Beobachtungen:

1. Je höher der Zinssatz, desto kürzer ist also die Verdoppelungszeit.

2. Bei einem festen Zinssatz ist die Verdoppelungszeit für alle Anfangsguthaben gleich.

Begründungen:

1. Wenn man mehr Zinsen erhält, dauert es nicht so lange, bis sich das Kapital verdoppelt hat.

2. Bei der Verdoppelungszeit geht es um die Zeit, bis sich ein Anfangskapital verdoppelt hat – also einen Zuwachs um 100% hat.
   Bei einem größeren Anfangskapital (z.B. dem doppelten Anfangskapital) erhält man auch entsprechend höhere Zinsen und nach dem gleichen Zeitraum auch ein entsprechend höheres Endkapital (dies wurde für ein verdoppeltes Anfangskapital schon in Aufgabe 2 betrachtet). Der Zeitraum, bis sich das Kapital verdoppelt hat, bleibt also gleich.

Für Schnelle:

Was ist besser - Ein Kapital 3 Jahre lang zu 4% Zinsen anlegen oder 6 Jahre lang zu 2% Zinsen?
Überlege zunächst selbst und prüfe dann mit Excel nach.
Gilt dies auch für andere Zinssätze und Zeitdauern (z.B. *4 Jahre, 2%* im Vergleich zu *8 Jahre, 1%*)?

Anfangs-kapital 100 €	**Variante A:**	**Variante B**	Die doppelt so lange Laufzeit und der halbe Zinssatz sind besser.
	3 Jahre zu 4% Zinsen: 124,86 €	6 Jahre zu 2% Zinsen: 126,16 €	
	4 Jahre zu 2% Zinsen: 108,24 €	8 Jahre zu 1% Zinsen: 108,28 €	
	5 Jahre zu 8% Zinsen: 146,93 €	10 Jahre zu 4% Zinsen: 148,02 €	

Begründung:
Bei Variante B erhält man doppelt so oft Zinsen – allerdings nur mit halbem Zinssatz

Nach einem Jahr erhält man bei Variante B halb so viele Zinsen wie bei Variante A. Im zweiten Jahr werden diese Zinsen aber bereits mitverzinst → man erhält dafür Zinseszinsen.

Man hat bei Variante B nach zwei Jahren also mehr als man bei Variante A nach einem Jahr hat.
Allgemein hat man bei Variante B am Ende mehr als man in halb so vielen Jahren bei Variante A hat.

Tilgungsplan

Wenn man sich von einer Bank Geld leiht, also einen *Kredit* aufnimmt, muss man für den geliehenen Betrag (als Gebühr dafür, dass man von der Bank Geld bekommt) *Kreditzinsen* bezahlen.
Die Rückzahlung des Kredits nennt man *Tilgung*. Bei höheren Kreditbeträgen zahlt man den Kredit nicht auf einmal, sondern in kleineren Teilbeträgen zurück.

Aufgabe 1:

a) Öffne die Tabelle „Tilgungsplan“. Versuche, ihren Aufbau und die verwendeten Formeln zu verstehen. Überlege auch, warum manchmal ein $-Zeichen in der Formel verwendet wird. Notiere zu jeder Spalte, was in der Spalte berechnet wird. (Bei Schwierigkeiten kannst du die Puzzleteile unten verwenden.)

	A	B	C	D	E
1		Bankzinsen pro Jahr:	3,00%		
2		Jährliche Einzahlung:	18.000,00 €		
3					
4	Jahr	Restschuld zu Jahresbeginn	Zinsen	Tilgung	Restschuld zum Jahresende
5	1	350.000,00 €	10.500,00 €	7.500,00 €	342.500,00 €
6	2	342.500,00 €	10.275,00 €	7.725,00 €	334.775,00 €

b) Beantworte die folgenden Fragen mit Hilfe der Datei:

- Wie lange dauert es, bis der Kredit abbezahlt ist?
- Angenommen, der Zinssatz für den Kreditzins sinkt um ein Prozent. Wie lange dauert es dann, bis der Kredit abbezahlt ist?
- Wie lange dauert es, wenn der Zinssatz sich um ein Prozent erhöht?

Aufgabe 2:

Familie Knauf benötigt einen Kredit von 300.000 €, den sie bei einer Bank zu einem jährlichen Zinssatz von jährlich 2,5% aufnimmt.

Beantworte die folgenden Fragen mit Hilfe der Datei:

a) Welchen Betrag muss Familie Knauf jährlich (monatlich) abzahlen, wenn sie nach 20 Jahren schuldenfrei sein möchte?

b) Wie hoch ist die Restschuld nach 20 Jahren, wenn Familie Knauf pro Jahr 24.000 € abzahlen kann?

c) Vergleiche bei b) die Tilgung im 1. mit der Tilgung im 20. Jahr und erkläre den Unterschied.

Restschuld am Jahresanfang - Tilgung:
So berechnet man die Restschuld am Jahresende

= $C$1 * B5

Restschuld am Jahresanfang
War gleichzeitig die Restschuld am Ende des Vorjahrs

= $C$2 - C5

= B5 – D5

Jährl. Einzahlung – Zinsen:
Das ist das Geld, was in diesem Jahr für die Tilgung des Kredits verwendet wird.

Hier werden die Zinsen für die Restschuld berechnet.

Sparplan Vorlage 1

	A	B	C	D	E
1	Jahr	Kontostand nach der Einzahlung am Jahresbeginn			
2	1				
3	2				
4	3				
5	4				
6	5				
7	6				
8	7				
9	8				
10	9				
11	10				

Sparplan von
.....

Sparplan Vorlage 2

	A	B	C	D	E	F
1		Zinsen:	1,50%			
2		Einzahlung pro Jahr:	500,00 €			
3	Jahr	Kontostand nach der Einzahlung am Jahresbeginn				
4	1	500,00 €				
5	2					
6	3					
7	4					
8	5					
9	6					
10	7					
11	8					
12	9					
13	10					

Aufgaben

Zelle C1 als Prozentangabe formatieren

Zelle C2 als Euro-Angabe formatieren

Finde für den Kontostand zu Beginn des zweiten Jahr esdie passende Formel (mit absolutem Verweis auf die oberen beiden Angaben) und kopiere diese dann auf die weiteren Jahre.

Sparplan Komfort

	A	B	C	D	E	F
1		Zinsen:	1,50%			
2		Einzahlung pro Jahr:	500,00 €			
3	Jahr	Kontostand nach der Einzahlung am Jahresbeginn				
4	1	500,00 €				
5	2	1.007,50 €				
6	3	1.522,61 €				
7	4	2.045,45 €				
8	5	2.576,13 €				
9	6	3.114,78 €				
10	7	3.661,50 €				
11	8	4.216,42 €				
12	9	4.779,67 €				
13	10	5.351,36 €				

Aufgaben

Zelle C1 als Prozentangabe formatieren

Zelle C2 als Euro-Angabe formatieren

Finde für den Kontostand zu Beginn des zweiten Jahres die passende Formel (mit absolutem Verweis auf die oberen beiden Angaben) und kopiere diese dann auf die weiteren Jahre.

Tilgungsplan

	A	B	C	D	E
1		Bankzinsen pro Jahr:	3,00%		
2		Jährliche Einzahlung:	18.000,00 €		
3					
4	Jahr	Restschuld zu Jahresbeginn	Zinsen	Tilgung	Restschuld zum Jahresende
5	1	350.000,00 €	10.500,00 €	7.500,00 €	342.500,00 €
6	2	342.500,00 €	10.275,00 €	7.725,00 €	334.775,00 €
7	3	334.775,00 €	10.043,25 €	7.956,75 €	326.818,25 €
8	4	326.818,25 €	9.804,55 €	8.195,45 €	318.622,80 €
9	5	318.622,80 €	9.558,68 €	8.441,32 €	310.181,48 €
10	6	310.181,48 €	9.305,44 €	8.694,56 €	301.486,93 €
11	7	301.486,93 €	9.044,61 €	8.955,39 €	292.531,53 €
12	8	292.531,53 €	8.775,95 €	9.224,05 €	283.307,48 €
13	9	283.307,48 €	8.499,22 €	9.500,78 €	273.806,70 €
14	10	273.806,70 €	8.214,20 €	9.785,80 €	264.020,91 €
15	11	264.020,91 €	7.920,63 €	10.079,37 €	253.941,53 €
16	12	253.941,53 €	7.618,25 €	10.381,75 €	243.559,78 €

Zinseszinsrechnung Vorlage

	A	B	C	D	E
1	**Zinseszins-Rechnung**				
2					
3	**Kapital**	500,00 €			
4	**Zinssatz**	2,00%			
5					
6	**Jahr**	**Kapital (am Jahresanfang)**	**(Jahres-) Zins**	**Kapital (am Jahresende)**	
7	0	500,00 €			
8	1				
9	2				
10	3				

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit FEU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Je nach zur Verfügung stehender Zeit bzw. Unterrichtsverlauf 5. – 8. Phase kurzhalten oder weglassen.

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Einstieg FEU 3 Min.	Abfragen der Vorerfahrung – Alltagsbezug / Zielstellung: Was wisst ihr über Guthaben, Zinsen, Zinseszins? Info: Wir wollen heute Zinsen/Zinseszinsen mit der Tabellenkalkulation berechnen	
2. Erarbeitung 1a FEU 10 Min.	Gemeinsame Bearbeitung des AB „Tabellenkalkulation – Zinseszinsrechnung“ (Aufgaben a) – b))	AB Tafel oder Dokumenten-kamera
3. Erarbeitung 1b EA / PA 10 Min.	SuS bearbeiten Aufgaben c) und d) des AB „Tabellen-kalkulation – Zinseszinsrechnung“ Bei Schwierigkeiten Unterstützung durch L. und andere SuS („Mastersystem“) Schnelle SuS lesen bereits den Kasten „Verschiedene Zellbezüge“ und bearbeiten Aufg. e)	AB Dateivorlage Computer
4. Ergebnis 1 FEU 7 Min.	Besprechung: Was passiert beim Kopieren von Formeln? Einführung von relativen und absoluten Zellbezügen L. demonstriert ggfs. anhand einer Excel-Datei und mit Beamer Gemeinsame Bearbeitung von Aufgabe e)	AB Computer Evtl. Beamer
5. Erarbeitung 2 + Ergebnis 2 FEU und EA / PA 12 Min.	Bearbeitung des AB „Tabellenkalkulation – Sparplan“: Aufgabe a) im FEU, restliche Aufgaben in EA / PA Bei Schwierigkeiten Unterstützung durch L. und andere SuS („Mastersystem“) SuS kontrollieren ihre Datei mit Hilfe ausgehängter Lösungen.	AB Dateivorlagen Computer Ausgehängte Lösungen
6. Erarbeitung 3 + Ergebnis 3 EA / PA 12 Min.	SuS bearbeiten die Forschungsaufgaben (soweit sie kommen) SuS kontrollieren ihre Datei mit Hilfe ausgehängter Lösungen.	AB Computer Ausgehängte Lösungen
7. Ergebnis 4 FEU 6 Min.	Wie seid ihr beim Lösen von Aufg. 1 c) und d) vorgegangen? Welches ist die systematischste Vorgehensweise? Evtl. kurze Besprechung der Begründungsaufgaben (Aufg. 2 und 3)	
8. optional: Vertiefung EA / PA	Bearbeitung der weiteren Forschungsaufgaben bzw. des AB Tilgungsplan	AB Computer

Lehrerblatt

In diesem Modul geht es um ein technisches Projekt, das zu einem Wettbewerb führt und einfache Grundlagen aus den Naturwissenschaften Chemie und Physik anwendet. Die Aufgabe ist es, ein Tauchboot zu bauen, das abtaucht, wenn man es auf eine Wasseroberfläche setzt und nach möglichst genau einer Minute selbstständig wieder bis an die Wasseroberfläche auftaucht. Eine Steuerung oder Beeinflussung des Boots von außen ist dabei nicht erlaubt. Sie können gerne für das Siegerteam einen kleinen Preis (Schokolade, Gummibärchen oder ähnliches) aussetzen, der Wettbewerb wird die SuS erfahrungsgemäß aber auch ohne Preis motivieren.

Fachlicher Hintergrund I:

Das Schwimmverhalten eines Gegenstands hängt von seiner Dichte $\rho = \frac{m}{V}$ ab. Dabei ist m die Masse und V das Volumen des Körpers. Ist die Dichte größer als die von Wasser (1 g/cm³), sinkt der Gegenstand in Wasser, ist die Dichte kleiner, schwimmt er. Bei gleicher Dichte schwebt er. Das zu bauende Boot muss als ohne äußere Steuerung seine Dichte verkleinert, damit es von selbst wieder auftaucht.

Didaktische Hinweise:

- Im Fach BNT wird das Thema „Schwimmen-Schweben-Sinken“ in Klasse 5/6 behandelt. Dabei wird jedoch die Dichte in der Regel nicht mittels der obigen Formel quantitativ eingeführt. Stattdessen wird die Abhängigkeit nur qualitativ im Bildungsplan verlangt. Das kann z.B. zu Ergebnissen folgender Art geführt haben: „Ob ein Gegenstand schwimmt, hängt von seiner Masse und seinem Volumen ab. Wenn er viel Masse bei einem kleinen Volumen hat, sinkt er. Hat er wenig Masse bei großem Volumen schwimmt er. Es kommt also auf das Verhältnis von Masse zu Volumen an.“ Bei manchen Kollegen wurden über das Pflichtprogramm hinaus vielleicht auch Dichten ausgerechnet. Wir werden hier also etwas verwenden, das je nach Schule in unterschiedlicher Form und Ausführlichkeit behandelt wurde. Fragen Sie daher am besten die Kollegen der Schule nach den Details. Stellen Sie sich jedoch darauf ein, dass Sie auch bei einer „Wiederholung“ ganz am Anfang beginnen müssen und zumindest bei einigen SchülerInnen kaum mehr belastbare Vorkenntnisse vorhanden sein werden.
- Je nach Gruppe und Vorkenntnisse werden Sie sicher unterschiedlich schnell vorankommen und bei Gruppen mit vielen Vorkenntnissen die anvisierten 4 Stunden eventuell nicht vollständig benötigen. Planen Sie z.B. Mathematikrätsel oder -spiele als Puffer ein.
- Achten Sie bei diesem Thema auf die korrekte Verwendung der Fachsprache, da die **Ungenauigkeiten der Alltagssprache** („schwere Gegenständen sinken, leichte schwimmen“ statt „Gegenstände mit kleiner Dichte schwimmen, solche mit großer Dichte sinken“) ein Lernhindernis darstellen. Gegebenenfalls helfen beim Präzisieren von Schüleraussagen die Fragen, ob ein Containerschiff „leicht“ bzw. ein Kieselstein „schwer“ ist.

Regeln für das Schwimmen (Versuch 2):

Je nach Vorwissen der SuS werden Sie hier unterschiedliche Beiträge der SuS erhalten, die zu unterschiedlichen Regeln führen könnten. Eine einfache Variante könnte z.B. folgendermaßen aussehen:

> „Verkleinert man die Masse eines Gegenstandes (während das Volumen gleichbleibt), so beginnt er irgendwann zu schwimmen. Erhöht man das Volumen eines Gegenstandes (während die Masse gleichbleibt), so beginnt er irgendwann zu schwimmen.“

Es ist aber auch denkbar, dass die SuS die Dichte gründlich kennen gelernt haben und schon hier Regeln mit der Dichte formulieren (siehe weiter unten).

Quantitative Fassung der Dichte:

Für den Versuch 3 müssen Sie die Dichte einführen (oder wiederholen). Sie könnten aber auch entscheiden den Versuch 3 und die Beschreibung mit der Dichte weg zu lassen. Für den Bau des Tauchboots reicht im Prinzip schon das oben genannte einfache Ergebnis aus.

Um die Dichte ausgehend von dem oben erwähnten elementaren Ergebnis des Versuchs 2 zu entwickeln/ wiederholen, könnten Sie die folgenden Schritte nutzen:
Arbeiten Sie zunächst im UG heraus, dass Schwimmen oder Sinken davon abhängt, wie viel Masse auf ein bestimmtes Volumen kommt - also vom Verhältnis von Masse zu Volumen.
Führen Sie dann die Dichte mit ihrer Formel ein. Auf die Formelsymbole verzichten wir hier.

„Unter der Dichte eines Gegenstands versteht man das Verhältnis aus Masse und Volumen. $Dichte = \frac{Masse}{Volumen}$. Die Einheit der Dichte ist $1\,\frac{g}{cm^3}$."

Lassen Sie die SuS Beispiele berechnen, z.B. aus den Angaben „100 g Wasser haben ein Volumen von 100 cm³" sowie „100 g Marshmallows haben ein Volumen von ca. 480 cm³". Damit ist auch schon für Versuch 3 die Dichte von Wasser bekannt.
Im nächsten Schritt sollen die SuS je-desto-Aussagen über die Dichte treffen: „Je größer die Masse wird, desto größer wird die Dichte bei (gleichbleibendem Volumen). Je größer das Volumen wird, …". Diese Aussagen werden dann mit dem Schwimmverhalten in Verbindung gebracht.

Dichte-Regel für das Schwimmen (Versuch 3):
Vergleichen Sie die Ergebnisse der SuS und sprechen Sie auch darüber, dass gewisse Schwankungen und Abweichungen bei einer Messung normal sind. Einigen Sie sich darauf, dass die gemessenen Werte nahe bei der Dichte von Wasser liegen. Falls wider Erwarten größere Abweichungen auftreten, besprechen Sie die möglichen Ursachen.
Nun sollen die SuS, eine genaue Regel für das Schwimmen angeben. Das gemeinsame Ergebnis könnte beispielsweise so lauten: „Ist die Dichte eines Gegenstands größer als die Dichte von Wasser sinkt er. Ist die Dichte kleiner, so schwimmt er."

Fachlicher Hintergrund II:
Für unser Tauchboot ist es nötig, dass die Dichteänderung automatisch durch den Kontakt mit Wasser zustande kommt. Die kann beispielsweise geschehen, indem wasserlöslicher Ballast (z.B. Würfelzucker) verwendet wird. In diesem Fall nimmt durch das Lösen des Zuckers die Dichte des Boots ab (und übrigens gleichzeitig die Dichte der Flüssigkeit ein klein wenig zu). Bei passendem Design taucht das Boot dadurch also wieder auf.
Man kann auch auf eine Reaktion mit Gasentstehung setzten, indem man z.B. Brausetabletten mit Wasser in Verbindung bringt. Dabei entsteht gasförmiges Kohlenstoffdioxid, das entweder Wasser aus einem Tank mit Loch herausdrücken kann (Masseverkleinerung) oder z.B. einen Luftballon aufblasen kann (Volumenvergrößerung). Beides erniedrigt wieder die Dichte des Boots, das dadurch auftaucht.

Hinweise:
- Erste Experimente zur Gasentstehung und Löslichkeit wurde schon in Klasse 6 in Mkid beim Modul „Brausetablette" durchgeführt. Diese Phänomene werden hier in anderem Zusammenhang wieder aufgegriffen. Es ist aber nicht notwendig, dass die SuS Kenntnisse aus dem Mkid-Modul „Brausetablette" mitbringen.
- In Versuch 4 und Versuch 5 werden Reaktionen mit Gasentstehung (Kohlenstoffdioxid, auch von der Kohlensäure im Sprudel bekannt) sowie die Löslichkeit von Salz und Zucker in Wasser untersucht. Der Schwerpunkt liegt hier auf dem jeweiligen Phänomen. Interessierten Gruppen, die mit den Pflichtaufgaben fertig sind, können Sie je nach Zeit aber auch weitere Untersuchungen ermöglichen.
- Weitere Details zu den Versuchen und den Hintergründen finden Sie auf dem Blatt „Experimente: Materialien und Hinweise".
- Für die Experimente werden nur haushaltsübliche Geräte und Stoffe verwendet. Wenn Sie jedoch Fragen zum chemischen Hintergrund oder zum Umgang mit den Geräten oder Stoffen haben, fragen Sie bitte eine Chemiekollegin/ einen Chemiekollegen vor Ort.

Experimente: Materialien und Hinweise

Allgemeine Hinweise:

- Sie benötigen große transparente Plastikkisten (ca. 35 cm x 25 cm und mind. 30 cm hoch) oder große transparente Plastikeimer, die **frühzeitig** im Baumarkt oder Möbelhaus **gekauft werden müssen**, wenn nicht bereits genügend geeignete Wasserbecken an der Schule vorhanden sind. Alle anderen Materialien können Sie im Supermarkt/ Baumarkt kaufen oder sie sind in der Schule vorhanden.
- Testen Sie rechtzeitig vor diesen Stunden die Versuche und bauen Sie selbst ein Tauchboot.
- Sie müssen sich hier zwar frühzeitig um einiges Material kümmern und die Versuche ausführlich ausprobieren, dafür ist danach der Vorbereitungsaufwand für die beiden letzten Stunden gering.
- Maximal fünf oder vier Schülergruppen, die nebeneinander experimentieren, erleichtern Ihnen die Betretung während des Unterrichts.

Materialliste für die Projektphasen und für alle Vorversuche

Für jede Schülergruppe benötigt:

1 Wasserbecken – z.B. eine transparente Plastikbox (ca. 35 cm x 25 cm, mind. 30 cm hoch) oder ein großer transparenter Plastikeimer aus dem Baumarkt/ Möbelhaus; 1 Rolle Küchenpapier;
1 großer Becher (mind. 1 l) mit Auslauf oder eine Flasche mit großem Hals, um das Wasserbecken ohne Überschwemmung vollends zu füllen und später zu entleeren

Material für den Bootbau, das für alle Gruppen bereitsteht:

Geräte, Werkzeug:

Wasserkocher; Waage(n); Stoppuhr (oder Handy); Bastelmesser; Handbohrer; ggf. Laubsägen; Unterlage zum Schneiden, Bohren oder Sägen; Klebstoff; Klebeband; doppelseitiges Klebeband

Verbrauchs- und Baumaterialien:

Backpulver; Essig oder Zitronensaft; Brausetabletten; Salz; Zucker; Würfelzucker; kleine Plastikflaschen (z.B. kleine Saftflaschen oder Trinkjoghurtflaschen); Holzbrettchen (ca. 6 cm x 12 cm oder andere geeignete Plattformen zum Bootsbau); Styroporplatten; Filmdöschen (heute als „Geocaching-Dosen“ online erhältlich); kleine Plastiktüten; Gegenstände zum Beschweren, z.B. Kiesel und kleine Steine oder anderer wassertauglicher Ballast aus der Sammlung; Knete; feiner Kiesel oder Sand (z.B. bei Dekomaterialien in Möbelhäusern oder Blumenläden erhältlich); Alufolie; Schnur; Luftballons

Materialien für die Vorversuche:

Versuch 1:

Wasserbecken, verschiedene Gegenstände, unter denen auch solche sind, wo das Schwimmverhalten nicht ganz offensichtlich ist – z.B. Tischtennisball, Billardkugel, Flummi, Streichholzschachteln (einmal leer und einmal mit ein paar Schrauben oder Münzen gefüllt), Knetklumpen, leeres und gefülltes Filmdöschen, Radiergummi, Plastikstift, …

Versuch 2:

leerer Luftballon mit Murmel oder Münzen als Ballast, teilweise aufgeblasener Luftballon mit dem gleichen Ballast und daher der gleichen Masse; leeres und gefülltes Filmdöschen (heute als Geocaching-Dosen online erhältlich)

Versuch 3: (je Schülergruppe)

1 Wasserbecken, 1 Filmdöschen (heute als Geocaching-Dosen online erhältlich), Sand oder kleine Kieselsteine zum Befüllen, Waage, Lineal

Versuch 4: (je Schülergruppe)

Kleine Plastikflaschen mit Loch im Deckel, Luftballons, Brausetablette, Backpulver und Zitronensaft/ Essig

Versuch 5: (je Schülergruppe)

Salz (ca. 100 g je Gruppe), Zucker (ca. 250 g je Gruppe), Thermometer, Wasserkocher, Esslöffel, Rührstab oder weiterer Löffel zum Rühren, 2 kleine Bechergläser (250 ml reichen)

Versuch 1: Schwimmen oder sinken die Gegenstände?

Material:

Wasserbecken; verschiedene Gegenstände, unter denen auch solche sind, wo das Schwimmverhalten nicht ganz offensichtlich ist – z.B. Tischtennisball, Billardkugel, Flummi, Streichholzschachteln (einmal leer und einmal mit ein paar Schrauben oder Münzen gefüllt), Knetklumpen, leeres und gefülltes Filmdöschen, Radiergummi, Plastikstift, …

Durchführung und Hinweise:

- Das Wasserbecken für alle gut sichtbar etwas erhöht aufstellen und mit Wasser befüllen.
- Mit einfachen/ offensichtlichen Gegenständen anfangen. Die SuS sollen per Handzeichen vorhersagen, ob der Gegenstand schwimmen wird, bevor er auf das Wasser gesetzt wird.
- Bei den Streichholzschachteln mit der gefüllten anfangen, die entgegen der verbreiteten Erwartung sinken wird. Bei den Filmdöschen könnte man danach umgekehrt vorgehen.
- Nach einigen Gegenständen ohne Begründung der Vorhersagen sollen die SuS auch eine Begründung nennen, warum der nächste Gegenstand schwimmen wird.
- Hier werden Vorkenntnisse aus dem Fach BNT (Klasse 5/6) reaktiviert, wo „Schwimmen – Schweben – Sinken“ bereits Thema war. Der Versuch kann daher je nach Vorwissen kurzgehalten werden.

Versuch 2: Wann schwimmt, wann sinkt ein Gegenstand?

Material:

leerer Luftballon mit Murmel oder Münzen als Ballast, teilweise aufgeblasener Luftballon mit dem gleichen Ballast und daher der gleichen Masse; leeres und gefülltes Filmdöschen (heute als Geocaching-Dosen online erhältlich)

Durchführung und Hinweise:

- Ziel des Versuchs ist es, eine Regel zu formulieren, welche Größen wie Einfluss auf das Schwimmen oder Sinken eines Gegenstands haben.
- Es ist wahrscheinlich, dass die SuS Kenntnisse aus dem Fach BNT präsent haben und diese ggf. auch schon im Versuch 1 beisteuern. Dann kann hier abgekürzt werden: Zur Überprüfung der bekannten Regel leiten die SuS zu jedem der beiden Gegenstandspaaren aus der Regel eine begründete Vorhersage ab. Ansonsten wird die Regel für das Schwimmen hier erarbeitet.
- Beispielsweise könnten sich je nach Vorwissen folgende Ergebnisse ergeben:
  „Erhöht man die Masse eines Gegenstands (während das Volumen gleich bleibt), so beginnt er irgendwann zu sinken. Erhöht man das Volumen eines Gegenstands (während die Masse gleich bleibt), so beginnt er irgendwann zu schwimmen.“ *oder*
  „Ob ein Gegenstand schwimmt hängt von seiner Dichte ab. Bei kleiner Dichte schwimmt er. Ist die Dichte zu groß, sinkt er. Ein Gegenstand mit viel Masse und kleinem Volumen hat eine große Dichte, während ein Gegenstand mit wenig Masse und großem Volumen eine kleine Dichte hat.“ *oder* …

Versuch 3: Bei welcher Dichte liegt der Übergang von Schwimmen zu Sinken?

Material: (je SuS-Gruppe)

1 Wasserbecken, 1 Filmdöschen (heute als Geocaching-Dosen online erhältlich), Sand oder kleine Kieselsteine zum Befüllen, Waage, Lineal

Hinweise:

- Achten Sie schon hier freundlich aber bestimmt darauf, dass die SuS ordentlich arbeiten und verspritztes Wasser sofort wegwischen.
- Zum Berechnen des Volumens die Formel „Grundfläche · Höhe“ mit Skizze vorgeben (nicht aus dem Mathematikunterricht bekannt). Die Formel für den Flächeninhalt eines Kreises muss sehr wahrscheinlich wiederholt werden (ist aber ein Thema in Klasse 5/6).

Versuch 4: Reaktionen mit Gasbildung – Volumenänderung

Material: (je SuS-Gruppe)

1 kleine Plastikflasche mit Loch im Deckel (ca. 3-4 mm Durchmesser), Plastikwanne oder Wasserbecken, Luftballons, Brausetablette, Backpulver und Zitronensaft/ Essig, Küchenpapier

Hinweise:

- **Sicherheitshinweis** zum Bohren der Löcher in die Deckel (Vorbereitung)**:**
  Verwenden Sie einen Handbohrer oder bitten Sie unterwiesene Kollegen an der Schule, das Bohren mit der Bohrmaschine zu übernehmen. So halten Sie die Sicherheitsregeln für Lehrer an Schulen ein.

- Außer mit den Brausetabletten kann auch mit Backpulver und Zitronensaft oder Alternativ mit Backpulver und Essig ein Gas (Kohlenstoffdioxid) erzeugt werden.
- **Sicherheitshinweis:**
  Essig oder Zitronensaft dürfen nichts ins Auge gelangen. Beides darf nicht getrunken werden, das gilt auch für Wasser mit gelösten Brausetabletten. Keinesfalls konzentrierten Essig verwenden.

- Falls nötig, die SuS-Gruppen vorsichtig auf die Variante mit der Flasche mit Loch, die mit Wasser und einer Braustablette gefüllt wird, hinweisen. Hier drückt das entstehende Gas Wasser durch das Loch heraus und die Masse sowie die Dichte der gefüllten Flasche nehmen ab. Diese ist daher eine mögliche Option für das Tauchboot.
- Vergrößert man die Oberfläche der Brausetablette durch zerbrechen, beschleunigt sich die Gasbildung durch das schnellere Auflösen der Tablette.
- Achten Sie auf ordentliches Arbeiten der SuS und gründliches Reinigen von Tischen und Materialien, die Brauselösung oder Backpulver-Zitronensaft-Wasser abbekommen haben.

Versuch 5: Löslichkeit in Wasser – Masseänderung durch löslichen Ballast

Material: (je SuS-Gruppe);
Salz (ca.100 g je Gruppe)/ Zucker (ca. 250 g je Gruppe), 1 Esslöffel, 1 Rührstab/ weiterer Löffel, 2 kl. Bechergläser, Waage, Thermometer, Wasserkocher

Hinweise:

- Die Hälfte der Gruppen soll die Löslichkeit von Salz und die andere Hälfte von Zucker in Wasser untersuchen. Die Bechergläser für die Besprechung aufheben und nicht vorher leeren lassen.
- Durch das Wiegen vor und nach dem Einrühren von Zucker/ Salz wird überprüfbar, dass das Salz/ der Zucker nicht verschwunden ist, sondern nur gelöst und dabei unsichtbar wurde.
- Der Versuch demonstriert auch die unterschiedliche Löslichkeit von Salz (ca. 35 g je 100 ml Wasser bei 20°C) und Zucker (ca. 204 g je 100 ml Wasser bei 20°C). Nach dem dritten Esslöffel stellt man beim Salz fest, dass es sich nicht vollständig löst, und der vierte Löffel bleibt komplett als festes Salz auf dem Becherboden übrig. Beim Zucker lassen sich dagegen problemlos alle vier Löffel lösen. Dies soll durch den Vergleich der Beobachtungen in der anschließenden Besprechung herausgearbeitet werden. (Hinweis: Ein Esslöffel Salz entspricht ca. 15 g, ein Esslöffel Zucker ca. 13 g).

- Für unsere Wiederauftauchboote ist also Zucker besser geeignet als Salz, wenn wir Ballast durch Lösen in Wasser loswerden wollen.
- Schnelle Gruppen können auch die Löslichkeit bei höherer Wassertemperatur untersuchen.
- **Sicherheitshinweis:**
  Falls SuS-Gruppen untersuchen, wie die Löslichkeit von der Temperatur abhängt, müssen Sie die SuS vor den Gefahren durch heißes Wasser und Wasserdampf warnen und die Gruppen besonders genau im Blick halten.

Projektphase: Bau der Tauchboote

Material:

Siehe Liste ganz oben.

Das Material zentral auslegen und den SuS vorstellen.

Richten Sie einen speziellen Tisch mit einer Schutzunterlage für das „Handwerken“ ein und beachten Sie die Sicherheitshinweise.

Hinweise:

- **Sicherheitshinweis:**
  SchülerInnen dürfen (ohne Schulung) nur mit Handbohrern und nicht mit elektrischen Bohrmaschinen arbeiten. Da Flaschen mit vorgebohrten Löchern im Deckel bereits vorhanden sind, ist das Bohren neuer Löcher im Unterricht nicht unbedingt nötig. Falls einzelne Gruppen doch weitere Löcher wünschen, zeigen sie den SuS zuerst die Handhabung des Handbohrers.

- **Sicherheitshinweis:**
  Warnen Sie die SuS vor Schnittverletzungen beim Verwenden des Bastelmessers und der (Laub-)säge und fordern Sie sorgfältiges Arbeiten ein. Dabei sollen die SuS darauf achten, das Werkstück, an dem sie scheiden oder sägen, gut zu fixieren/ festzuhalten. Lassen Sie die SuS nur unter Ihrer direkten Aufsicht diese Arbeiten vornehmen. D.h. stellen Sie sich neben die SuS, die sägen oder bohren, und geben Sie Hilfen und Sicherheitshinweise.

- Nutzen Sie beim Handwerken Schutzunterlagen, damit die Tische nicht beschädigt werden.
- Es sind sowohl Boote möglich, die ausschließlich auf das Lösen von Zuckerwürfel als Ballast setzen, also auch solche, die nur mit Gasbildung arbeiten. Es lassen sich auch beide Methoden kombinieren, was die Konstruktion und die Reproduzierbarkeit erfahrungsgemäß etwas kompliziert.
- Tipp: Werden Gasbildungsreaktionen verwendet, ist es die einfachste Variante, die letzte Zutat (Brausetablette oder Wasser) von Hand einzufüllen, um die Reaktion zu starten und sofort danach das Boot auf das Wasser zu setzen. Das Boot so zu konstruieren, dass das Wasser von selbst eindringt, ist auch möglich aber etwas schwieriger.
- Bei Booten, bei denen Zuckerballast gelöst werden soll, sollte die Masse des Boots mit permanentem Ballast zunächst so eingestellt werden, dass es gerade schwimmt und durch die zusätzlichen Zuckerwürfel sinkt.
- Tipp: Damit sie sich gut lösen, sollten die Zuckerwürfel eine möglichst große freie Oberfläche haben, die mit Wasser in Kontakt kommt. Die SuS sollen sich merken, wie viele Zuckerwürfel sie an welchen Stellen aufgeklebt haben, um ihr Boot gezielt abwandeln, bzw. für den Wettbewerb genau gleich bauen zu können.

Bau eines automatischen Wiederauftauchboots

I) Bei welcher Dichte liegt der Übergang vom Schwimmen zum Sinken?

Material:
1 Wasserbecken, 1 Döschen, Sand oder kleine Kieselsteine zum Befüllen, Löffel, Waage, Lineal

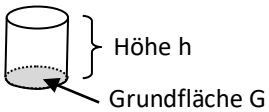
Aufträge:

a) Füllt solange Sand in das Plastikdöschen, bis es gerade nicht mehr schwimmt, sondern im Wasser schwebt (oder ganz extrem langsam sinkt/ steigt). Versucht dabei möglichst genau den Schwebezustand beim Übergang vom Schwimmen zum Sinken zu treffen. Entfernt dazu falls nötig wieder ein wenig Sand.

b) Bestimmt dann Masse, Volumen und Dichte des Plastikdöschens.

Hinweis zum Volumen:

Das Volumen V könnt ihr mit der Formel
Volumen = Grundfläche · Höhe (V = G · h) berechnen.



II) Reaktionen, bei denen ein Gas (hier Kohlendioxid) entsteht

Material:
1 kl. Plastikflasche mit Loch im Deckel, Plastikwanne, Luftballons, Brausetablette, Backpulver, Zitronensaft/ Essig, Küchenpapier

Aufträge:

a) Zerbrecht eine Brausetablette und steckt sie in einen Luftballon. Füllt dann ein wenig Wasser ein und verknotet den Ballon sofort. Was beobachtet ihr?

b) *Achtung: Führt das folgende Experiment über/ in der Plastikwanne durch.*
Füllt die Plastikflasche mit Wasser und gebt eine zerbrochene Brausetablette dazu. Schraubt den Deckel mit Loch auf und legt die Flasche waagerecht in die Plastikwanne. Was beobachtet ihr?

c) ** Für schnelle Gruppen:*
Untersucht, ob ihr mit einem Luftballon, Backpulver und Zitronensaft ein ähnliches Ergebnis wie in Teil a) erhalten könnt. Versucht eine optimale Mischung zu finden, damit viel Gas entsteht.

III) Löslichkeit von Salz oder Zucker in Wasser

In diesem Versuch arbeitet die eine Hälfte der Gruppen mit Salz und die andere Hälfte mit Zucker.
Hebt unbedingt nach Schritt d) das Becherglas für die spätere Besprechung auf.

Material:
Salz, Zucker, 1 Esslöffel, 1 Rührstab / Rührlöffel, 2 Bechergläser, Waage, Thermometer, Wasserkocher

Aufträge:

a) Füllt 100 ml Wasser in das Becherglas und wiegt das Becherglas mit dem Wasser. Gebt einen Esslöffel Salz/ Zucker hinzu und rührt solange um, bis die Flüssigkeit wieder ganz klar ist.

b) Wiegt das Becherglas erneut (ohne den Rührstab/ Löffel). Was ist mit dem Salz/ Zucker passiert?

c) Gebt einen weiteren Esslöffel Salz/ Zucker hinzu und rührt wieder wie in Teil a) um.

d) Wiederholt den Schritt c) noch zweimal. Was beobachtet ihr?

e) Überlegt, wie man Zucker oder Zuckerwürfel für ein Wiederauftauchboot nutzen könnte.

f) ** Für schnelle Gruppen:*
Untersucht, ob ihr einen Unterschied feststellen könnt, wenn ihr heißes statt kaltes Wasser verwendet. Wiederholt dazu in einem **neuen Becherglas** den Versuch mit heißem Wasser.
***Achtung**: Vorsichtig mit dem heißen Wasser arbeiten, um Verbrennungen zu vermeiden.*
Das Becherglas nicht mit der bloßen Hand dort anfassen, wo es heißes Wasser enthält.

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin/ Lehrer
SuS-V … Schülerversuch Demo-V … Demonstrationsversuch
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit GA … Gruppenarbeit UG … Unterrichtsgespräch
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung und sind für 60 min-Stunden ausgelegt!

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
	Stunde 1	
1. Problemstellung UG 10 min	**Bau eines Wiederauftauchbootes** L stellt das Ziel vor: *Es sollen Tauchboote gebaut werden, die auf den Grund eines Wasserbeckens abtauchen, wenn sie ins Wasser gesetzt werden, und nach einer Minute von selbst wieder auftauchen.* L informiert, dass NaturwissenschaftlerInnen/ Techniker-Innen oft erst mal grundlegenden Fragen finden und beantworten müssen, bevor sie die eigentliche Aufgabe lösen können. Das soll auch hier der erste Schritt sein. L und SuS sammeln Fragen, die geklärt werden müssen, bevor die Tauchboote gebaut werden können, und notieren sie. Dazu gehören u.A. folgende Fragen: Wann schwimmt ein Gegenstand, wann sinkt er? Wie kann man einen Gegenstand, der gesunken ist dazu bringen wieder aufzusteigen und zu schwimmen?	Wasserbecken zeigen Tafel / Heft / L-Unterlagen* * Fragen für die nächste St. notieren!
2. Wiederholung, Vorwissen aktivieren Demo-V 5 min	V 1: SuS machen (per Handzeichen) zu verschiedenen Gegenständen eine Vorhersage, ob diese schwimmen. L überprüft im Demo-V, fragt ggf. bei SuS nach und lobt.	Materialien: Siehe Blatt Experimente
3. Erarbeitung I oder Wiederholung Demo-V 5 min UG mit kurzen Aufg., Ergebnissicherung 15 min	**Regel: Wann schwimmt/ sinkt ein Gegenstand?** V 2: Lehrer variiert Masse (bzw. Volumen) eines Körpers und fragt vor der Überprüfung nach Vorhersagen zum Schwimmverhalten und nach Begründungen der SuS. Dazu muss auch geklärt werden, dass man stets nur eine Eigenschaft verändert darf. Beim gleichzeitigen Ändern mehrerer Eigenschaften weiß man nicht, welche Änderung die Beobachtung verursacht hat. L: Von welchen Größen hängt es ab, ob ein Gegenstand schwimmt? L: Was kann man genauer sagen? SuS treffen anhand des Versuchs 2 Aussagen - ggf. mit Hilfe des Lehrers. Diese werden festhalten. Mögliche Formulierungen finden sich auf dem Lehrerblatt. L führt die Formel der Dichte ein und klärt im UG den Zusammenhang mit Masse und Volumen wie auf dem Lehrerblatt beschrieben.	Materialien: Siehe Blatt Experimente Tafel / Heft
4. Erarbeitung II	**Bei welcher Dichte findet der Übergang vom Schwimmen zum Sinken statt?**	

SuS-V 15 min UG 5 min Aufräumen 5 min	V 3: Versuche mit Filmdöschen und Sand SuS füllen solange immer mehr Sand in ein Döschen, bis es gerade schwebt (oder sehr langsam sinkt) und berechnen dann die Dichte des Döschens. L lobt, beobachtet und gibt bei Bedarf Hilfe zur Selbsthilfe. Ergebnisse mit der Dichte von Wasser (1 g/cm³) vergleichen und Regel notieren. SuS räumen Versuchsmaterialien auf.	Materialien: Siehe Blatt Experimente Tafel / Heft
	Stunde 2	
1. Fragestellung für diese Stunde UG 10 min	L stellt nochmals die Wettbewerbsaufgabe vor – diesmal inkl. der verfügbaren Materialen zum Bau der Boote. SuS fassen die Erkenntnisse von letzten Mal zusammen. **Wie bringt man ein gesunkenes Boot zum Auftauchen?** L stellt die Frage, wie man ein abgetauchtes Boot wieder zum Auftauchen bringen kann. L lenkt das UG falls nötig vorsichtig darauf, wie man das Volumen bzw. die Masse des Boots ändern muss. SuS sammeln Ideen zur automatischen Volumenänderung bzw. Massenänderung. L erinnert ggf. an den Versuch „Brausetablette“ aus Mkid Klasse 6.	Wasserbecken u. Materialien zum Bootsbau (siehe Blatt Experimente)
2. Erarbeitung I SuS-V 10 min UG 10 min	**Veränderungen durch Reaktionen mit Gasentstehung** L stellt Auftrag und Material vor und gibt Hinweise zum vorsichtigen und sicheren Arbeiten V 4: SuS untersuchen Reaktionen mit Gasbildung und ihre Eignung für das Tauchboot SuS stellen im Plenum ihre Ergebnisse vor; Diskussion der Ergebnisse und der möglichen Verwendung für das Boot	Materialien: siehe Blatt Experimente
3. Erarbeitung II SuS-V 10 min UG 5 min	**Masseveränderung durch wasserlöslichen Ballast** L stellt Auftrag und Material vor und gibt Hinweise zum vorsichtigen und sicheren Arbeiten V 5: SuS untersuchen Löslichkeit von Zucker (oder Salz) und Würfelzucker in Wasser SuS stellen im Plenum ihre Ergebnisse vor; Vergleich Zucker – Wasser, Diskussion der Verwendung für das Boot	Materialien: siehe Blatt Experimente
4. Planen für den Wettbewerb GA 15 min	SuS sichten das vorhandene Material genauer, planen eine erste Strategie und beginnen ggf. mit ersten Versuchen/ Baumaßnahmen für ihr Tauchboot. L lobt, beobachtet und gibt bei Bedarf Hilfe zur Selbsthilfe. L erinnert rechtzeitig an das Aufräumen.	Wasserbecken u. Materialien zum Bootsbau (siehe Blatt Experimente)

	Stunde 3	
1. Einstieg UG 5 min	L fragt, welche Ideen helfen können, das Tauchboot nach 1 min wieder auftauchen zu lassen. SuS fassen Erkenntnisse und Ideen der letzten Stunden zusammen. L betont, dass beim Abschlusswettbewerb zählt, bei welchem Boot die Dauer für das Ab- und Wiederauftauchen am nächsten an 1 min liegt und dass rechtzeitig ein Boot für den Wettbewerb fertig sein muss. L erinnert an die Regeln für unsichtiges, ordentliches Arbeiten mit den Materialien.	Wasserbecken u. Materialien zum Bootsbau
2. Projektphase SuS-V 45 min	**Praktische Projektphase I** SuS bauen verschiedene Boot und testen diese. L lobt, beobachtet und gibt ggf. Hilfe zur Selbsthilfe. L achtet auf ordentliches Arbeiten – besonders auf die Vermeidung von Überschwemmungen und ggf. das frühzeitige Reinigen von Tischen und Materialien.	Wasserbecken u. Materialien zum Bootsbau (siehe Blatt Experimente)
3. Abschlussrunde UG 5 min Aufräumen 5 min	L und SuS besprechen verschiedene Ansätze und allgemeine Tipps. SuS räumen auf und reinigen Raum und Material.	
	Stunde 4	
1. Einstieg UG 5 min	L stellt Zeitplan vor und erinnert daran, dass die Boote rechtzeitig fertig sein müssen und Last-Minute-Änderungen daher riskant sind. SuS stellen ggf. Fragen, die im UG besprochen werden.	Wasserbecken u. Materialien zum Bootsbau
2. Projektphase SuS-V 40 min	**Praktische Projektphase II** SuS bauen verschiedene Boot und testen diese. L lobt, beobachtet und gibt ggf. Hilfe zur Selbsthilfe. L achtet auf ordentliches Arbeiten und ggf. auf das umgehende Reinigen von Tischen und Materialien. L prüft den Fortschritt der Gruppen und erinnert an die Frist für ein fertiges Boot für den Wettbewerb.	Wasserbecken u. Materialien zum Bootsbau (siehe Blatt Experimente)
3. Wettbewerb SuS-V 10 min Aufräumen 5 min	SuS und L stellen alle Wasserbecken auf der ersten Teichreihe nebeneinander. SuS setzten auf das Startsignal hin die Boote aufs Wasser. L startet die Stoppuhr und notiert die Auftauchzeiten. L nimmt eine kleine Siegerehrung vor. SuS und L räumen auf und reinigen Raum und Material.	Große Stoppuhr (od. Handy) Wasserbecken Tafel

Lehrerblatt

Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen; und jeder geht zufrieden aus dem Haus. (Goethe)

Die Knobelaufgaben-Sammlung umfasst etwa **100 Aufgaben** (Teilaufgaben sind einzeln gezählt) samt Lösungen und ggf. Kommentaren und Differenzierungsmöglichkeiten.
Der Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe hängt dabei oft nur von einer Nuance in der Aufgabenstellung ab. Man darf den Begriff Knobelaufgabe hier gerne im weiteren Sinn verstehen. Trotzdem haben nicht wenige Aufgaben dieser Sammlung den typischen Knobelaufgaben-Clou.

Die Aufgaben können bei Mkid-Stunden als **Puffer** eingesetzt werden. Man kann auch eigene Knobelaufgaben-Stunden machen.

Der **Zeitbedarf** erstreckt sich mit allen Abstufungen von einer Minute bis zu einer ganzen Stunde, wenn man das ausdehnen möchte.

Manche Aufgabentypen eignen sich für ein kleines **Gewinnspiel**.

Manche Aufgaben eignen sich gut zur **selbständigen Variation** durch die Schülerinnen und Schüler.

Es ist nicht daran gedacht, dass die Lehrperson die Aufgaben gedruckt austeilt, sondern dass die **Aufgaben vorgelesen** und ggf. im Unterrichtsgespräch **erläutert** werden. Ggf. werden wichtige Informationen auf eine geeignete Art dargeboten (Tafel, Visualizer, u.a.).

Bei **schwierigen Aufgaben** ist es schon gut, wenn die Schülerinnen und Schüler
- das Problem erfassen
- sich Gedanken machen
- von der Lehrkraft gesagt bekommen, dass dieses Problem ganz ganz schwierig ist
- selbständig erste Lösungsansätze fassen (loben, loben, loben!)
- mit einem Tipp auf die richtige Lösung kommen
- die Auflösung verstehen und deren intellektuellen Charme erkennen
- erkennen, dass es auch bei aussichtslosen Situationen eine Lösung geben kann

An geeigneten Stellen wird die Lehrperson auf eine der **Problemlöse-Strategien** („Leben ist Problemlösen“ – Carl Popper, Philosoph, 1902-1994) hinweisen:

- mache eine Skizze oder lege eine Tabelle an
- mache ein Beispiel
- probiere systematisch
- teile das Problem in Teilprobleme auf
- betrachte den ungünstigsten Fall
- arbeite alle Fälle der Reihe nach systematisch, sorgfältig und konzentriert ab
- Vorwärtsarbeiten bzw.: kann man etwas Einschränkendes über die Lösung sagen?

Die **Selbsterfahrung der Lehrkraft** ist wichtig beim Knobeln.
Also: nicht immer gleich die Lösung anschauen ☺.
Im Idealfall überträgt sich die Begeisterung der Lehrkraft beim Knobeln auf die Schüler.

Knobelaufgaben-Sammlung

Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen; und jeder geht zufrieden aus dem Haus. (Goethe)

Blechkuchen:

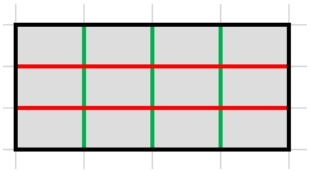
Rebekka hat in einem rechteckigen Blech einen Kuchen gebacken und möchte ihn mit Schnitten längs und quer – jeweils parallel zum Rand – in 12 gleiche Stücke aufteilen. Wie viele Schnitte braucht sie mindestens?
(Bild zur Wiederverwendung gekennzeichnet: https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:Donauwelle_blech_hg.jpg)

Blechkuchen – Lösungen:

Es gibt – bis auf die Vertauschung von „längs“ und „quer“ – drei Möglichkeiten, die Längs- und die Querschnitte müssen jeweils denselben Abstand untereinander und zum Rand haben, die Forderung nach gleichen Stücken ist für den Clou der Aufgabe allerdings unerheblich:

- 0 Längsschnitte, 11 Querschnitte → 11 Schnitte und 12 Stücke
- 1 Längsschnitt, 5 Querschnitte → 6 Schnitte und 12 Stücke
- 2 Längsschnitte, 3 Querschnitte → 5 Schnitte und 12 Stücke

Rebekka kommt mit 5 Schnitten aus, 2 längs und 3 quer (bzw. umgekehrt), vgl. Skizze.



Blechkuchen – Kommentar:

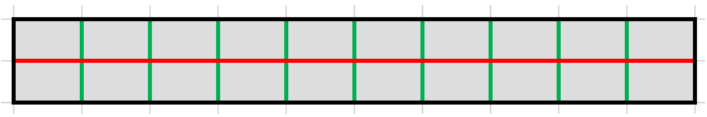
Das ist eine Variante der bekannten Stolperfalle *mit n Schnitten erhält man nicht n, sondern n+1 Teile*.
Es gilt: mit m Längsschnitten und n Querschnitten erhält man $(m+1)\cdot(n+1)$ Stücke.
Zunächst ist nicht unbedingt klar, dass es unterschiedliche Anzahlen von Schnitten gibt, die zu einer bestimmten gleichen Anzahl von Stücken führt bzw. auch umgekehrt, dass eine bestimmte Anzahl von Schnitten zu unterschiedlichen Anzahlen von Stücken führen kann.
Eine Umkehraufgabe: Wie viele Stücke erhält man mit 9 Schnitten höchstens?
Systematisches Probieren ergibt als Maximum 30 Stücke:
9 Längsschnitte und 0 Querschnitte → 10 Stücke
8 Längsschnitte und 1 Querschnitt → 18 Stücke
7 Längsschnitte und 2 Querschnitte → 24 Stücke
6 Längsschnitte und 3 Querschnitte → 28 Stücke
5 Längsschnitte und 4 Querschnitte → 30 Stücke
4 Längsschnitte und 5 Querschnitte → 30 Stücke
3 Längsschnitte und 6 Querschnitte → 28 Stücke usw.
Allgemein – unter uns:
Ist s die Gesamtzahl der Schnitte, also $s = m + n$, so ist die Anzahl der Stücke A_s in Abhängigkeit von m:
$A_s(m) = (m + 1) \cdot (s - m + 1) = -m^2 + s \cdot m + (s + 1)$.
Der Graph von A_s ist (bei vorübergehender kontinuierlicher Sicht für die Variable m, die ja nur natürliche Zahlen annehmen kann) eine nach unten geöffnete Parabel mit der Scheitelstelle $0{,}5\cdot s$. Das Maximum von A_s ist $(0{,}5\cdot s + 1)^2$.
Für gerade s ist $0{,}5\cdot s$ ganzzahlig, das Maximum von A_s liegt daher an der Stelle $0{,}5\cdot s$ und lautet $(0{,}5\cdot s + 1)^2$.
Für ungerades s ist $0{,}5\cdot s$ nicht ganzzahlig, das Maximum wird daher an den beiden benachbarten ganzzahligen Stellen $0{,}5\cdot s - 0{,}5$ und $0{,}5\cdot s + 0{,}5$ angenommen und lautet übereinstimmend $(0{,}5\cdot s + 1)^2 - 0{,}25$.

Blechkuchen – Differenzierung:

Wie muss man schneiden, damit man doppelt so viele Stücke wie Schnitte erhält?

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit betrachten wir im Folgenden – wegen der Möglichkeit der Vertauschung von „längs“ und „quer“ bei gleich bleibender Anzahl von Schnitten und Stücken – nur die Fälle $m \leq n$ und bemühen ein typisches Differenzierungsmuster:
- finde eine Lösung
- finde mehrere Lösungen
- finde alle Lösungen
- begründe, dass es keine weiteren Lösungen geben kann

Ausgehend von a) und b) kann man zu der Vermutung kommen, dass wenn man es bei einem Längsschnitt belässt (m=1), man immer doppelt so viele Stücke wie Schnitte bekommt.
Schülerinnen und Schüler können dies beispielgebunden begründen:
Vorgegeben seien z.B. 10 Schnitte.



1 Längsschnitt erzeugt zwei Reihen,
9 Querschnitte erzeugen in jeder Reihe
10 Stücke. Es sind insgesamt also 20 Stücke.

Entre nous die exakte algebraische Begründung:
Mit m Längsschnitten und n Querschnitten, insgesamt also m+n Schnitten, erhält man (m+1)·(n+1) Stücke. Damit gilt:
$(m+1)\cdot(n+1) = 2\cdot(m+n) \Leftrightarrow m\cdot n + m + n + 1 = 2m + 2n \Leftrightarrow m\cdot n + 1 = m + n \Leftrightarrow m\cdot(n-1) = (n-1)$
Also ist m = 0 und n = 1 (nur 1 Querschnitt) oder m = 1 und n beliebig (ein Längsschnitt und beliebig viele Querschnitte). Für $m \geq 2$ gibt es unter der o.g. Beschränkung $m \leq n$ keine weiteren Lösungen.
Dass es für 2 oder mehr Längsschnitte keine weiteren Lösungen gibt, können Schülerinnen und Schüler wiederum beispielgebunden begründen:
2 Längsschnitte erzeugen drei Reihen, für 2 Querschnitte hat man schon 9 Stücke und bei jedem weiteren Querschnitt kommen noch 3 Stücke dazu.
3 Längsschnitte erzeugen vier Reihen, für 3 Querschnitte hat man schon 16 Stücke und bei jedem weiteren Querschnitt kommen noch 4 Stücke dazu.
4 Längsschnitte erzeugen fünf Reihen, für 4 Querschnitte hat man schon 25 Stücke und bei jedem weiteren Querschnitt kommen noch 5 Stücke dazu. …

Brezel, Brötchen, Hörnchen:
In der Tabelle unten werden die Kosten für je ein Stück der angegebenen Backwaren zeilen- und spaltenweise addiert und rechts und unten angegeben. Was muss für das Fragezeichen eingetragen werden?

Brezel	*Brezel*	*Brezel*	**2,55 €**
Brötchen	*Hörnchen*	*Brötchen*	**2,20 €**
Hörnchen	*Brezel*	*Hörnchen*	**?**
2,40 €	**2,60 €**	**2,40 €**	

(Bild zur Wiederverwendung gekennzeichnet: https://pixabay.com/de/photos/br%C3%B6tchen-brezel-backwaren-nahrung-2545124/)

Brezel, Brötchen, Hörnchen – Lösung:
Für das Fragezeichen muss 2,65 € stehen. Hier werden drei Lösungen vorgestellt.
1. Lösung „zu Fuß“:
Aus der ersten Zeile kann man erschließen, dass eine Brezel 0,85 € kostet. Setzt man diesen Wert in der dritten Zeile in der Mitte ein, so kann man erschließen, dass ein Hörnchen 0,90 € kostet und die jetzt bekannten Beträge in der dritten Zeile aufaddieren.
2. Lösung „elegant“:
Addiert man alle drei Spalten, so erkennt man, dass vier Brezeln, drei Hörnchen und zwei Brötchen zusammen 2,40 € + 2,60 € + 2,40 € = 7,40 € kosten.

Addiert man zeilenweise, so muss sich für die vier Brezeln, drei Hörnchen und zwei Brötchen zusammen ebenfalls 7,40 € ergeben. 2,55 € + 2,20 € + ? = 7,40 € führt zum gesuchten Betrag von 2,65 €.
3. Lösung „verzwickt“:
Aus der ersten Zeile kann man erschließen, dass eine Brezel 0,85 € kostet. Aus dem Vergleich der ersten und zweiten Spalte lässt sich erkennen, dass ein Brötchen 0,20 € weniger kostet als eine Brezel, also 0,65 €. Aus der zweiten Zeile folgt, dass ein Hörnchen 0,90 € kostet. Mit den Einzelpreisen kann man den gesuchten Betrag ausrechnen.

Brezel, Brötchen, Hörnchen – Kommentar:
Keinesfalls ist daran gedacht, ein lineares Gleichungssystem aufzustellen und zu lösen.
Nebenbei: die Angabe der Summe 2,40 € für die erste und die dritte Spalte ist verzichtbar.

Drei Ziffern ergeben 6:
Ein Zahlterm mit dreimal derselben Ziffer und den Grundrechenarten (+ | – | · | :) soll den Wert 6 haben. Zum Beispiel – dreimal die Ziffer 2: 2 + 2 + 2 = 6.
Finde möglichst viele weitere Beispiele.

Drei Ziffern ergeben 6 – Lösungen:

- 2 + 2 + 2 = 6
- 2 · 2 + 2 = 6
- 3 · 3 – 3 = 6
- 5 + 5 : 5 = 6
- 6 · 6 : 6 = 6
- 6 – 6 + 6 = 6
- 7 – 7 : 7 = 6

Drei Ziffern ergeben 6 – Kommentar:
Man kann darauf hinweisen, dass es zu einer Ziffer mehrere Lösungen geben kann.
Man kann ebenfalls darauf hinweisen, dass die Regel *Punkt vor Strich* gilt, sowie die Konvention, bei ausschließlich vorkommenden Strich- oder Punktoperationen diese von links nach rechts abzuarbeiten.
Ob man zum Beispiel 2 · 2 + 2 und 2 + 2 · 2 als verschiedene Lösungen begreifen soll, ist Geschmacksache
Die Aufgabe ist mit der Anzahl der gefundenen Lösungen selbstdifferenzierend.
Der lückenlose Nachweis, dass die Lösungsliste oben erschöpfend ist, gestaltet sich mühsam.
Letztlich muss man eben alle 10 · 4 · 4 = 160 Zeichenketten der Form *Ziffer* | *Zeichen* | *Ziffer* | *Zeichen* | *Ziffer* betrachten.

Ziffer:	7				Ergebnis:
7	+	7	+	7	21
7	+	7	-	7	7
7	+	7	*	7	56
7	+	7	/	7	8
7	-	7	+	7	7
7	-	7	-	7	-7
7	-	7	*	7	-42
7	-	7	/	7	6
7	*	7	+	7	56
7	*	7	-	7	42
7	*	7	*	7	343
7	*	7	/	7	7
7	/	7	+	7	8
7	/	7	-	7	-6
7	/	7	*	7	7
7	/	7	/	7	0,142857

Endziffern:
Für das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen 1 · 2 · 3 · … · n kann man abkürzend schreiben n! (lies „n Fakultät“). Zum Beispiel ist 4! = 1 · 2 · 3 · 4 = 24.
Welche Endziffer hat 1! + 2! + 3! + … + 100! ?

Endziffern – Lösung:

Es ist 1! = 1; 2! = 2; 3! = 6; 4! = 24.
Alle weiteren Fakultäten haben die Endziffer 0, da immer die Faktoren 2 und 5 vorkommen.
5! = 1·2·3·4·5 = 1·3·4·(2·5) = 1·3·4·10 = …0
1! + 2! + 3! + … + 100! hat also die Endziffer 3, vgl. Rechnung rechts.
Der Clou der Aufgabe ist, dass nur die ersten vier Fakultäten zur Endziffer etwas beitragen.

```
1! = 1 =                    1
2! = 1·2 =                  2
3! = 1·2·3 =                6
4! = 1·2·3·4 =             24
5! = 1·2·3·4·5 =          120
6! = 1·2·3·4·5·6 =        720
7! = 1·2·3·4·5·6·7 = ...0
...                   ....0
                     ------
                     .....3
```

Endziffern – Kommentar:

Wenn man möchte, kann man sich auch die beiden letzten Ziffern überlegen.
Es ist 1! = 1; 2! = 2; 3! = 6; 4! = 24; 5! = 120, 6! = 720; 7! = 5040; 8! = 40320; 9! = 362880.
Alle weiteren Fakultäten haben die Endziffern 00, da immer die Faktoren 2; 5 und 10 vorkommen.
10! = 1·2·3·4·5·6·7·8·9·10
= 1·3·4·6·7·8·9·(2·5·10)
= 1·3·4·6·7·8·9·100
= …00

```
1! = 1 =                                    1
2! = 1·2 =                                  2
3! = 1·2·3 =                                6
4! = 1·2·3·4 =                             24
5! = 1·2·3·4·5 =                          120
6! = 1·2·3·4·5·6 =                        720
7! = 1·2·3·4·5·6·7 =                     5040
8! = 1·2·3·4·5·6·7·8 =                  40320
9! = 1·2·3·4·5·6·7·8·9 =               362880
10!= 1·2·3·4·5·6·7·8·9·10 =           3628800
11!= 1·2·3·4·5·6·7·8·9·10·11 =       39916800
...                                 .......00
                                   ---------
                                   ........13
```

Es würde auch genügen, jeweils nur die beiden letzten Ziffern auszurechnen:
Zum Beispiel: 8! = 7! · 8 = …40 · 8 = …20.
1! + 2! + 3! + … + 100! hat also die Endziffern 13, vgl. Rechnung.

Wie sieht es mit den letzten drei Ziffern aus?
Ab 15! lauten die letzten drei Ziffern 000, da die Faktoren 4; 5; 10 und 15 vorkommen.
15! = 1·2·3·4·5·6·7·8·9·10·11·12·13·14·15
= 1·2·3·6·7·8·9·11·12·13·14·(4·5·10·15)
= 1·2·3·6·7·8·9·11·12·13·14·3000
= 1·2·3·6·7·8·9·11·12·13·14·3·1000
= …000
Es würde auch genügen, jeweils nur die letzten drei Ziffern auszurechnen.
Zum Beispiel:
8! = 7! · 8 = …040 · 8 = …320;
9! = 8! · 9 = …320 · 9 = …880;
10! = 9! · 10 = …880 · 10 = …800.
1! + 2! + 3! + … + 100! hat die Endziffern 313, vgl. Rechnung.

```
1! = 1 =                                                  1
2! = 1·2 =                                                2
3! = 1·2·3 =                                              6
4! = 1·2·3·4 =                                           24
5! = 1·2·3·4·5 =                                        120
6! = 1·2·3·4·5·6 =                                      720
7! = 1·2·3·4·5·6·7 =                                   5040
8! = 1·2·3·4·5·6·7·8 =                                40320
9! = 1·2·3·4·5·6·7·8·9 =                             362880
10!= 1·2·3·4·5·6·7·8·9·10 =                         3628800
11!= 1·2·3·4·5·6·7·8·9·10·11 =                     39916800
12!= 1·2·3·4·5·6·7·8·9·10·11·12 =                 479001600
13!= 1·2·3·4·5·6·7·8·9·10·11·12·13 =             6227020800
14!= 1·2·3·4·5·6·7·8·9·10·11·12·13·14 =         87178291200
15!= 1·2·3·4·5·6·7·8·9·10·11·12·13·14·15 = ........000
16!= 1·2·3·4·5·6·7·8·9·10·11·12·13·14·15·16 = .....000
...                                        .........000
                                          ------------
                                          ..........313
```

Fünf Zweien:

Ein Zahlterm soll mit fünfmal der Ziffer 2 und den Grundrechenarten (+ | – | · | :) aufgebaut werden.
Finde möglichst viele Ergebnisse zwischen 0 und 10.

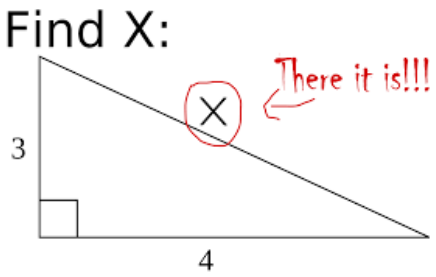
Fünf Zweien – Lösungen:

- 2 – 2 : 2 – 2 : 2 = 0 2 : 2 + 2 : 2 – 2 = 0
- 2 + 2 – 2 – 2 : 2 = 1 2 · 2 – 2 – 2 : 2 = 1 2 – 2 · 2 : 2 : 2 = 1 2 · 2 : 2 – 2 : 2 = 1
- 2 + 2 + 2 – 2 – 2 = 2 2 + 2 : 2 – 2 : 2 = 2 2 · 2 · 2 : 2 : 2 = 2 2 · 2 · 2 : 2 – 2 = 2

- $2 + 2 - 2 + 2 : 2 = 3$ $2 \cdot 2 - 2 + 2 : 2 = 3$ $2 + 2 \cdot 2 : 2 : 2 = 3$
- $2 + 2 : 2 + 2 : 2 = 4$ $2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 4$ $2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 - 2 = 4$
- $2 + 2 + 2 - 2 : 2 = 5$ $2 \cdot 2 + 2 - 2 : 2 = 5$
- $2 + 2 + 2 + 2 - 2 = 6$ $2 + 2 + 2 \cdot 2 - 2 = 6$ $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 - 2 = 6$ $2 \cdot 2 \cdot 2 : 2 + 2 = 6$
- $2 + 2 + 2 + 2 : 2 = 7$ $2 \cdot 2 + 2 + 2 : 2 = 7$ $2 \cdot 2 \cdot 2 - 2 : 2 = 7$
- $2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 - 2 = 8$ $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 : 2 = 8$
- $2 \cdot 2 \cdot 2 + 2 : 2 = 9$
- $2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 10$ $2 \cdot 2 + 2 + 2 + 2 = 10$ $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2 = 10$

Fünf Zweien – Kommentar:
Man kann darauf hinweisen, dass es zu einem Ergebnis mehrere Lösungen geben kann.
Man kann ebenfalls darauf hinweisen, dass die Regel *Punkt vor Strich* gilt, sowie die Konvention, bei ausschließlich vorkommenden Strich- oder Punktoperationen diese von links nach rechts abzuarbeiten.
Ob man zum Beispiel $2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 2$ und $2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 2$ als verschiedene Lösungen begreift, ist Geschmackssache.
Die Aufgabe ist mit der Anzahl der gefundenen Lösungen selbstdifferenzierend.

Gleichungen:
Bestimme x.
a) $x : x + x = 50$
b) $(x - x) + (x + x) = 50$
c) $(x \cdot x) : x = 50$
d) $(x + x) : x + x = 50$
e) $(x + x) \cdot x = 50$
(Bild zur Wiederverwendung gekennzeichnet: https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/ec/FoundX.svg)



Gleichungen – Lösungen:
a) Wegen $x : x = 1$ für alle $x \neq 0$ ist $x = 49$
b) Wegen $x - x = 0$ für alle x ist $x = 25$.
c) Wegen $(x \cdot x) : x = x$ für alle $x \neq 0$ ist $x = 50$.
d) Wegen $(x + x) : x = 2$ für alle $x \neq 0$ ist $x = 48$.
e) Mit der Termumformung $(x + x) \cdot x = 2x \cdot x = 2 \cdot x^2$ kommt man zu $x = 5$ oder auch zu $x = -5$.
Auch geschicktes Probieren hilft weiter:
$(x + x) \cdot x$ ist für $x > 0$ offensichtlich streng monoton wachsend, probiert man der Reihe nach $x = 1$, $x = 2$ usw. kommt man ebenfalls zu $x = 5$.
$(x + x) \cdot x$ ist für $x < 0$ offensichtlich streng monoton fallend, probiert man der Reihe nach $x = -1$, $x = -2$ usw. kommt man ebenfalls zu $x = -5$.

Gleichungen – Kommentar:
Es ist nicht an die Verwendung von Äquivalenzumformungen gedacht, auch wenn diese den Schülerinnen und Schülern ggf. in Ansätzen schon bekannt sein sollte.
Die Abkehr vom Abspulen fertiger Algorithmen und die Hinwendung zum „Direkterkennen“ von Lösungen bei sich bietender Gelegenheit ist eine wichtige Intention.

Gleichungen – Differenzierung:
Etwas anspruchsvoller ist die Verwendung von zwei Variablen x und y mit $x > y$.
Es sollen nur natürliche Zahlen als Lösungen zugelassen sein:
$(x + y) \cdot (x - y) = 40$.
Wir bemühen wieder ein typisches Differenzierungsmuster:
- finde eine Lösung

- finde mehrere Lösungen
- finde alle Lösungen
- begründe, dass es keine weiteren Lösungen geben kann

Der Schlüssel zu dieser Knobelaufgabe liegt nicht bei der – den Schülerinnen und Schülern wohl noch unbekannten – Anwendung der 3. Binomischen Formel $(x + y) \cdot (x – y) = x^2 – y^2$ und daraus folgernd der Suche nach zwei Quadratzahlen mit der Differenz 40.
Sie liegt vielmehr in dem Ansatz, die Zahl 40 als Produkt zweier Faktoren darzustellen. x muss dann der Mittelwert der beiden Faktoren sein.

- $(x + y) \cdot (x – y) = 10 \cdot 4$, der Mittelwert von 10 und 4 ist 7, beim 1. Faktor wird zu diesem Mittelwert 3 addiert, beim 2. Faktor wird hiervon 3 subtrahiert.
  Eine Lösung ist x = 10 und y = 3.
- $(x + y) \cdot (x – y) = 20 \cdot 2$, der Mittelwert von 20 und 2 ist 11, beim 1. Faktor wird zu diesem Mittelwert 9 addiert, beim 2. Faktor wird hiervon 9 subtrahiert.
  Eine weitere Lösung ist also x = 11 und y = 9.
- Die Faktorisierungen $40 \cdot 1$ mit dem Mittelwert 20,5 und $8 \cdot 5$ mit dem Mittelwert 6,5 führen zu keinen weiteren natürlichen Lösungszahlen, Faktorisierungen mit nicht-natürlichen Faktoren wie zum Beispiel $12,5 \cdot 3,2$ auch nicht.

Neidfreies Teilen:

Trick und Track haben eine vielfältig belegte Pizza und möchten sie so aufteilen, dass auf keinen Fall einer von den beiden hinterher auf den andern neidisch ist.
So geht das jedenfalls nicht: Trick schneidet sich ein Stück ab und nimmt es. Selbst wenn die beiden Stücke gleich groß sind, könnte eines der beiden „belagstechnisch“ attraktiver sein.
(Bild zur Wiederverwendung gekennzeichnet: https://pixnio.com/de/essen-trinken/pizza-de/gemuese-italienische-kueche-pizza-restaurant-abendessen-essen-mittagessen-mahlzeit

Neidfreies Teilen – Lösung:
Einer der beiden teilt die Pizza, der andere darf eines der beiden Stücke aussuchen.
Derjenige der teilt, wird sehr darauf achten, dass beide Stücke für ihn gleichermaßen akzeptabel sind.

Passend bezahlen:
Klaus möchte einen Satz Euromünzen zusammenstellen, mit denen er alle 100 Beträge von 1 Cent bis 1 Euro passend bezahlen kann. Zur Verfügung stehen die folgenden Münzen:
1 Cent, 2 Cent, 5 Cent, 10 Cent, 20 Cent, 50 Cent, 1 Euro.
Klaus möchte möglichst wenig Münzen mitnehmen. Wie könnte der Satz aussehen?

Passend bezahlen – Lösungen:
Lösung 1 – acht Münzen:

1 Cent	2 Cent	5 Cent	10 Cent	20 Cent	50 Cent	1 Euro
1 mal	2 mal	1 mal	1 mal	2 mal	1 mal	0 mal

Lösung 2 – acht Münzen:

1 Cent	2 Cent	5 Cent	10 Cent	20 Cent	50 Cent	1 Euro
1 mal	2 mal	1 mal	2 mal	1 mal	1 mal	0 mal

Lösung 3 – neun Münzen:

1 Cent	2 Cent	5 Cent	10 Cent	20 Cent	50 Cent	1 Euro
2 mal	1 mal	1 mal	2 mal	1 mal	1 mal	1 mal

Passend bezahlen – Kommentar:
Der Clou der Aufgabe ist, dass man keine 1 Euro Münze braucht.
Wenn Klaus möglichst wenig Münzen und gleichzeitig möglichst wenig Geld mitnehmen möchte, ist die Lösung 2 optimal. Hier ist der Gesamtbetrag genau 100 Cent.

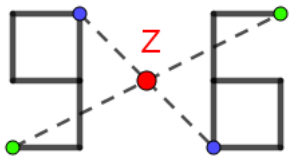
PIN:
Laura möchte am Bankautomaten 100 € abheben, hat aber die vierstellige PIN ihrer Bankkarte vergessen.
Sie weiß immerhin, dass die Summe der vier Ziffern der PIN 34 ergibt und dass, wenn sie die zweite Ziffer von der ersten subtrahiert, die dritte Ziffer zum Ergebnis addiert und die vierte von diesem Ergebnis wieder subtrahiert, sich die Zahl 2 ergibt.

(Bild zur Wiederverwendung gekennzeichnet: https://freesvg.org/100euroschein)

Der Bankautomat akzeptiert nur drei Versuche, wird die PIN dreimal falsch eingegeben, so wird die Karte eingezogen.
Wird Laura mit den Informationen über ihre PIN sicher zu ihren 100 € kommen, ohne dass die Karte eingezogen wird?

PIN – Lösung:
Die Summe der vier Ziffern soll 34 sein, für die vier Ziffern gibt es nur zwei Möglichkeiten:
1. Zweimal die 8 und zweimal die 9. Wegen der zweiten Bedingung bleibt als mögliche PIN nur 9898 übrig, denn 9 – 8 + 9 – 8 = 2, alle anderen fünf Reihungen scheiden aus.
2. Einmal die 7 und dreimal die 9. Wegen der zweiten Bedingung bleiben als mögliche PIN nur 9799 oder 9997 übrig, denn 9 – 7 + 9 – 9 = 2 und 9 – 9 + 9 – 7 = 2, die anderen beiden Reihungen scheiden aus.
Insgesamt gibt es also drei mögliche PIN, nämlich 9898; 9799 oder 9997. Laura kommt spätestens im dritten Versuch an ihr Geld.

Punktsymmetrische Jahreszahlen:
Die Jahreszahl I96I ist als Schreibfigur punktsymmetrisch, wenn man die „1“ als Strich schreibt, also so: „I“.
Als punktsymmetrisch sollen hier die folgenden Ziffernpaare gelten: 00, II, 69, 96, 88.
Schreibe alle punktsymmetrischen Jahreszahlen zwischen I00I und 9966 auf.

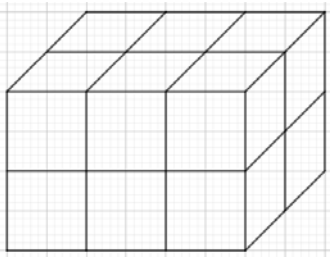


Punktsymmetrische Jahreszahlen – Lösung:
I00I, IIII, I69I, I88I, I96I, 6009, 6II9, 6699, 6889, 6969, 8008, 8II8, 8698, 8888, 8968, 9006, 9II6, 9696, 9886, 9966

Punktsymmetrische Jahreszahlen – Kommentar:
Natürlich kann man zunächst auch zuerst erfragen, welche der Ziffern überhaupt verwendbar sind, wenn man die Sache mit der „1“ geklärt hat.
Die lückenlose Aufzählung gelingt besser, wenn man sich klar macht, dass durch die Angabe der ersten beiden Ziffer und die Symmetriebedingung die Jahreszahl vollständig bestimmt ist.
Man kann die Ziffern 0, I, 6, 8 und 9 verwenden und schreibt die Ziffernpaare der Größe nach auf:
I0, II; I6; I8, I9, 60, 6I, 66, 68; 69, 80, 8I, 86, 88, 89, 90, 9I, 96, 98, 99.
Die Frage nach diesem Sachverhalt wäre ein geeigneter Differenzierungsanlass.

Quader:
Marc hat 12 gleiche Würfel. Er möchte sie zu einem Quader zusammenlegen. Wie viele unterschiedliche solche Quader gibt es?
Beschreibe die Quader in der Form *Länge x Breite x Höhe* und beachte dabei, dass zum Beispiel der Quader mit 1 x 3 x 4 derselbe ist wie der Quader mit 3 x 4 x 1 oder 4 x 1 x 3. Wir einigen uns also zum Beispiel auf eine „Norm-"Beschreibung, bei der die drei Zahlen von links nach rechts „absteigen".

Quader - Lösungen:
Es gibt vier solche Quader:
12 x 1 x 1
6 x 2 x 1
4 x 3 x 1
3 x 2 x 2 (Skizze rechts: eine Reihe hat 3 Würfel, es gibt 2 Reihen pro Schicht und 2 Schichten)



Quader - Kommentar:
Zunächst ist das eine Art „Kopfgeometrie", man muss sich das Zusammenlegen der Würfel gedanklich vorstellen. Dazu ist es vielleicht günstig, anstelle von *Länge x Breite x Höhe* zu sprechen von *Anzahl der Würfel in einer Reihe x Anzahl der Reihen pro Schicht x Anzahl der Schichten*.
Formal: Man muss die Zahl 12 in drei Faktoren zerlegen, den Faktor 1 dabei nicht vergessen (!) und systematisch vorgehen, damit man keinen Fall auslässt.
Man kann zum Beispiel für die Anzahl der Würfel in einer Reihe die Teiler t der Zahl 12 der Reihe nach absteigend – unter Berücksichtigung der „Norm-"Beschreibung – betrachten, t = 12; 6; 4; 3; 2; 1.
Für die Anzahl der Reihen wird man dann entsprechend verfahren bezüglich des Quotienten 12 : t.

Quader – Differenzierung:
Die Schwierigkeit bzw. Komplexität dieser Aufgabenstellung ist abhängig von der Anzahl der zur Verfügung gestellten Würfel.
Auch hier greift das typisches Differenzierungsmuster:
a) finde eine Lösung
b) finde mehrere Lösungen
c) finde alle Lösungen
d) begründe, dass es keine weiteren Lösungen geben kann
Schwieriger: Hat man 24 Würfel gibt es 6 Lösungen:
24 x 1 x 1 | 12 x 2 x 1 | 8 x 3 x 1 | 6 x 4 x 1 | 6 x 2 x 2 | 4 x 3 x 2
Noch schwieriger: Hat man dagegen 48 Würfel gibt es 9 Lösungen:
48 x 1 x 1 | 24 x 2 x 1 | 16 x 3 x 1 | 12 x 4 x 1 | 12 x 2 x 2
8 x 6 x 1 | 8 x 3 x 2 | 6 x 4 x 2 | 4 x 4 x 3
Nebenbei: Lässt sich die Anzahl der Teiler einer Zahl berechnen?
Ja, hier am Beispiel der Zahl 48 mit der Primfaktorenzerlegung $2^4 \cdot 3^1$:
Die Teiler der 48 sind also Zahlen der Form $2^m \cdot 3^n$, für m kommt in Frage 0; 1; 2; 3 oder 4, das sind 5 Möglichkeiten, für n kommt in Frage 0 oder 1, das sind 2 Möglichkeiten.
Es gibt insgesamt also $5 \cdot 2 = 10$ Möglichkeiten, damit gibt es 10 Teiler.
Probe: n = 0 und m aufsteigend ergibt die Teiler 1; 2; 4; 8; 16;
n = 1 und m aufsteigend ergibt die Teiler 3; 6; 12; 24; 48.
Weitere interessante Fragen mit obigem Differenzierungsmuster:

- Für welche Anzahlen von Würfeln gibt es nur einen einzigen Quader?
  Antwort: nur für Primzahlen.
- Für welche Anzahlen von Würfeln gibt es genau zwei Quader?
  Antwort: nur für Produkte aus zwei Primzahlen, die beiden müssen nicht notwendigerweise unterschiedlich sein.

- Für welche Anzahlen von Würfeln gibt es genau drei Quader?
  Antwort: nur für die dritten Potenzen von Primzahlen wie $2^3 = 8$ oder $3^3 = 27$.
  Beweis – entre nous:
  a) Die Anzahl der Würfel sei p^3 (p Primzahl).
  Dann gibt es genau drei Quader, nämlich p^3 x 1 x 1 | p^2 x p x 1 | p x p x p.
  b) Die Anzahl der Quader sei drei. Wegen der Antworten auf die ersten beiden Fragen, s.o., muss die Anzahl der Würfel ein Produkt von mindestens drei Primzahlen sein.
  Die Anzahl der Würfel sei das Produkt von den drei Primzahlen p, q und r (nicht notwendigerweise verschieden und $2 \le p \le q \le r$), also $p \cdot q \cdot r$.
  Dann gibt es die nicht notwendigerweise unterschiedlichen Quader
  Q1: p·q·r x 1 x 1; Q2: p·q x r x 1 bzw. r x p·q x 1; Q3: p·r x q x 1, Q4: q·r x p x 1; Q5: r x q x p.
  Soll die Anzahl der Quader drei sein, müssen einige der Quader Q1 bis Q5 gleich sein.
  Q1 ist sicher von Q2 bis Q5 verschieden. Ebenso ist Q5 verschieden von Q1 bis Q4.
  Also muss gelten Q2 = Q3 = Q4. Das ist aber nur für p = q = r möglich. Damit ist die Anzahl der Würfel p^3.
  Wenn die Anzahl der Würfel das Produkt von mehr als drei Primzahlen ist, dann gibt es nach den vorangegangenen Betrachtungen sicher mehr als drei Quader.

Reiche Zahlen:
Wir betrachten eine natürliche Zahl n, bestimmen alle ihre Teiler und bilden anschließend deren Summe, wobei wir die Zahl n selbst nicht mitaddieren. Diese Summe aller Teiler von n, ausgenommen der Zahl n selbst, nennen wir hier die *Teilersumme* von n.
Beispiel n = 20; die Teilersumme von 20 ist 1 + 2 + 4 + 5 + 10 = 22.
Wir nennen eine Zahl n *reich*, wenn ihre Teilersumme größer als die Zahl selbst ist.
20 ist also eine reiche Zahl. Die Teilersumme der Zahl 20, nämlich 22, ist um 2 größer als 20, man könnte auch sagen, sie ist um 10% größer.
a) Finde weitere reiche Zahlen.

Wir nennen eine Zahl *superreich*, wenn ihre Teilersumme um mindestens 50% größer ist als die Zahl selbst.
Beispiel n = 36: die Teilersumme von 36 ist 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 9 + 12 + 18 = 55.
Die Zahl 55 ist um 19 größer als 36, das sind mehr als 50% von 36. Die Zahl 36 ist also eine superreiche Zahl.
b) Finde weitere superreiche Zahlen.

Reiche Zahlen – Lösungen:

Zahl n:	Teilersumme von n:	Überschuss:	in %:	Qualität:
12	16	4	33%	reich
18	21	3	17%	reich
20	22	2	10%	reich
24	36	12	50%	superreich
30	42	12	40%	reich
36	55	19	53%	superreich
40	50	10	25%	reich
42	54	12	29%	reich
48	76	28	58%	superreich
54	66	12	22%	reich
56	64	8	14%	reich
60	108	48	80%	superreich
66	78	12	18%	reich

70	74	4	6%	reich
72	123	51	71%	superreich
78	90	12	15%	reich
80	106	26	33%	reich
84	140	56	67%	superreich
88	92	4	5%	reich
90	144	54	60%	superreich
96	156	60	63%	superreich
100	117	17	17%	reich

Reiche Zahlen – Kommentar:
Es geht bei dieser Knobelaufgabe darum, beim Probieren zu erkennen, dass die Kandidaten für den „Reichtum“ oder gar „Superreichtum“ Zahlen sind, die viele Teiler haben bzw. deren Primfaktorenzerlegung aus vielen Faktoren besteht. Eine einfache Formel, die über „Reichtum“ oder „Nicht-Reichtum“ entscheidet, gibt es nicht.
Primzahlen sind ganz „arm“, ihre Teilersumme ist gleich 1.

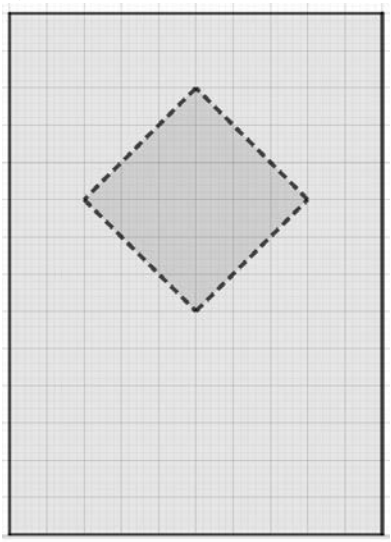
Es gilt der Satz: Wenn eine Zahl reich ist, ist auch ihr Doppeltes reich.
Beweis: Wir bezeichnen mit T(n) die Teilersumme von n.
Unter den Teilern von 2n finden sich auf jeden Fall die Teiler von n und auch die Zahl n selbst.
Also ist $T(2n) \geq T(n) + n$ und wegen der Voraussetzung $T(n) > n$ ist $T(n) + n > 2n$.
Insgesamt ist also $T(2n) > 2n$.

Eine Differenzierung ist über die Anzahl der gefundenen Beispiele möglich. Als Teilaufgabe c) und d) wären denkbar:
c) Von den natürlichen Zahlen von 1 bis 100: Welches ist die „reichste“ Zahl?
Das heißt: Bei welcher Zahl ist der prozentuale Überschuss am größten?
Lösung: vgl. Tabelle, von den Zahlen von 1 bis 100 ist die Zahl 60 am „reichsten“.
d) Welches ist die kleinste Zahl, deren Teilersumme mindestens doppelt so groß ist wie die Zahl selbst?
Lösung: die Teilersumme von $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ ist:
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 10 + 12 + 15 + 20 + 24 + 30 + 40 + 60 = 240$.

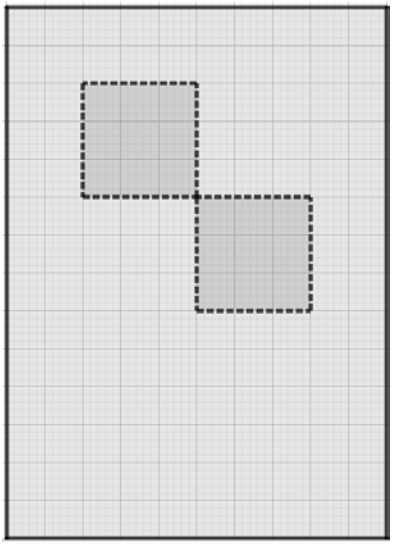
Nebenbei: Eine Zahl deren Teilersumme gleich der Zahl selbst ist nennt man *vollkommen*.
Die ersten drei vollkommenen Zahlen sind: 6; 28 und 496.

Scherenschnitte:
Nimm ein DIN-A-5Blatt und falte es mehrfach so, dass du mit einem einzigen geraden Schnitt den gezeigten Scherenschnitt erhältst.

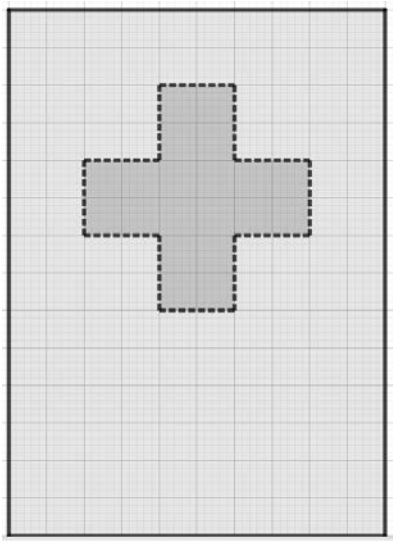
a)



b)

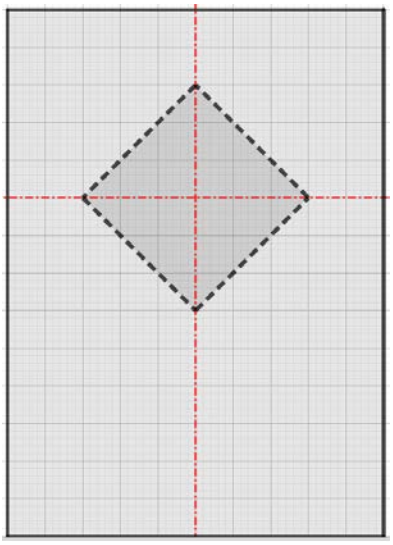


c)

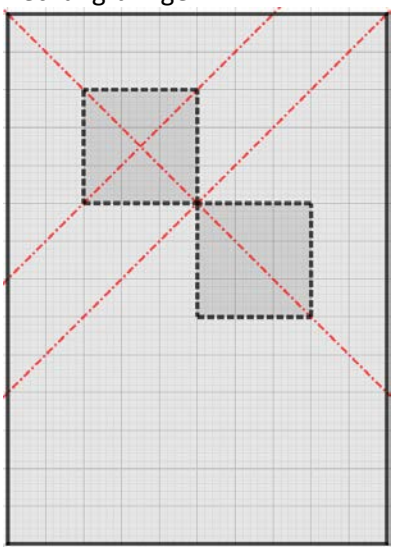


Scherenschnitte – Lösungen:
Faltlinie … Strich-Punkt in Rot, Schnittlinie … eine der schwarz gestrichelten Strecken – je nach Faltung

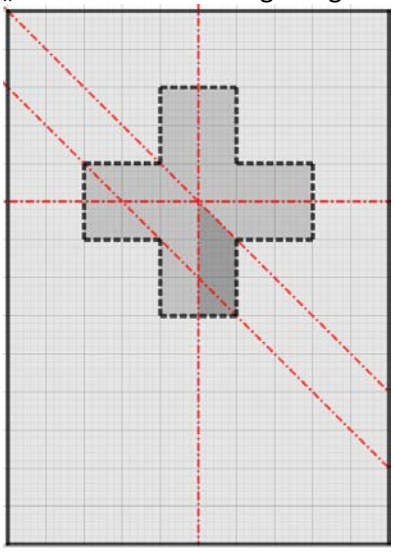
a) Reihenfolge der beiden Faltungen: beliebig



b) Reihenfolge der Faltungen: Zuerst die beiden Quadrate zur Deckung bringen

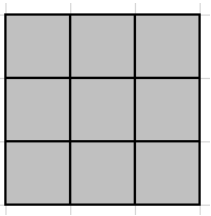


c) Reihenfolge der Faltungen: Zuerst die acht Trapeze des „Kreuzes“ zur Deckung bringen



Scherenschnitte – Kommentar:
Differenzierung: a) ist einfach b) ist mittelschwierig c) ist ganz schwierig
Es empfiehlt sich, die Figuren auf ein DIN-A-5-Blatt aufzuzeichnen und dann so zu falten, dass die Restfigur jeweils noch sichtbar ist.
Wenn man in der Aufgabe c) die acht Trapeze zur Deckung gebracht hat, könnte irritieren, dass beim Umklappen der Ecke das gefaltete Papier entlang der Schnittlinie nicht überall gleich dick ist.

Schokoladentafel:
Scholastika hat eine kleine Schokoladentafel mit neun Stücken (vgl. Bild rechts) und möchte diese „vollständig“ in die neun Einzelstücke zerbrechen.
Sie möchte dabei möglichst wenig Brechungen durchführen.
Wie oft muss sie mindestens brechen?



Schokoladentafel – Lösung:
Durch Ausprobieren kommt man zu der Vermutung:
Wie man es auch immer anstellt, man muss immer genau acht mal brechen. Das ist eigentlich erstaunlich. Beim Blechkuchen konnte man mit unterschiedlichen Anzahlen von Schnitten zu einer vorgegebenen Stückzahl gelangen. Das heißt, man muss eben – ohne sich weitere Gedanken über eine möglicherweise geschickte Auswahl von Bruchstellen zu machen – solange brechen, bis man die neun Einzelstücke hat.
Warum ist das so?
Eine mögliche Erklärung: Zunächst hat man ein Teil. Durch eine Brechung hat man zwei Teile, durch eine weitere Brechung drei Teile. Nach jeder Brechung hat man ein Teil mehr und zwar unabhängig von der Größe und Form der Teile. Neun Einzelstücke sind neun Teile, man muss also genau achtmal brechen.
Diese Überlegung führt direkt zur folgenden Verallgemeinerung:
Um eine rechteckige Schokoladentafel mit n Einzelstücken in diese zu zerteilen braucht man n – 1 Brechungen.

Schule – nur an 2 Tagen im Jahr 2020:
Eigentlich findet im Jahr 2020 nur an zwei Tagen Schule statt. Dies wird hier einmal vorgerechnet:

Das Schaltjahr 2020 hat 366 Tage, wenn man pro Tag etwa 8 Stunden schläft, kann man schon einmal 366 : 3 = 122 Tage abziehen. Bleiben 244 Tage übrig. Pro Tag hat man etwa 4 Stunden Freizeit, also noch einmal 366 : 6 = 61 Tage abziehen. Bleiben 183 Tage übrig. Samstag und Sonntag findet keine Schule statt, das sind bei 52 Wochen 2 · 52 = 104 Tage. Zieht man diese ab, bleiben 79 Tage übrig. 11 Wochen sind Ferien, also noch einmal 11 · 7 = 77 Tage abziehen. Bleiben genau zwei Tage für Schule übrig.
Wo steckt der Fehler in dieser Rechnung?

```
Schaltjahr  366 Tage
Schlaf     -122 Tage
Freizeit    -61 Tage
Wochenende -104 Tage
Ferien      -77 Tage
_____________________

            = 2 Tage
```

Schule – nur an 2 Tagen im Jahr 2020 – Lösung:
Vieles wird mehrfach abgezogen.
Zum Beispiel wird ein Feriensonntag 2,5-mal abgezogen: 1-mal für Sonntag, 1-mal für Ferien, 0,5-mal für Schlafen und Freizeit.
Schülerinnen und Schüler fragen dann gerne: Und wie würde man richtig rechnen?
366 Tage abzüglich Wochenenden (= 2 · 52 = 104 Tage) und abzüglich der Ferien-Werktage (= 11 · 5 = 55 Tage) ergibt 207 Schultage. Feiertage und bewegliche Ferientage werden hier vernachlässigt.
Rechnet man realistischerweise 8 Stunden Schlaf, 4 Stunden Freizeit und 4 Stunden Sonstiges, zusammen also 16 Stunden, bleibt ein Drittel Tag für die (Ganztages-)Schule.
Man erhält also 207 : 3 = 69 Schultage, jetzt aber zu jeweils 24 Stunden (!).

Sieben Ziffern:
Zur Verfügung stehen die sieben Ziffern 1; 2; 3; 4; 5; 6 und 7. Man wählt eine dieser Ziffern aus und subtrahiert und addiert dann im Wechsel die restlichen Ziffern.
Zum Beispiel so: 1 – 3 + 6 – 2 + 5 – 4 + 7 und man erhält als Ergebnis die Zahl 10.
Wie muss man es anstellen, damit man die Zahl 0 erhält?

Sieben Ziffern – Lösung:
Es gibt – bis auf die Vertauschung der „Summanden“ – vier Lösungen
(I) 2 – 1 + 3 – 6 + 4 – 7 + 5 = 0 bzw. jeweils aufsteigend sortiert: 2 + 3 + 4 + 5 – 1 – 6 – 7 = 0
(II) 1 – 2 + 3 – 5 + 4 – 7 + 6 = 0 bzw. jeweils aufsteigend sortiert: 1 + 3 + 4 + 6 – 2 – 5 – 7 = 0
(III) 1 – 3 + 2 – 5 + 4 – 6 + 7 = 0 bzw. jeweils aufsteigend sortiert: 1 + 2 + 4 + 7 – 3 – 5 – 6 = 0
(IV) 1 – 3 + 2 – 4 + 5 – 7 + 6 = 0 bzw. jeweils aufsteigend sortiert: 1 + 2 + 5 + 6 – 3 – 4 – 7 = 0
Man kann zum Beispiel so vorgehen, dass man sich immer nahe bei der 0 „aufhält“:
1 – 3 + 2 = 0; 1 – 3 + 2 – 4 + 5 = 1; 1 – 3 + 2 – 4 + 5 – 7 + 6 = 0 das ist die Lösung (IV).
Man kann zum Beispiel auch von irgendeiner solchen alternierenden Summe ausgehen und diese durch Vertauschung in die richtige Richtung „lenken“.
Geht man aus von 1 – 3 + 6 – 2 + 5 – 4 + 7 = 10 und vertauscht man 6 und 2,
so erhält man 1 – 3 + 2 – 6 + 5 – 4 + 7 = 2.
Vertauscht man jetzt noch 5 und 4,
so erhält man 1 – 3 + 2 – 6 + 4 – 5 + 7 = 0, das ist die Lösung (III).

Sieben Ziffern – Kommentar:
Bei der gestellten Ausgabe handelt es sich um ein Initialproblem, das sich in vielfältiger Weise zur Variation in unterschiedlichen Schwierigkeitsstufen eignet.
Einige Erkenntnisse:

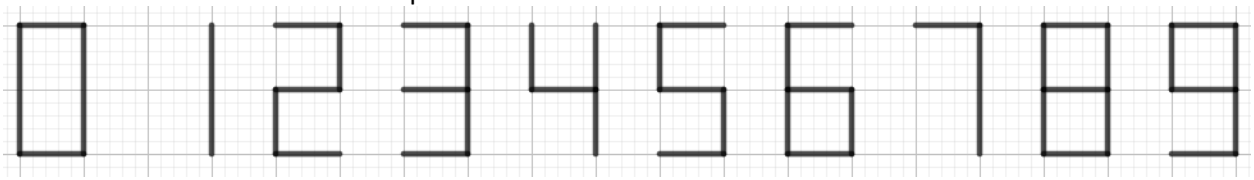
- Bei den betrachteten alternierenden Summen kommt es wegen der Kommutativität nur darauf an, welche drei der sieben Ziffern man subtrahiert.
  Man muss also aus 7 Ziffern 3 auswählen, damit gibt es $\binom{7}{3} = 35$ verschiedene Summen.
- Wegen des leichteren Überblicks könnte man eine „Normdarstellung“ mit jeweils aufsteigender Sortierung vereinbaren, zuerst die Additionen, dann die Subtraktionen.
  Zum Beispiel 1 + 2 + 4 + 7 – 3 – 5 – 6 = 0, siehe oben.
- Es gilt 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28, addiert man zum Beispiel die Zahl 6 nicht, sondern subtrahiert sie, so erhält man 1 + 2 + 3 + 4 + 5 – 6 + 7 = 16, also ein um 2 · 6 = 12 kleineres Ergebnis. Dies gilt offensichtlich allgemein: addiert man zum Beispiel die Zahl a nicht, sondern subtrahiert sie, so erhält man ein um 2·a kleineres Ergebnis.
- Je nach Wahl der drei Ziffern x, y und z, die subtrahiert werden sollen, erhält man als Ergebnis 28 – 2·(x+y+z). Für die Ergebnisse kommen also nur gerade Zahlen zwischen – 8 und 16 in Frage.
- Möchte man also das Ergebnis 0 erhalten, so benötigt man drei Ziffern, deren Summe 14 ergibt. Es gibt vier solche Mengen, deren Elemente die Summe 14 haben, nämlich {1;6;7}, {2;5;7}, {3;4;7} und {3;5;6} und damit eben vier Lösungen, siehe oben.

Sieben Ziffern – Differenzierung:
Hier einige Fragen mit zunehmendem Schwierigkeitsgrad.

- Was ist das größte Ergebnis, das vorkommen kann?
- Was ist das kleinste Ergebnis, das vorkommen kann?
- Wie viele Lösungen gibt es für das Ergebnis 12?
- Wie viele Lösungen gibt es für das Ergebnis 0?
- Addiert man alle sieben Ziffern, so erhält man 28. Es werden nun aber immer drei der sieben Ziffern nicht addiert, sondern subtrahiert. Wie erhält man das Ergebnis nur mit Hilfe der Zahl 28 und diesen drei Ziffern? Finde die Regel mit Hilfe einiger Beispiele.
- Gibt es eine ungerade Zahl als Ergebnis?
- Warum gibt es keine ungeraden Zahlen als Ergebnis?
- Wie sehen die Ergebnisse aus, wenn man nur die sechs Ziffern von 1 bis 6 verwendet?
  [Lösung: Es gilt 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21, werden die drei Ziffern x, y und z subtrahiert, so lautet das Ergebnis 21 – 2·(x+y+z).

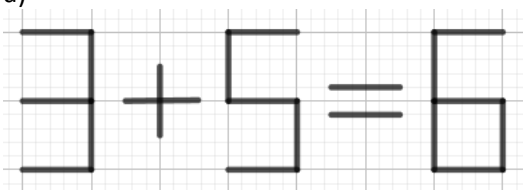
Als Ergebnisse kommen also nur die ungeraden Zahlen zwischen -9 und 9 vor.
Zum Beispiel gibt es für das Ergebnis 1 die drei folgenden Lösungen, hier in Normdarstellung:
2 + 4 + 5 – 1 – 3 – 6 = 1 und 2 + 3 + 6 – 1 – 4 – 5 = 1 und 1 + 4 + 6 – 2 – 3 – 5 = 1.]

Streichholz umlegen:
Man kann sich die zehn Ziffern von 0 bis 9 aus Streichholzern gelegt denken.
Im Bild unten: ein Streichholz entspricht einer Strecke von einer Kästchenbreite.

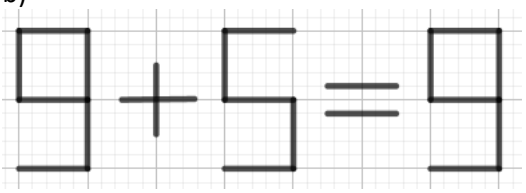


Welches Streichholz (nur eines!) muss man umlegen, damit die Gleichung richtig ist?
Das Gleichheitszeichen darf dabei nicht verändert werden.

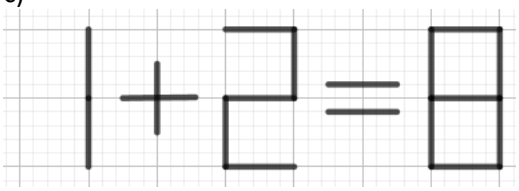
a)



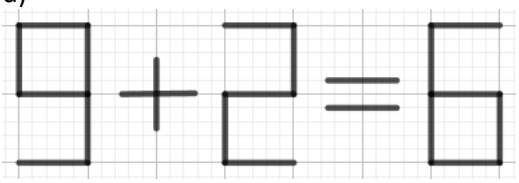
b)



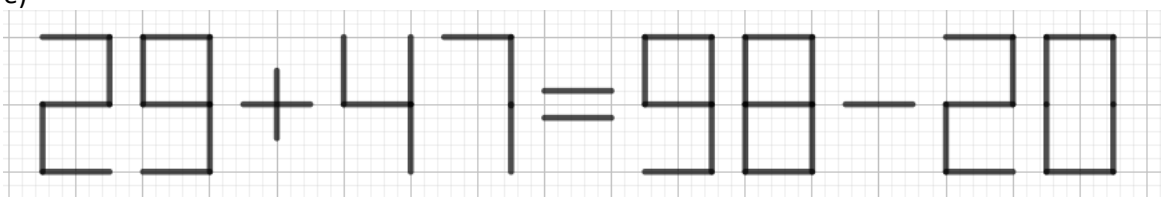
c)



d)



e)



Streichholz umlegen – Lösungen:
a) falsch: 3 + 5 = 6, richtig: 3 + 3 = 6
b) falsch: 9 + 5 = 9, richtig: 3 + 6 = 9
c) falsch: 1 + 2 = 8, richtig: 7 + 2 = 9
d) falsch: 9 + 2 = 6, richtig: 8 – 2 = 6

e) falsch: 29 + 47 = 98 – 20, richtig: 23 + 47 = 98 – 28 oder richtig: 29 + 41 = 98 – 28

Streichholz umlegen – Kommentar:
Welche Ziffer kann sich ergeben durch Umlegen eines Streichholzes innerhalb einer Ziffer?
2 → 3; 3 → 2; 3 → 5, 5 → 3; 6 → 9; 9 → 6
Welche Ziffer kann sich ergeben durch Wegnehmen eines Streichholzes innerhalb einer Ziffer?
6 → 5; 7 → 1; 8 → 0; 8 → 6; 8 → 9; 9 → 3; 9 → 5
Welche Ziffer kann sich ergeben durch Hinzufügen eines Streichholzes innerhalb einer Ziffer?
0 → 8; 1 → 7; 3 → 9; 5 → 6; 5 → 9; 6 → 8; 9 → 8

Aus einem „+“-Zeichen kann man durch Wegnehmen eines Streichholzes ein „–“-Zeichen machen und umgekehrt.
Man kann leicht solche Streichholz-Umlege-Aufgaben erfinden, indem man

- zunächst irgendeine richtige Gleichung aufschreibt
- und dabei eine (erste) Ziffer verwendet, bei der sich durch Wegnehmen eines Streichholzes wieder eine Ziffer ergibt (s.o.): 6; 7; 8 oder 9
- und dabei eine (zweite) Ziffer verwendet, bei der sich durch Hinzufügen eines Streichholzes wieder eine Ziffer ergibt (s.o.): 0; 1; 3; 5; 6 oder 9
- schließlich nimmt man von der ersten Ziffer ein Streichholz weg und fügt es bei der zweiten Ziffer dazu
- in aller Regel wird die Gleichung dadurch falsch und die Aufgabe ist fertig.

Beispiel: richtig: 6 + 4 = 1 + 9; falsch: 5 + 4 = 7 + 9
Man kann natürlich auch einfach in einer richtigen Gleichung in einer der Ziffern 2; 3; 5; 6 oder 9 ein Streichholz umlegen (s.o.).
Das Erfinden solcher Aufgaben ist eine sehr gute Differenzierungsmöglichkeit.
In erster Näherung kann man sagen:
Die Schwierigkeit von solchen Aufgaben steigt mit der Anzahl der verwendeten Ziffern, bei den sich durch Wegnehmen oder Hinzufügen eines Streichholzes wieder eine Ziffer ergibt.

Streichhölzer wegnehmen:
Fünf Streichhölzer liegen auf dem Tisch. Achim und Bert vereinbaren folgendes Spiel:
Abwechselnd nimmt jeder ein oder zwei Streichhölzer weg, so wie er möchte. Wer das letzte Streichholz – oder die letzten beiden Streichhölzer – nehmen kann, man könnte auch sagen, „wer den Tisch schließlich abräumen kann“, hat gewonnen.
Achim beginnt und möchte sicher gewinnen, wie geht er vor?

Streichhölzer wegnehmen – Lösung:
Achim sollte zunächst auf jeden Fall zwei Streichhölzer nehmen. Dann sind noch drei Streichhölzer auf dem Tisch. Wenn nun Bert eines nimmt, dann nimmt Achim die restlichen zwei. Nimmt Bert zwei, dann nimmt Achim das letzte Streichholz.

Streichhölzer wegnehmen – Kommentar:
Man muss die verschiedenen Möglichkeiten durchspielen, es sind ja nicht zu viele.
Beim Durchspielen könnte klar werden:
Wer drei Hölzer auf dem Tisch sieht und an der Reihe ist, der hat verloren!
Dasselbe gilt für sechs Hölzer. Nimmt man eines, nimmt der andere zwei und umgekehrt und man hat wieder die drei Hölzer vor sich. Und so weiter …
Die Tabelle zeigt den sicheren Gewinner in Abhängigkeit von der Anzahl der Hölzer zu Beginn des Spiels bei der Voraussetzung, dass Achim jeweils beginnt:

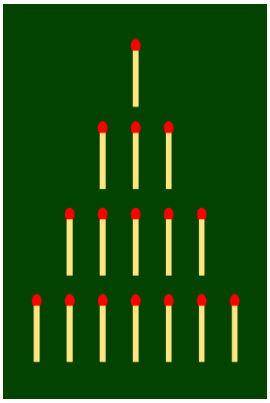
Anzahl der Hölzer:	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
Wer gewinnt sicher?	Bert	Achim	Achim	Bert	Achim	Achim	Bert	Achim	Achim	…

Streichhölzer wegnehmen – Differenzierung:
Man kann nicht nur bezüglich der Zahl der anfänglichen Streichhölzer variieren, sondern auch bezüglich der Anzahlen der Streichhölzer, die man nehmen darf. Kann man ein, zwei oder drei Streichhölzer nehmen, so gilt: Wer vier Hölzer auf dem Tisch sieht und an der Reihe ist, der hat verloren!
Nimmt man eines, nimmt der andere die letzten drei, nimmt man zwei, nimmt der andere die letzten beiden und nimmt man drei, nimmt der andere das letzte Streichholz.
Es ergibt sich der folgende Überblick, wenn Achim jeweils beginnt:

Anzahl der Hölzer:	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
Wer gewinnt sicher?	Bert	Achim	Achim	Achim	Bert	Achim	Achim	Achim	Bert	…

Streichhölzer wegnehmen – Exkurs:
In dem Filmklassiker *Letztes Jahr in Marienbad* (Alain Resnais, 1961) wird wiederholt auf ein anderes Streichholz-Wegnehm-Spiel Bezug genommen. Dies wird hier in leichter Abwandlung beschrieben:

16 Streichhölzer sind in vier Reihen gelegt, in der obersten Reihe 1 Streichholz, darunter in der zweiten Reihe 3 Streichhölzer, in der dritten Reihe 5 Streichhölzer und in der vierten und untersten Reihe 7 Streichhölzer (Bild rechts).



(Zur Wiederverwendung gekennzeichnet: https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:NimGame.svg)

Achim und Bert nehmen abwechselnd aus einer Reihe ein oder mehrere Streichhölzer, so viele sie mögen, aber eben nur aus einer der vier Reihen, nicht aus mehreren. Achim beginnt. Wer das letzte Streichholz (bzw. die letzten Streichhölzer) nehmen kann, hat gewonnen.
Charles Leonard Bouton (1869-1922) konnte 1901 zeigen, dass Bert bei geeigneter Spielweise sicher gewinnt.

Bouton, C. L. (1901): Nim, a game with a complete mathematical theory. In: Annals of Mathematics. (2) 3, S. 35–39

Im Folgenden wird die Gewinn-Strategie von Bert erläutert:
Man kann die Anzahlen der Streichhölzer in den vier Reihen zu Beginn mit Hilfe des Dualsystems so beschreiben („Dual-Beschreibung“):

	Vierer:	Zweier:	Einer:
erste Reihe	0	0	1
zweite Reihe	0	1	1
dritte Reihe	1	0	1
vierte Reihe	1	1	1
Summe:	2	2	4
Ist die Summe eine gerade Zahl?	**ja**	**ja**	**ja**

Es fällt auf, dass Achim also eine Streichholz-Verteilung vorfindet, bei der alle Spaltensummen in der Dual-Beschreibung gerade Zahlen sind. Wenn Achim nun, wie es die Spielregel verlangt, aus einer Reihe ein oder mehrere Streichhölzer wegnimmt, wird sich bei mindestens einer Spaltensumme offensichtlich immer (!) eine ungerade Zahl ergeben.
Hier ein Beispiel, Achim nimmt aus der dritten Reihe 2 Hölzer:

	Vierer:	Zweier:	Einer:
erste Reihe	0	0	1
zweite Reihe	0	1	1
dritte Reihe	0	1	1
vierte Reihe	1	1	1
Summe:	1	3	4
Ist die Summe eine gerade Zahl?	**nein**	**nein**	**ja**

Bert kann nun immer (!) in einer Reihe so viele Streichhölzer wegnehmen, dass wieder alle Spaltensummen in der Dualbeschreibung gerade Zahlen sind. Dazu geht er die Tabelle bei den Spaltensummen von links nach rechts durch und merkt sich, bei welcher Stufenzahl erstmalig eine ungerade Summe auftritt. Er wählt eine Reihe, bei der zu dieser Stufenzahl eine „1“ eingetragen ist und

nimmt aus dieser Reihe so viele Hölzer, dass wieder alle Spaltensummen gerade Zahlen sind. Dass das immer möglich ist, soll an dieser Stelle nicht im Detail begründet werden.
Hier wird das obige Beispiel fortgeführt, Bert nimmt aus der vierten Reihe 6 Hölzer:

	Vierer:	Zweier:	Einer:
erste Reihe	0	0	1
zweite Reihe	0	1	1
dritte Reihe	0	1	1
vierte Reihe	0	0	1
Summe:	0	2	4
Ist die Summe eine gerade Zahl?	**ja**	**ja**	**ja**

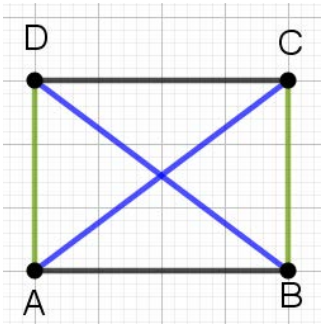
Das bedeutet folglich insgesamt also, dass Achim Bert immer eine Streichholz-Verteilung vorlegen muss, in der mindestens eine der Spaltensummen in der Dualbeschreibung eine ungerade Zahl ist.
Und dass Bert Achim dann immer eine Streichholz-Konstellation vorlegen kann, in der in der Dualbeschreibung alle Spaltensummen gerade Zahlen sind, zum Schluss eben das abgeräumte Tableau.

	Vierer:	Zweier:	Einer:
erste Reihe	0	0	0
zweite Reihe	0	0	0
dritte Reihe	0	0	0
vierte Reihe	0	0	0
Summe:	0	0	0
Ist die Summe eine gerade Zahl?	**ja**	**ja**	**ja**

Bei Schulausflügen, Studienfahrten, Schullandheimaufenthalten usw. kann die Lehrkraft mit diesem „Herrschaftswissen“ die Schüler zum Spiel herausfordern („Wer gegen mich gewinnt bekommt …“ 😊).
Übernimmt die informierte Lehrkraft die Rolle von Bert, ist der Sieg sicher.
Übernimmt die Lehrkraft die Rolle von Achim, ist der Sieg fast sicher. Denn der unerfahrenen Spieler bietet mit hoher Wahrscheinlichkeit dem Strategiespieler die Gelegenheit, ihm – dem unerfahrenen Spieler – eine Streichholz-Verteilung vorzulegen, in der alle Spaltensummen in der Dualbeschreibung gerade Zahlen sind.
Beim häufigen Spielen kann der unerfahrene Spieler aber etwas Erfahrung sammeln bezüglich „überschaubarer“ Streichholz-Verteilungen, die beim Spiel gegen den Strategiespieler zum sicheren Verlust führen.
Es sind dies zum Beispiel die Verteilungen 2-2 (= zwei Reihen mit je 2 Hölzern), 3-3, 4-4, 5-5,
1-2-3 (= drei Reihen insgesamt, eine Reihe mit 1 Holz, eine Reihe mit 2 Hölzern und eine Reihe mit 3 Hölzern, die Abfolge der Reihen ist dabei unerheblich), 1-4-5, 2-5-7,
1-1-2-2 (= vier Reihen insgesamt, zwei Reihen mit je einem Holz, zwei Reihen mit je zwei Hölzern, die Abfolge der Reihen ist dabei unerheblich), 1-1-3-3, 1-1-4-4, 1-1-5-5.

Die beschriebene Strategie lässt sich auf Anhieb nicht durchschauen und bietet Anlass, den interessierten Schülerinnen und Schülern das Dualsystem zu erläutern und die Kraft der Mathematik zur Strukturierung und Durchdringung von Sachverhalten exemplarisch zu demonstrieren.
Sie ist offensichtlich auf eine beliebige Anzahl von Reihen und beliebige Anzahlen von Streichhölzern in den Reihen verallgemeinerungsfähig (!).
Leider wissen wir nicht, wie Bouton auf die Idee kam, die „Gewinn-“ bzw. „Verlust-“ Verteilungen mit Hilfe der Dualdarstellung der Hölzeranzahlen in den Reihen und der Gerad- bzw. Ungeradzahligkeit der Spaltensummen zu charakterisieren. Man kennt nur das Ergebnis und sieht, dass die Strategie zum Erfolg führt.

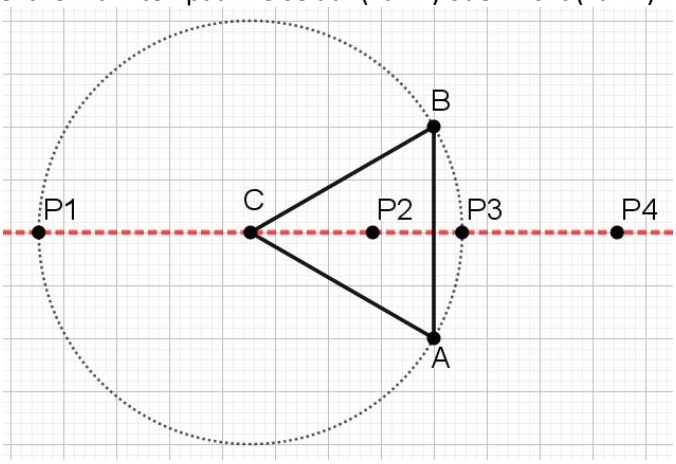
Vier Punkte, sechs Abstände aber nur zwei unterschiedliche:
Man denke sich vier Punkte der Ebene und bilde zu je zweien den Abstand.
Damit hat man sechs Abstandswerte. Die sechs Zahlen können alle voneinander verschieden sein, müssen es aber nicht.

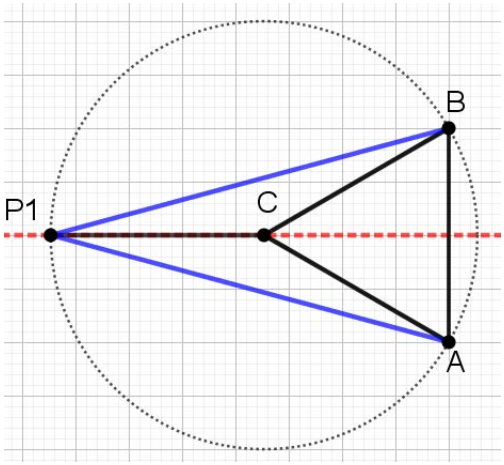


Sind die vier Punkte zum Beispiel die vier Ecken eines Rechtecks mit den Seitenlängen 3 und 4, so treten nur drei unterschiedliche Abstände auf und zwar jeweils doppelt. Es sind dies die Abstände 3; 4 (Seitenlängen) und 5 (Diagonalenlängen), vgl. Bild links.
Wie können die vier Punkte zueinander liegen, damit **nur zwei unterschiedliche Abstandswerte** auftreten?
Dass bei vier Punkten nur ein einziger Abstandswert für alle sechs Abstände vorkommt ist, nur für die Lage der Punkte im Raum und beim platonischen Körper *Tetraeder* möglich.

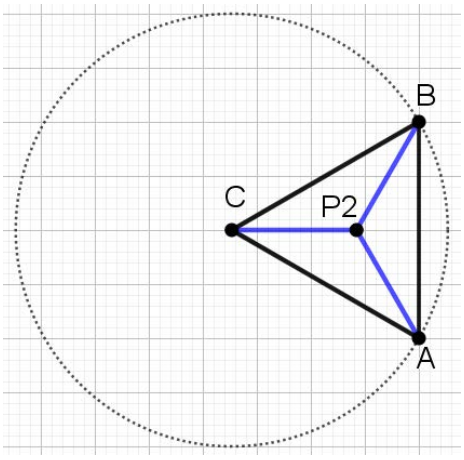
Vier Punkte, sechs Abstände aber nur zwei unterschiedliche – Lösungen:
Einer der beiden Abstandswerte muss mindestens dreimal vorkommen. Für diesen Abstand gibt es zwei Möglichkeiten: Entweder dieser Abstand tritt bei drei Punkten paarweise auf (Fall 1) oder nicht (Fall 2).

Zu Fall1:
Die drei Punkte bilden also ein gleichseitiges Dreieck (im Bild: Dreieck ABC). Der vierte Punkt muss auf einer der Mittelsenkrechten dieses Dreiecks liegen, sonst hätte man automatisch drei unterschiedliche Abstände.
Man kann jetzt einen „laufenden Punkt P“ auf der Mittelsenkrechten betrachten und insgesamt vier Lösungen mit den Punkten P1, P2, P3 und P4 erkennen (Bilder rechts und unten).

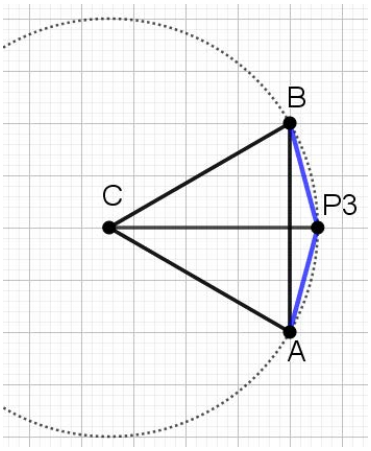




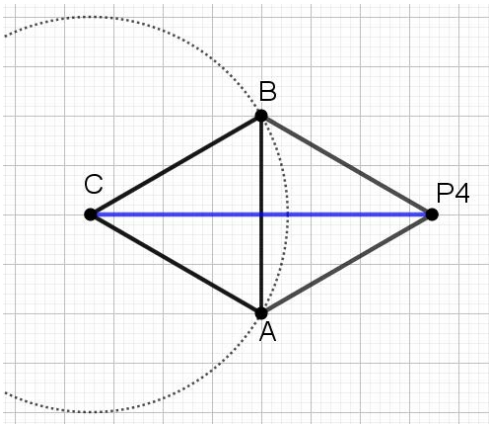
Lösung 1: „Trichter“



Lösung 2: „Mittelpunkt“



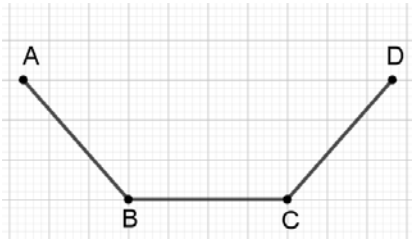
Lösung 3: „Drachen“

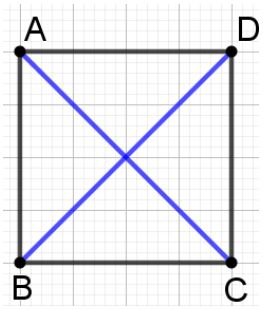


Lösung 4: „Raute“

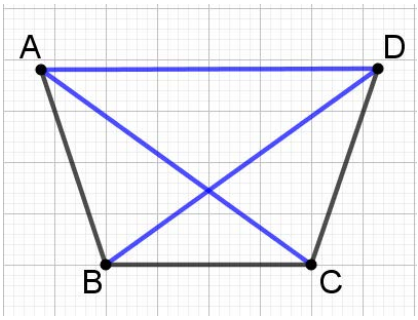
Zu Fall 2:

Wenn die drei Strecken mit übereinstimmendem Abstand von einem Punkt ausgehen, führt dies zwingend zur Lösung 3. Die restlichen Lösungen finden sich also nur unter Beteiligung eines Streckenzuges mit drei gleich langen Strecken (Bild rechts: ABCD). Liegen A und D in unterschiedlichen Halbebenen bezüglich der Geraden BC führt dies zwingend zur Lösung 4.





Lösung 5: „Quadrat“



Lösung 6: „Trapez“

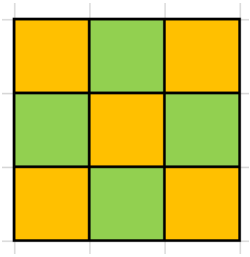
Zur Konstruktion (und Existenz) des achsensymmetrischen Trapezes in der Lösung 6:
Wählt man Winkel ACB = Winkel CBD = 36° und Winkel DBA = Winkel DCA = 72° und, so erhält man die Punkte A und D. AD ist parallel zu BC, es liegt also ein (symmetrisches) Trapez vor.
Damit ist Winkel BAD = Winkel ADC = 180° – 108° = 72°.
Also haben die Dreiecke ABD und ACD je zwei übereinstimmende Winkel von 72° und sind damit gleichschenklig, es gilt also AD = AC = BD.

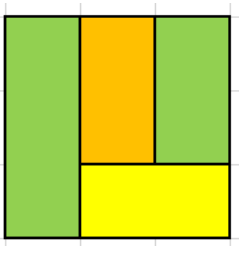
Vier Punkte, sechs Abstände aber nur zwei unterschiedliche – Kommentar:
Diese Knobelaufgabe ist anspruchsvoll.
Eher nahe liegen die Lösungen *Quadrat* und auch *Mittelpunkt*. Schon nicht ganz so nahe liegend ist die Lösung *Raute*. Die Lösungen *Drachen* und vor allem *Trichter* und *Trapez* sind schwierig.
Eine mögliche Differenzierung liegt bei der Anzahl der gefundenen Lösungen.
Die vorgestellte Begründung für die Existenz von genau sechs Lösungen und die dabei verwendete Systematik ist für das Hintergrundwissen der Lehrperson gedacht.
Ein möglicher Tipp: Suche unter den sechs symmetrischen Vierecken (Quadrat, Rechteck, Raute, symmetrisches Trapez, Parallelogramm, Drachen) nach Lösungen. Immerhin wird man bei vier der symmetrischen Vierecke fündig. Beim Drachen sogar gleich dreimal, die Lösungen *Trichter* und *Mittelpunkt* lassen sich als Drachenvierecke mit „einspringender“ Ecke auffassen.
Dass die Lösung *Trapez* tatsächlich existiert, muss man nicht problematisieren.

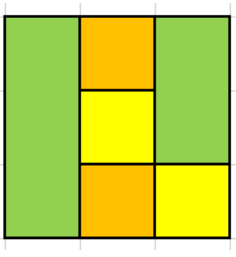
Man kann die Existenz auch so begründen:
A und D sollen zunächst auf der Geraden BC liegen. Dreht man im Streckenzug ABCD (Bild oben) A um B und D um C gleichermaßen auf einander zu, bis A und D zusammenfallen, so verkürzen sich dabei die Diagonalen BD und CA von zunächst 2·BC auf 1·BC und die Verbindungsstrecke AD von 3·BC auf 0·BC. Zunächst ist also AD größer als die Diagonalen, dann kleiner. Aufgrund des kontinuierlichen Prozesses muss bei einem Drehmaß α zwischen 0° und 120° Gleichheit vorliegen.
Die Überlegungen oben zeigen: α = 72°.

Vierfarbensatz:
Beim berühmten Vierfarbensatz der Mathematik geht es um das Färben einer Landkarte, so dass Länder, die eine gemeinsame Grenze haben – diese soll nicht nur aus einem Punkt bestehen – unterschiedlich gefärbt sind.
Die Aussage des Vierfarbensatzes ist nun:
Wie die Landkarte auch immer aussieht, man braucht **höchstens vier Farben**.

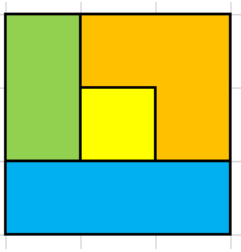
Bei der Landkarte 1 kommt man sogar mit zwei Farben aus, bei den Landkarten 2 und 3 reichen drei Farben (Skizzen rechts). Zeichne eine Landkarte, bei der man tatsächlich vier verschiedenen Farben braucht.


Landkarte 1

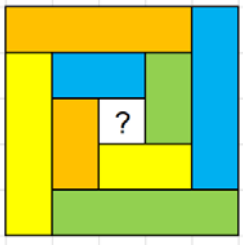

Landkarte 2


Landkarte 3

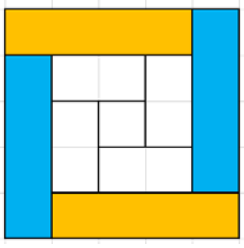
Vierfarbensatz – Lösung:
Die Landkarte 4 zeigt eine Lösung. Das Wesentlich an dieser Landkarte ist: Jedes der vier Länder grenzt an die anderen drei. Mit drei Farben kommt man deshalb nicht aus.

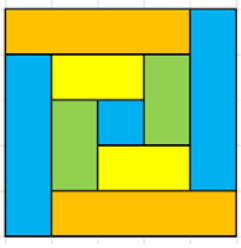

Landkarte 4

Vierfarbensatz – Kommentar:
Der Vierfarbensatz besagt nicht, dass man jede schon begonnene Färbung mit höchstens vier Farben abschließen kann, vgl. Landkarte 5a.
Er besagt nur, dass eine Färbung mit vier Farben existiert.



Landkarte 5a

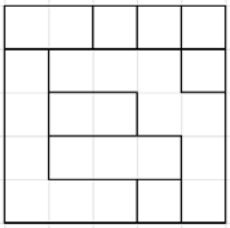

Landkarte 5b


Landkarte 5c

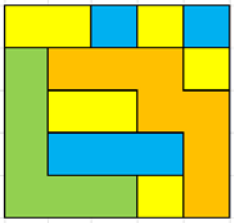
Wie aber diese finden? Landkarte 5b zeigt, wie man zum Beispiel von außen her beginnend (auf die Wahl des Anfangs kommt es grundsätzlich nicht an) „sparsamer“ vorgehen kann. Man wird erst dann eine neue Farbe verwenden, wenn man mit den bisher verwendeten Farben nicht weiterkommt.
Die Landkarte 5a widerlegt den Vierfarbensatz nicht, Landkarte 5c bestätigt ihn.
Der Beweis des Vierfarbensatzes ist extrem umfangreich, er gelang bisher nur mit Computerhilfe.

Vierfarbensatz – noch eine Aufgabe:

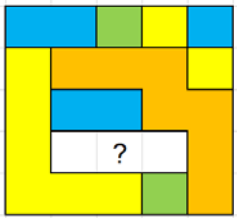
Färbe die Landkarte 6a mit höchstens 4 Farben.
[Eine Lösung zeigt die Landkarte 6b.]
Die Landkarte 6c kann durch Umfärben eines Landes auch zu einer Lösung geführt werden.



Landkarte 6a



Landkarte 6b



Landkarte 6c

Wichteln:
Die drei Schwestern Alma, Berta und Clara haben letzte Weihnachten gewichtelt – wie jedes Jahr.
Dazu legte jede ein Geschenk in eine von drei völlig gleich aussehenden Schachteln. Diese wurden so gut gemischt, dass keine hinterher noch wusste, in welcher der drei Schachteln ihr Geschenk war.
Dann wählte jede eine Schachtel aus. Und siehe da: jede hatte ihr eigenes Geschenk gezogen!
So etwas ist ja nun nicht ganz unmöglich, wird doch aber eher selten vorkommen.
Alle wie viel Jahre darf man so etwas erwarten?

Wichteln – Lösungen:
Bezeichnet man mit XYZ das Ergebnis
X erhält das Geschenk von A und
Y erhält das Geschenk von B und
Z erhält das Geschenk von C
dann gibt es die sechs Möglichkeiten ABC, ACB, BAC, BCA, CAB und CBA.
Man darf also alle 6 Jahre erwarten, dass jede ihr eigenes Geschenk zieht.

Wichteln – Kommentar:
Es gibt zwei Schwierigkeiten bei dieser Aufgabe:

- Man muss die sechs Fälle mit jeweils gleicher Chance zu erkennen. Eine Unterscheidung nach keiner, einer, zwei und drei Übereinstimmungen ist nicht zielführend, weil nicht chancengleich. Zum Beispiel kann der Fall *genau zwei Übereinstimmungen* gar nicht vorkommen.
- Man muss den Sachverhalt geeignet modellieren und notieren.

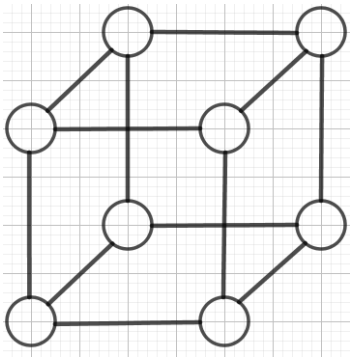
Wichteln – Differenzierung:
Die Lehrkraft könnte zur Modellierung die Anlage einer Tabelle und anschließenden Betrachtung der unterschiedlichen Fälle anregen:

	A	**B**	**C**
… bekommt das Geschenk von …	A	B	C
… bekommt das Geschenk von …	A	C	B
… bekommt das Geschenk von …	B	A	C
… bekommt das Geschenk von …	B	C	A
… bekommt das Geschenk von …	C	A	B
… bekommt das Geschenk von …	C	B	A

Fast zu einfach: zwei Schwestern [es gibt 2! = 2 Möglichkeiten mit gleicher Chance → alle zwei Jahre]
Schon schwieriger: vier Schwestern – ohne systematisches Aufschreiben ist man spätestens hier verloren [es gibt 4! = 24 Möglichkeiten mit gleicher Chance → alle 24 Jahre].
Nebenbei: Wie könnte man ohne das Einschalten einer weiteren Person sinnvoll mischen, so dass keine der Schwestern dann noch weiß, welches ihr Geschenk war?

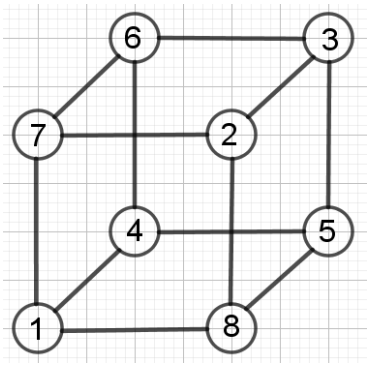
Zum Beispiel so: Zwei Schwestern verlassen den Raum, die dritte mischt. Dann verlässt diese den Raum und die beiden andern kommen zurück und mischen noch einmal.

Zahlen in Würfelecken:
Du sollst die Ziffern von 1 bis 8 so auf die acht Ecken des Würfels so verteilen, dass für jede der sechs Seitenflächen die Summe aus den vier Ziffern in den Ecken gleich ist.



Zahlen in Würfelecken – Lösungen:
Es ist 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36. Die Summe aus vier Ziffern der Ecken einer Seitenfläche (kurz: Ziffern einer Fläche) muss also 36 : 2 = 18 sein, denn schon mit zwei Seitenflächen hat man ja alle acht Zahlen beieinander.
Welche Ziffernkombinationen können auf einer Fläche stehen, ergeben also die Summe 18?

- (1; 2; 7; 8), auf der anderen Fläche steht dann (3; 4; 5; 6)
- (1; 3; 6; 8), auf der anderen Fläche steht dann (2; 4; 5; 7)
- (1; 4; 5; 8), auf der anderen Fläche steht dann (2; 3; 6; 7)
- (1; 4; 6; 7), auf der anderen Fläche steht dann (2; 3; 5; 8)



Man trägt zunächst – ohne Beschränkung der Allgemeinheit – auf der Ecke vorne links unten die Ziffer 1 ein. Bei den Ziffernkombinationen, die die Ziffer 1 enthalten, treten die Ziffern 2; 3 und 5 nur in einer der vier Kombinationen auf. Das bedeutet, die Ziffern 2; 3 und 5 können nicht an „benachbarten“ Ecken der 1 stehen, weil sie sonst zusammen mit der Ziffer 1 in zwei Flächen vorkämen.
Man erhält alle Lösungen, indem man eine Lösung (zum Beispiel: Bild rechts) an den Symmetrieachsen des Würfels spiegelt oder zueinander parallele Kanten, deren beide Endpunkte Ziffern mit derselben Summe tragen, vertauscht.

Zahlen in Würfelecken – Kommentar:
Das Auffinden einer der Lösungen genügt. Beim Probieren kann man auf die Erkenntnis mit der Summe 18 stoßen. Wenn nicht, sollte die Lehrkraft nach einiger Zeit einen geeigneten Hinweis geben.

Zaubertrick für junge Schokoladenfreunde und das Jahr 2020:

- Wie oft würdest du in der Woche gerne Schokolade essen?
- Multipliziere diese Zahl mit 2.
- Addiere zum Ergebnis 5.
- Multipliziere das Ergebnis mit 50.
- Wenn du dieses Jahr schon Geburtstag hattest, dann addiere 1770.
- Wenn du dieses Jahr noch nicht Geburtstag hattest, dann addiere 1769.
- Subtrahiere zum Schluss dein Geburtsjahr.

Jetzt hast du eine dreistellige Zahl. Simsalabim: Die erste Ziffer gibt an, wie oft du in der Woche gerne Schokolade essen würdest, die anderen beiden Ziffern sagen, wie alt du bist.
(Bild zur Wiederverwendung gekennzeichnet:
https://pixabay.com/de/vectors/hase-h%C3%A4schen-magier-zauberer-hexe-2040912/)

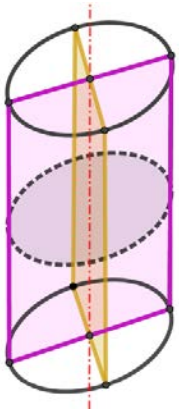
Zaubertrick für junge Schokoladenfreunde und das Jahr 2020 – Lösung:
Wir gehen zunächst davon aus, dass du im laufenden Jahr 2020 schon Geburtstag hattest.
Bezeichnet man die auf die erste Frage genannte Anzahl mit x, so erhältst du durch die angegebene Rechnung ohne die Subtraktion zum Schluss: $(x \cdot 2 + 5) \cdot 50 + 1770 = 100 \cdot x + 2020$.
Subtrahierst du nun dein Geburtsjahr, so erhältst du $100 \cdot x$ plus dein momentanes Alter als Ergebnis.
Dein Alter ist eine ein- oder zweistellige Zahl, wenn du noch nicht 100 Jahre oder älter bist.
Da es keinen Übertrag gibt, ist die Hunderterziffer gleich x und die beiden anderen Ziffern (um genau zu sein: die aus den beiden letzten Ziffern gebildete zweistellige Zahl) geben dein Alter an.
Wenn du im laufenden Jahr 2020 noch nicht Geburtstag hattest, funktioniert das genau so, weil nicht 1770, sondern 1 weniger, nämlich 1769 subtrahiert wird.
Beispiel 1: Heute ist der 1.9.2020, dein Geburtsdatum ist der 2.8.2007. Du würdest gerne 3mal pro Woche Schokolade essen.
$3 \cdot 2 = 6$; $6 + 5 = 11$; $11 \cdot 50 = 550$; $550 + 1770 = 2320$; $2320 - 2007 = 313$
→ 3mal pro Woche würdest du gerne Schokolade essen, heute bist du 13 Jahre alt.
Beispiel 2: Heute ist der 1.9.2020, dein Geburtsdatum ist der 3.10.2005. Du würdest gerne 2mal pro Woche Schokolade essen.
$2 \cdot 2 = 4$; $4 + 5 = 9$; $9 \cdot 50 = 450$; $450 + 1769 = 2219$; $2219 - 2005 = 214$
→ 2mal pro Woche würdest du gerne Schokolade essen, heute bist du 14 Jahre alt.

Zaubertrick für junge Schokoladenfreunde und das Jahr 2020 – Kommentar:
Dieser Trick funktioniert nur für Personen unter 100 (so genannte „Uhus“), sonst gibt es einen Übertrag auf die Hunderterstelle und die beiden Zahlen (Schokoladen-Events pro Woche und Alter) werden „vermischt“.
Er ist eigentlich nur für Schokoladenfreunde gedacht, für x = 0 müsste man sich beim dann zweistelligen Ergebnis die 0 als Hunderterziffer dazu denken.
Für das Jahr 2021 müsste man dann 1771 bzw. 1770 addieren usw.
Wichtig beim Vorführen des Tricks:

- Darauf hinweisen, dass immer mit dem vorigen Ergebnis weitergerechnet werden muss.
- Zum Ausschluss von Rechenfehlern können Schülerinnen und Schüler zum Beispiel immer zu zweit mit dem Taschenrechner oder schriftlich rechnen und sich gegenseitig kontrollieren. Wenn man sich verrechnet, verpufft der Effekt des Tricks ☹!

Zylinder:
Ein Zylinder soll durch ebene Schnitte in acht gleiche Teile geteilt werden. Man soll mit möglichst wenigen Schnitten auskommen. Wie viele braucht man?

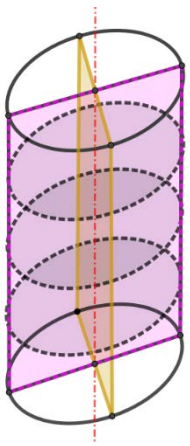
Zylinder – Lösung:
Wenn man an eine Torte und Achtel-Stücke denkt, braucht man vier Schnitte.
Wenn man sich allerdings gedanklich von der Torte verabschiedet und einem Zylinder aus homogenem Material zuwendet, reichen drei Schnitte:
Man schneidet den Zylinder zunächst auf halber Höhe durch und setzt dann zwei zueinander senkrechten Schnitte durch die Rotationsachse des Zylinders.
Bei einer Schwarzwälder-Kirschtorte wären diese acht Stücke aber nicht untereinander gleich 😊.



Zylinder – Kommentar:
Hier zunächst ein Exkurs zur Umkehraufgabe in verallgemeinerter Form.
Es sei Ls die Anzahl der Längsschnitte durch die Rotationsache des Zylinders. Für Ls > 1 schließen benachbarte Schnitte jeweils einen Winkel von 180° : Ls ein.

Es sei Qs die Anzahl der Querschnitte senkrecht zur Rotationsachse des Zylinders. Für Qs = 1 wird der Schnitt auf halber Höhe angesetzt. Für Qs > 1 teilen die Schnitte die Zylinderhöhe in Zylinderhöhe : (Qs + 1) gleiche Teile.
Frage: Es ist eine bestimmte Anzahl von Schnitten, dabei mindestens ein Längsschnitt, vorgegeben. Wie viele Teile erhält man höchstens?
Die Gesamtzahl der Schnitte sei n. Es ist n = Ls + Qs.
Für die Anzahl A der gleichen Stücke gilt in Abhängigkeit von Ls und Qs: A(Ls,Qs) = 2·Ls · (Qs + 1).
Begründung: Nach Ls Längsschnitte (Ls ≥ 1) hat man 2·Ls Teile. Für Qs Querschnitte erhält man das (Qs+1)-Fache an Teilen. Für die umgekehrte Reihenfolge argumentiert man entsprechend.
Für beliebiges (aber festes) n erhält man: $\mathbf{A_n(Ls) = (n + 1 – Ls) \cdot 2{\cdot}Ls} = 2{\cdot}(n + 1){\cdot}Ls – 2{\cdot}Ls^2$.
Der Graph von A_n ist (bei vorübergehender kontinuierlicher Sicht für die Variable Ls, die ja nur natürliche Zahlen annehmen kann) eine nach unten geöffnete Parabel, die Nullstellen von A_n sind 0 und n+1.
Für ungerade n ist 0,5·(n+1) ganzzahlig, das Maximum von A_n liegt daher an der Stelle 0,5·(n+1) und lautet $0{,}5{\cdot}(n+1)^2$.
Für gerades n ist 0,5·(n+1) nicht ganzzahlig, das Maximum wird daher an den beiden benachbarten ganzzahligen Stellen 0,5·n und 0,5·n+1 angenommen und lautet übereinstimmend $0{,}5{\cdot}n^2+n$.
Hier einige Zahlenbeispiele, die man sich begleitend gedanklich am Zylinder vorstellen kann:
n = 2 (Schnitte): Man erhält höchstens $0{,}5{\cdot}2^2+2 = 4$ Teile und zwar mit entweder
mit 0,5·2 = 1 Längsschnitt und dann 2–1 = 1 Querschnitt oder
mit 0,5·2+1 = 2 Längsschnitten und 2–2 = 0 Querschnitten.
n = 3 (Schnitte): Man erhält höchstens $0{,}5{\cdot}(3+1)^2 = 8$ Teile und zwar
mit 0,5·(3+1)= 2 Längsschnitten und 3–2 = 1 Querschnitt.
n = 4 (Schnitte): Man erhält höchstens $0{,}5{\cdot}4^2+4 = 12$ Teile und zwar mit entweder
mit 0,5·4 = 2 Längsschnitten und dann 4–2 = 2 Querschnitten oder
mit 0,5·4+1 = 3 Längsschnitten und 4–3 = 1 Querschnitt.
n = 5 (Schnitte): Man erhält höchstens $0{,}5{\cdot}(5+1)^2 = 18$ Teile und zwar
mit 0,5·(5+1)= 3 Längsschnitten und 5–3 = 2 Querschnitten.
n = 6 (Schnitte): Man erhält höchstens $0{,}5{\cdot}6^2+6 = 24$ Teile und zwar mit entweder
mit 0,5·6 = 3 Längsschnitten und dann 6–3 = 3 Querschnitten oder
mit 0,5·6+1 = 4 Längsschnitten und 6–4 = 2 Querschnitten.
n = 7 (Schnitte): Man erhält höchstens $0{,}5{\cdot}(7+1)^2 = 32$ Teile und zwar
mit 0,5·(7+1)= 4 Längsschnitten und 7–4 = 3 Querschnitten.

Es soll nun eine bestimmte Anzahl A von gleichen Teilen erzeugt werden. Wie viele Schnitte n braucht man mindestens? Dies ist eine Verallgemeinerung des Ausgangsproblems.
Hier hilft die oben entwickelte „Formel“ A(Ls,Qs) = **2 · Ls · (Qs + 1)** weiter.
Möchte man zum Beispiel 20 Teile erzeugen, so zerlegt man 20 in Primfaktoren und betrachtet die unterschiedlichen Möglichkeiten für das Produkt 2 · Ls · (Qs + 1) mit den natürlichen Zahlen Ls und Qs+1:
Es ist 40 = 2 · 2 · 5 und liefert damit die Zerlegungen
2 · 1 · 10 mit Ls = 1 und Qs+1 = 10, also Qs = 9, insgesamt also 10 Schnitte
2 · 2 · 5 mit Ls = 2 und Qs+1 = 5, also Qs = 4, insgesamt also 6 Schnitte (Bild rechts)
2 · 5 · 2 mit Ls = 5 und Qs+1 = 2, also Qs = 1, insgesamt also 6 Schnitte
2 · 10 · 1 mit Ls = 10 und Qs+1 = 1, also Qs = 0, insgesamt also 10 Schnitte
Ohne die Verwendung eines Längsschnitts (Ls = 0) gilt offensichtlich A(Qs) = Qs + 1.
Für 20 Teile würde man also 19 Querschnitte benötigen.



Nach diesem Exkurs zum mathematischen Überbau sind hier weitere mögliche Fragen für Schülerinnen und Schüler aufgelistet.

- Wie viele Schnittmöglichkeiten gibt es, bei denen sich 20 gleiche Teile ergeben?
  Wie viele Schnitte braucht man für 20 gleiche Teile mindestens?
- Kann man jede beliebige Anzahl von gleichen Teilen bekommen?

- Kann man jede beliebige Anzahl von gleichen Teilen bekommen, wenn man mindestens einen Längsschnitt macht?
- Man macht 9 Längsschnitte und 4 Querschnitte. Wie kann man die Anzahl der gleichen Teile mit Hilfe der beiden Zahlen 9 und 4 berechnen?

Lehrerblatt

Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen; und jeder geht zufrieden aus dem Haus. (Goethe)

Die Knobelaufgaben-Sammlung umfasst etwa **100 Aufgaben** (Teilaufgaben sind einzeln gezählt) in drei Schwierigkeitsstufen, *einfach, **mittel und ***schwierig – samt Lösungen und ggf. Kommentaren.
Der Schwierigkeitsgrad einer Aufgabe hängt dabei oft nur von einer Nuance in der Aufgabenstellung ab (*Grundstücke*).
Man darf den Begriff Knobelaufgabe hier gerne im weiteren Sinn verstehen. Trotzdem haben nicht wenige Aufgaben dieser Sammlung den typischen Knobelaufgaben-Clou.

Die Aufgaben können bei Mkid-Stunden als **Puffer** eingesetzt werden. Man kann auch eigene Knobelaufgaben-Stunden machen.

Der **Zeitbedarf** erstreckt sich mit allen Abstufungen von einer Minute (*extreme Körper*) bis zu einer ganzen Sitzung *(Noten)*, wenn man das ausdehnen möchte.

Manche Aufgabentypen (*Stimmt's*) eignen sich für ein kleines **Gewinnspiel**.

Manche Aufgaben eignen sich gut zur **selbständigen Variation** durch die Schülerinnen und Schüler (*Würfel*).

Es ist nicht daran gedacht, dass die Lehrperson die Aufgaben gedruckt austeilt, sondern dass die **Aufgaben vorgelesen** und ggf. im Unterrichtsgespräch **erläutert** werden. Ggf. werden wichtige Informationen auf eine geeignete Art dargeboten (Tafel, Visualizer, u.a.).

Bei **schwierigen Aufgaben** (*Waageproblem*) ist es schon gut, wenn die Schülerinnen und Schüler
- das Problem erfassen
- sich Gedanken machen
- von der Lehrkraft gesagt bekommen, dass dieses Problem ganz ganz schwierig ist
- selbständig erste Lösungsansätze fassen (loben, loben, loben!)
- mit einem Tipp auf die richtige Lösung kommen (*Mathebuch* → unbedingt nachspielen!)
- die Auflösung verstehen und deren intellektuellen Charme erkennen
- erkennen, dass es auch bei aussichtslosen Situationen eine Lösung geben kann

An geeigneten Stellen wird die Lehrperson auf eine der **Problemlöse-Strategien** („Leben ist Problemlösen" – Carl Popper, Philosoph, 1902-1994) hinweisen:

- mache eine Skizze oder lege eine Tabelle an
- mache ein Beispiel
- probiere systematisch
- teile das Problem in Teilprobleme auf
- betrachte den ungünstigsten Fall
- arbeite alle Fälle der Reihe nach systematisch, sorgfältig und konzentriert ab
- Vorwärtsarbeiten bzw.: kann man etwas Einschränkendes über die Lösung sagen? (*viele Teiler*)

Die **Selbsterfahrung der Lehrkraft** ist wichtig beim Knobeln *(Zwei Teile)*.
Also: nicht immer gleich die Lösung anschauen ☺.
Im Idealfall überträgt sich die Begeisterung der Lehrkraft beim Knobeln auf die Schüler.

Knobelaufgaben-Sammlung

Wer vieles bringt, wird manchem etwas bringen; und jeder geht zufrieden aus dem Haus. (Goethe)

Schwierigkeitsgrad: *einfach **mittel ***schwierig

***Balken:**
Ein Balken wurde durch 11 Schnitte in Stücke zu je 15 cm Länge zerlegt. Wie lang war der Balken?

Balken – Lösung:
12 (!) mal 15 cm = 180 cm. Ggf. eine Skizze machen.

***Buchstaben-Rätsel** mit **Lösungen:**
Zu einer „Abkürzung“ ist eine Bedeutung zu finden.
Beispiel: 4 = RW hat ein RE … 4 rechte Winkel hat ein Rechteck
90 = G hat ein RW … 90° hat ein rechter Winkel
8 = E hat ein Q … 8 Ecken hat ein Quader
100 = P hat ein G … 100% hat ein Ganzes
6 = Q hat ein W als O … 6 Quadrate hat ein Würfel als Oberfläche
100 = Q hat ein A … 100 Quadratmeter hat ein Ar
180 = WS im D … 180° ist die Winkelsumme im Dreieck

Buchstaben-Rätsel – Kommentar:
Mit den Schülerinnen und Schülern zusammen selbst Beispiele (gerne auch außermathematische: 24 Stunden hat ein Tag, 7 Weltwunder auf der Erde, 3 Weisen aus dem Morgenland, usw.) finden macht Spaß!

***Bücherwurm:**
Im Regal stehen drei Bände des Mathematikbuches Lambacher Schweizer. Man sieht die Buchrücken, es sind Band 5 (links), Band 6 (Mitte) und Band 7 (rechts). Der vordere und der hintere Einband jedes Buches ist jeweils 2 mm dick, die Seiten sind zusammen 12 mm dick.
Ein Bücherwurm frisst sich – rechtwinklig zu den Seiten – von der ersten Seite von Band 5 zur letzten Seite von Band 7. Wie lang ist die Fressspur des Wurms?

Bücherwurm – Lösungen:
Es sind 2 mm + 16 mm + 2 mm = 20 mm (!). Die erste Seite von Band 5 liegt rechts vom Betrachter aus mit Blick auf den Buchrücken, die letzte Seite von Band 7 liegt links.

***Cola:**
Eine Dose Cola kostet 2 €. Das Cola selbst kostet 1,60 € mehr als die leere Dose. Was kostet die leere Dose?

Cola - Lösung:
Die spontane Idee, dass die leere Dose 2,00 € – 1,60 € = 0,40 € kostet, ist falsch. Das offenbart eine Probe (!). Die Dose kostet 0,20 € (Lösung durch Probieren oder mithilfe einer Gleichung). Das Cola kostet dann 1,80 €, das sind tatsächlich 1,60 € mehr als 0,20 €.

***Dörtes Mutter:**
Die Mutter von Dörte hat 4 Kinder. Das erste Kind heißt Mara. Das zweite Kind hat heißt Merle. Das dritte Kind heißt Mimi. Wie heißt das vierte Kind?

Dörtes Mutter - Lösung:
Das vierte Kind von Dörtes Mutter muss Dörte heißen, wenn die anderen drei Kinder offenbar nicht Dörte heißen.

***Drei und Neun:**
Welche der beiden folgenden Behauptungen ist richtig, welche ist falsch?
Behauptung 1: Wenn die Quersumme einer Zahl durch 9 teilbar ist, dann ist die Zahl durch 3 teilbar.
Behauptung 2: Wenn die Quersumme einer Zahl durch 3 teilbar ist, dann ist die Zahl durch 9 teilbar.

Drei und Neun – Lösung:
Behauptung 1 ist richtig, Begründung: Wenn die Quersumme einer Zahl durch 9 teilbar ist, dann ist auch die Zahl durch 9 teilbar (Neunerregel). Wenn eine Zahl aber durch 9 teilbar ist, dann ist sie auch durch 3 teilbar.
Behauptung 2 ist falsch: ein Gegenbeispiel ist die Zahl 12

Drei und Neun – Kommentar:
Das ist eine ganz einfache Übung zum korrekten Verständnis von Wenn-dann-Formulierungen.

***Dreiecke:**
Ordne sechs gleichlange Stäbe so an, dass vier gleichseitige Dreiecke entstehen – genau vier, nicht mehr und nicht weniger.

Dreiecke – Lösung:
Man bilde einen Tetraeder.

***Durchschnitte:**
a) Zu den Zahlen 3 und 8 ist eine dritte Zahl gesucht, so dass der Durchschnitt der drei Zahlen 10 ist.
b) Es sind vier unterschiedliche Zahlen gesucht, deren Durchschnitt größer als die zweitgrößte Zahl ist.
c) Es sind drei unterschiedliche Zahlen gesucht, deren Durchschnitt größer als die größte der drei Zahlen ist.
d) Bilde mit den Ziffern 1; 2; 3; 4; 5 und 6 (jede der sechs Ziffern soll genau einmal verwendet werden) drei Zahlen deren Durchschnitt 37 ist.
e) Felix hat von drei Zahlen den Durchschnitt berechnet. Er vergrößert eine Zahl um 6. Um wie viel vergrößert sich der Durchschnitt?

Durchschnitte – Lösungen:
a) Dritte Zahl: 19, die Summe der drei Zahlen muss $3 \cdot 10 = 30$ sein.
b) z.B.: 1; 2; 3 und 10 mit Durchschnitt 4
c) Das ist nicht möglich.
d) $(14 + 62 + 35) : 3 = 111 : 3 = 37$
e) Der Durchschnitt vergrößert sich um 2.
Formal: $(a + b + c) : 3 = m$; $(a + b + c + 6) : 3 = m + 2$.
Man ist hier auch mit beispielgebundenen Argumentationen der Schülerinnen und Schüler zufrieden.

Durchschnitte – Kommentar:
Schülerinnen und Schüler können selbst solche Aufgaben erfinden.

****Eindeutig?**
Reza erzählt, dass er im Sonderangebot Nudelpackungen auf Vorrat gekauft hat und zwar für insgesamt 10,00 €. Eine Packung Fusilli kostet 0,70 €, eine Packung Spaghetti kostet 0,80 €.
Kann man aus diesen Angaben eindeutig herausfinden, wie viele Packungen von welcher Sorte es waren?

Eindeutig? – Lösungen:
Nein, das kann man nicht. Es könnten 4 Packungen Fusilli und 9 Packungen Spaghetti gewesen sein oder auch 12 Packungen Fusilli und 2 Packungen Spaghetti.

Eindeutig? Kommentar:
Das ist eine wichtige Strategie – alle Möglichkeiten systematisch durchprobieren.
Hier also z.B. die „Fusilli-Reihe“ hochzählen: 0,70; 1,40; 2,10; 2,80 usw. und den Restbetrag auf die Teilbarkeit durch 0,80 prüfen.

***Elf:**
Welche Zahl ist gemeint mit „elf Tausend elf Hundert elf“?

Elf – Lösungen:
$11 \cdot 1000 + 11 \cdot 100 + 11 = 12.111$

***Extreme Körper:**
Was für ein Körper ist das?
a) ein einzelnes Spaghetti
b) ein Blatt Papier
c) ein Sandkorn
d) eine Büroklammer
e) die Spitze eines gespitzten Bleistifts
f) ein Haar

Extreme Körper - Lösung:
a) ein Zylinder
b) ein Quader
c) eine Kugel
d) ein gebogener Zylinder
e) ein Kegel
f) ein Zylinder

***Farbige Socken 1:**
Norbert hat insgesamt zwei Paar dunkelblaue, drei Paar dunkelbraune und vier Paar dunkelgrüne Socken. Die liegen gewaschen und getrocknet in einer Schublade, aber einzeln und durcheinander.
Er bittet Linda ihm ein Paar gleichfarbige zu holen. Linda ist leicht farbenblind und kann diese dunklen Socken nicht unterscheiden. Wie viele Socken muss sie mindestens mitnehmen, damit sicher zwei gleichfarbige darunter sind?
Wir gehen davon aus, dass es hierbei keine linken oder rechten Socken gibt.

Farbige Socken 1 – Lösung:
Sie muss mindestens vier Socken mitnehmen. Bei dreien sind es im ungünstigsten Fall drei verschiedene, bei vieren sind dann sicher zwei gleiche Farben dabei.

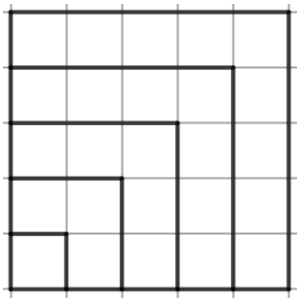
Farbige Socken 1 – Kommentar:
Strategien hierbei:
- Den worst-case betrachten.
- Das so genannte Schubfachprinzip anwenden. Wenn n+1 Kugeln in n Schubfächern verteilt werden sollen, dann liegt in mindestens einem Schubfach mehr als eine Kugel.

****Farbige Socken 2:**
Lars hat insgesamt zwei Paar dunkelblaue, drei Paar dunkelbraune und vier Paar dunkelgrüne Socken. Die liegen gewaschen und getrocknet in einer Schublade, aber einzeln und durcheinander.
Er bittet Linda ihm ein Paar gleichfarbige zu holen. Linda ist leicht farbenblind und kann diese dunklen Socken nicht unterscheiden. Wie viele Socken muss sie mindestens mitnehmen, damit sicher zwei gleichfarbige darunter sind, die nicht dunkelblau sind?
Wir gehen davon aus, dass es hierbei keine linken oder rechten Socken gibt.

Farbige Socken 2 – Lösung:
Sie muss mindestens sieben Socken mitnehmen. Im ungünstigsten Fall sind die vier dunkelblauen dabei, dann braucht man darüber hinaus noch drei.

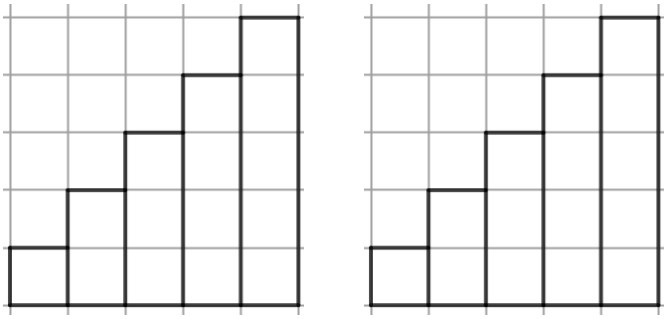
Farbige Socken 2 – Kommentar:
Strategien hierbei:
- Den worst-case betrachten.
- Das so genannte Schubfachprinzip anwenden, dies lautet z.B. so: Wenn n+1 Kugeln in n Schubfächern verteilt werden sollen, dann liegt in mindestens einem Schubfach mehr als eine Kugel.

****Flächenstücke 1:**
Finde mithilfe der Abbildung rechts eine Regel heraus, wie man von einer Quadratzahl zur nächsten kommt



Flächenstücke 1 – Lösung:
In verschiedenen Abstraktionsebenen
- man addiert immer die nächste ungerade Zahl
- $2^2 = 1^2 + 3$; $3^2 = 2^2 + 5$; $4^2 = 3^2 + 7$, usw.
- zu 3^2 addiert man $2 \cdot 3 + 1$, zu 4^2 addiert man $2 \cdot 4 + 1$, usw.
- $(n + 1)^2 = n^2 + (2 \cdot n + 1)$

**** Flächenstücke 2:**
a) Lege die beiden gleichen Flächenstücke (Abbildungen rechts) zu einem Rechteck zusammen und berechne damit auf einfache Weise den Wert von
1 + 2 + 3 + 4 + 5.
b) Wie kommt man dann zu
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10?
c) Wie kommt man zu
1 + 2 + 3 + 4 + 5 + … + n?



Flächenstücke 2 – Lösung:
a) Drehe eines der beiden Flächenstücke um 180° und setze es auf das andere oben drauf.
Das entstandene Rechteck ist 5 breit und 6 hoch, also ist $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = (6 \cdot 5) : 2 = 15$
b) Das Rechteck ist 10 breit und 11 hoch, also ist $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 10 = (11 \cdot 10) : 2 = 55$
c) Das Rechteck ist n breit und n+1 hoch, also ist $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n = (n + 1) \cdot n : 2$

****Fußball:**
Drei Brüder kaufen in einem Laden einen Fußball für 30 €. Der Ladeninhaber denkt „25 € hätten auch gereicht“ und schickt den Lehrling mit 5 € den Brüdern nach. Dieser behält 2 € und gibt jedem der Brüder 1 €. Diese haben also 27 € bezahlt, 2 € hat der Lehrling. Zu 30 € fehlt also noch 1 €. Wo ist der?

Fußball – Lösung:
Wo ist das Geld? Der Reihe nach: die Brüder bezahlen zunächst 30 €, erhalten dann aber 3 € zurück. Sie haben also 27 € bezahlt. 2 € davon hat der Lehrling behalten. Diese 2 € sind also ein Teil der bezahlten 27 €. Für den Ladeninhaber bleibt 27 € – 2 € = 25 €.

Fußball – Kommentar:
Die Summe 27 € + 2 € hat keine Bedeutung, ebenso sinnlos ist deren Vergleich mit dem ursprünglichen Preis von 30 €.

***Gefährlich:**
Zur Abhängigkeit des Bremswegs von der Geschwindigkeit hat der TÜV Daten gesammelt:

Geschwindigkeit	10 km/h	20 km/h	30 km/h	40 km/h	50 km/h	60 km/h
Bremsweg	1 m	4 m	9 m	16 m	25 m	36 m

a) Ist der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Bremsweg proportional?
b) Wie verändert sich der Bremsweg, wenn man die Geschwindigkeit verdoppelt?
c) In einem Wohngebiet ist die Geschwindigkeit 40 km/h erlaubt. Kai fährt aber 50 km/h. Um wie viel Meter verlängert sich sein Bremsweg damit? Veranschauliche diese Strecke im Klassenzimmer.

Gefährlich – Lösungen:
a) Nein, zum Doppelten der Geschwindigkeit gehört nicht das Doppelte des Bremsweges.
b) Der Bremsweg vervierfacht sich (!).
c) Sein Bremsweg verlängert sich um 9 m (!); das könnte die Länge eines Standard-Klassenzimmers sein.

***Gewicht 1:**
Mert sagt: „Ich wiege 27 kg und die Hälfte meines Gewichts.“ Wie viel wiegt Mert?

Gewicht 1 – Lösung:
Der fehlende Teil ist wieder eine Hälfte, also sind 27 kg die Hälfte des Gewichts von Mert. Mert wiegt also $2 \cdot 27$ kg = 54 kg.

Gewicht 1 – Kommentar:
Eine kleine Skizze kann helfen.

***Gewicht 2:**
Daniel sagt: „Ich wiege 27 kg und ein Drittel meines Gewichts.“ Wie viel wiegt Daniel?

Gewicht 2 – Lösung:
Der fehlende Teil zu ein Drittel sind zwei Drittel, also sind 27 kg zwei Drittel des Gewichts von Daniel. Ein Drittel wären dann 13,5 kg. Daniel wiegt also 3 · 13,5 kg = 40,5 kg.

Gewicht 2 – Kommentar:
Eine kleine Skizze kann helfen.

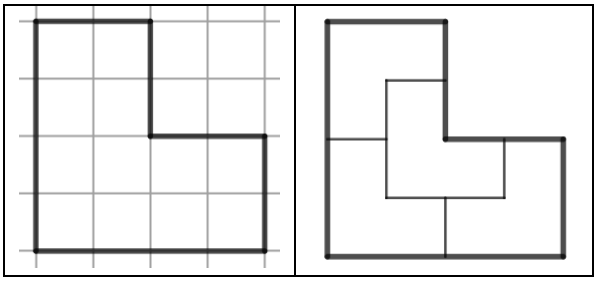
***Gewicht 3:**
Felix sagt: „Ich wiege 70% meines Gewichts und 15 kg.“ Wie viel wiegt Felix?

Gewicht 3 – Lösung:
Der fehlende Teil zu 70% sind 30%. 30% sind also 15 kg, 10% sind dann 5 kg. Felix wiegt 50 kg.

***Grabung:**
Wenn Ingmar 1 Tag braucht, um ein Loch auszugraben, das 1 Meter lang, 1 Meter breit und 1 Meter tief ist, wie viele Tage braucht er dann für ein Loch, das 3 Meter lang, 3 Meter breit und 3 Meter tief ist?

Grabung – Lösung:
Nicht 3 Tage, sondern 27 Tage.

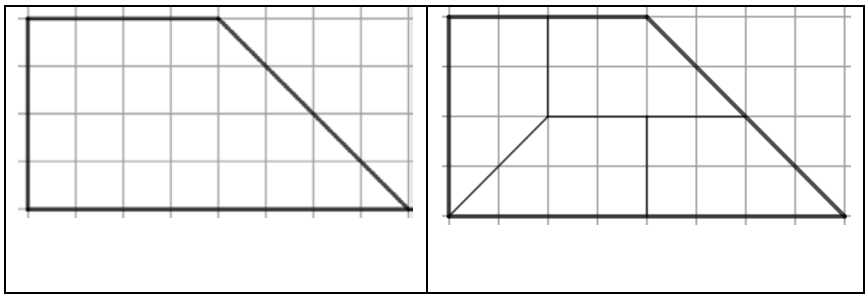
****Grundstücke 1:**
Ein hakenförmiges Grundstück – vgl. Abbildung Mitte – soll in vier deckungsgleiche Teile aufgeteilt werden.



Grundstücke 1 – Lösung:
Abbildung rechts – ohne unterlegtes Karogitter

Grundstücke 1 – Kommentar:
Stellt man die Aufgabe ohne unterlegtes Karogitter (dafür mit den Angaben „nur rechte Winkel, die kürzeren Strecken sind alle gleich lang.“), fällt das Auffinden der Lösung erfahrungsgemäß deutlich schwerer.
Die Aufgabenstellung mit unterlegtem Karogitter wird einfacher mit dem Zusatz „keine Karos zerteilen“ Insbesondere hier gilt: Wenn man sich einmal von der Hoffnung verabschiedet hat, dass man mit der Rechtecksform hinkommt, liegt die Lösung „nahe“.

****Grundstücke 2:**
Ein trapezförmiges Grundstück – vgl. Abbildung Mitte – soll in vier deckungsgleiche Trapeze aufgeteilt werden.



Grundstücke 2 – Lösung:
Abbildung rechts

Grundstücke 2 – Kommentar:
Stellt man die Aufgabe ohne die Angabe der Art der vier deckungsgleichen Stücke („Trapeze“) wird es wesentlich schwieriger, dann ist es eine ***-Aufgabe. Man wird wohl zunächst mit Dreiecken experimentieren, was aber nicht zum Ziel führt.

****Haare:**
Gibt es in Stuttgart zwei Personen, die gleich viele Haare auf dem Kopf haben?

Haare – Lösung:
Stuttgart hat etwa 600.000 Einwohner. Menschen haben bis zu 150.000 Haare auf dem Kopf. Angenommen es gäbe nur 150.001 Stuttgarter, dann könne es theoretisch passieren, dass der 1. Stuttgarter 0 Haare, der 2. Stuttgarter 1 Haar, der 3. Stuttgarter 2 Haare usw. und der 150001. Stuttgarter 150.000 Haare auf dem Kopf hätte. Also hätten alle eine unterschiedliche Anzahl. Jetzt gibt es aber noch viel mehr Stuttgarter, also sicher auch zwei mit einer gleichen Kopfhaar-Anzahl – selbst wenn man ggf. noch einen Bart mit einrechnet ☺.

Haare – Kommentar:
Strategien hierbei sind: - Den worst-case betrachten.
- Das so genannte Schubfachprinzip anwenden, dies lautet z.B. so: Wenn n+1 Kugeln in n Schubfächern verteilt werden sollen, dann liegt in mindestens einem Schubfach mehr als eine Kugel.

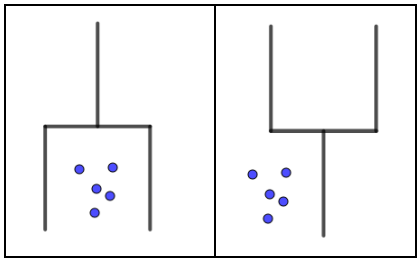
***Hühner:**
Wenn drei Hühner in drei Tagen drei Eier legen, wie viele Eier legt dann ein Huhn in einem Tag?

Hühner – Lösungen:
Ein Huhn legt in drei Tagen ein Ei. Also legt ein Huhn in einem Tag nicht ein Ei, sondern nur ein Drittel Ei.

****Kamele:**
Ein alter Araber bestimmt vor seinem Tode, dass der erste Sohn die Hälfte, der zweite Sohn den dritten und der dritte Sohn den neunten Teil seiner Kamele erhalten soll. Da er 17 Kamele hinterließ, konnten sich die Söhne nicht einigen. Ein Derwisch, der mit einem alten Kamel vorbeikam, half ihnen und sagte: „Ich will euch mein Kamel leihen.“ Nun nahm jeder der Söhne von den 18 Kamelen seinen Teil, der erste Sohn 9 Kamele, der zweite Sohn 6 Kamele und der dritte Sohn 2 Kamele.
Damit waren 17 der 18 Kamele verteilt und der Derwisch zog mit seinem übrig gebliebenen Kamel weiter. Hier stimmt doch etwas nicht! Aber was?

Kamele – Lösung:
Die drei Teile, die der alte Araber seinen Söhnen bestimmt hat, geben zusammen kein Ganzes. Es ist nämlich 1/2 + 1/3 + 1/9 = 17/18. Damit bleibt beim Verteilen natürlich etwas übrig.

***Kehrschaufel:**
Vier Hölzer stellen eine Kehrschaufel dar, in der Schaufel liegt etwas Dreck – vgl. Abbildung Mitte. Lege zwei Hölzer so um, dass der Dreck außerhalb der Schaufel liegt.



***Kehrschaufel – Lösung:**
Abbildung rechts

***Knöpfe:**
Nils hat sechs Brüder. Alle Jungen der Familie von Nils haben jeweils sechs Hemden. Jedes Hemd hat sechs Knöpfe. Wie viele Knöpfe sind es insgesamt?

Knöpfe – Lösung:
Es sind 7 (!) Jungen, also $7 \cdot 6 \cdot 6 = 252$ Knöpfe.

Knöpfe – Kommentar:
Beachte die so genannte Produktregel der Kombinatorik (nicht addieren!)

***Körper:** (Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)
a) Ein geometrischer Körper hat fünf Ecken und acht Kanten. Welcher könnte es sein?
b) Ein Rechteck rotiert schnell um eine seiner Seiten. Welcher Körper „entsteht“?

Körper – Lösung:
a) Es könnte z.B. eine quadratische Pyramide sein.
b) Es „entsteht“ ein Zylinder.

Körper – Kommentar:
Zu a) Das kann man mit Prismen variieren.
Zu b) Das kann man mit rechtwinkligen Dreiecken variieren.

***Kreis:**
Laura hat mithilfe eines Topfdeckels auf einem Papier einen Kreis gezeichnet und diesen dann ausgeschnitten. Jetzt hätte sie gerne den Mittelpunkt dieses Kreises.
Suche möglichst viele Möglichkeiten, wie Laura diesen Mittelpunkt finden kann.

Kreis – Lösungen:
- Laura kann den Kreis zweimal falten, jeweils Kreisbogen auf Kreisbogen.
- Laura kann zwei Mittelsenkrechten zu jeweils zwei Kreispunkten zeichnen, deren Schnittpunkt ist der Kreismittelpunkt.
- Laura kann ein rechtwinkliges Dreieck zeichnen, dessen Ecken auf dem Kreis liegen – die Seite gegenüber dem rechten Winkel ist ein Durchmesser des Kreises (Kehrsatz des THALES). Sie kann jetzt die Mitte des Durchmessers ausmessen oder diese Prozedur mit einem anderen rechtwinkligen Dreieck wiederholen.
- Laura kann die Kreisscheibe so in ein Koordinatensystem legen, dass der Kreis die Koordinatenachsen berührt. Dann kann sie um den Kreis ein Quadrat zeichnen, der Schnittpunkt der Diagonalen ist der Kreismittelpunkt.

*****Kryptogramm:** Jeder Buchstabe steht für eine Ziffer von 0 bis 9, unterschiedliche Buchstaben bedeuten unterschiedliche Ziffern. Keine Zahl beginnt mit einer 0.

a)	b)	c)	d)	e)
ABCDE + BCDE + CDE + DE + E ------- = AAAAA	ZWEI + ZWEI ------ = VIER	EINS + EINS ------ = ZWEI	SEND + MORE ------- = MONEY	EINS + EINS + EINS + EINS ------ = VIER

Kryptogramm - Lösungen:

a)	b)	c)	d)	e)
52487 + 2487 + 487 + 87 + 7 ------- = 55555	1397 + 1397 ------ = 2794	1407 + 1407 ------ = 2814	9567 + 1085 ------ = 10652	1329 + 1329 + 1329 + 1329 ------ = 5316

Kryptogramm – Kommentar:
Kryptogramme sind ganz ganz schwierig, man wird auch mit Lösungsansätzen zufrieden sein und viel loben und Hilfen geben.
Hinweise:
Zu a) Diese erste Aufgabe sollte man mit den Schülerinnen und Schüler gemeinsam machen, damit klar wird wie man sich hier vorwärts arbeitet. Hier eine Reihe von Überlegungen:
A kann nur 0 oder 5 sein – wegen der letzten Spalte, 0 kommt für A nicht in Frage wegen der Regel „keine Zahl beginnt mit 0“. A ist also 5.
Für E kommt jetzt nur noch in Frage 1; 3; 7 oder 9 und man muss das der Reihe nach ausprobieren, ob man „durchkommt“.
Das kann man mit der Lerngruppe arbeitsteilig erledigen. Es bleibt nur die 7 für E übrig.
Für D bleibt dann nur noch 3 oder 8, auch das muss man ausprobieren, es bleibt nur die 8 für D.
Für C bleibt nur die 4.
Für B bleibt nur die 2.

Zu b) Evtl. ein Tipp: Kümmere dich zuerst um E.
E kann nur 0 oder 9 sein. Hier gibt es insgesamt 12 Lösungen, eine davon könnten die Schülerinnen und Schüler gut selbst finden.

Zu c) Evtl. ein Tipp: E muss klein sein (1 bis 4), denn es gibt keinen Übertrag. Diese Möglichkeiten einfach ausprobieren und schauen, ob man „durchkommt“.
Hier gibt es insgesamt 11 Lösungen, eine davon könnten die Schülerinnen und Schüler gut selbst finden.

zu d) eine Hilfe geben: E = 5 und Y = 2

zu e) eine Hilfe geben: S = 9

****Lichtschalter:**
Im Keller befinden sich drei Lichtschalter L1, L2 und L3, die mit drei verschiedenfarbigen Glühbirnen auf dem Dachboden verbunden sind. Diese Glühbirnen werden beim Leuchten warm. Johanna ist im Keller und will nur einmal auf den Dachboden gehen. Wie kann Johanna herausfinden, welcher Schalter zu welcher Glühbirne gehört?

Lichtschalter – Lösung:
1.) Den Schalter L1 anschalten und eine Zeit lang warten.
2.) Den Schalter L1 ausschalten.
3.) Den Schalter L2 anschalten.
4.) Jetzt auf den Dachboden gehen.
5.) Die Glühbirne, die brennt, gehört zum Schalter L2.
6.) Die Glühbirne, die warm ist und nicht brennt, gehört zum Schalter L1.
7.) Die Glühbirne, die kalt ist und nicht brennt, gehört zum Schalter L3.

****Magische Quadrate 1:**
Bei einem magischen 3-3-Quadrat sind die Ziffern 1; 2; 3; …; 9 so in die neun Felder einzutragen, dass die Summe der drei Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch entlang der beiden Diagonalen immer dieselbe ist, wir nennen dies die *magische Summe*.
a) Wie muss diese magische Summe lauten?
b) Fülle die restlichen sieben Felder aus – vgl. Abbildung Mitte.

	9	
	1	

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Magische Quadrate 1 – Lösung:
a) 1 + 2 + 3 … + 9 = 45, die magische Summe muss also 15 sein.
b) z.B. vgl. Abbildung rechts

Magische Quadrate 1 – Kommentar: Das so genannte Lo-Shu-Quadrat ist das älteste bekannte magische Quadrat (2800 v. Chr., China)

****Magische Quadrate 2:**
Bei einem magischen 4-4-Quadrat sind die Ziffern 1; 2; 3; …; 16 so in die 16 Felder einzutragen, dass die Summe der vier Zahlen in jeder Zeile, in jeder Spalte und auch entlang der beiden Diagonalen immer dieselbe ist, wir nennen dies die *magische Summe*.
a) Wie muss die magische Summe lauten?
b) Fülle die restlichen zehn Felder aus – vgl. Abbildung Mitte.

16			
	10	11	
	6		
4			1

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

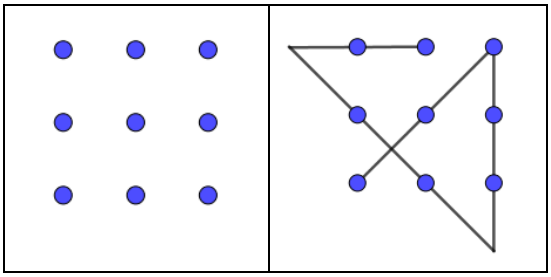
Magische Quadrate 2 – Lösung:
a) 1 + 2 + 3 … + 16 = 136, die magische Summe muss also 34 lauten.
b) z.B. vgl. Abbildung rechts

Magische Quadrate 2 – Kommentar:
Dieses magische Quadrat findet sich in Melencolia 1, einem berühmten Kupferstich von Albrecht Dürer (1514).

****Mehr Prozente:**
Die Vollmilch-Schokolade einer bestimmten Marke hat einen Kakaoanteil von 40%. Die Bitter-Schokolade dieser Marke hat einen Kakaoanteil von 60%.
Hat die Bitter-Schokolade jetzt 20% mehr Kakaoanteil oder 50% mehr Kakaoanteil als die Vollmilch-Schokolade?

Mehr Prozente – Lösung:
Es gibt hier zunächst kein „richtig“ oder „falsch“.
Damit aber deutlich wird, was man meint, spricht man im ersten Fall von Prozentpunkten.
40% + 20% = 60% … der Kakaoanteil hat sich um 20 Prozentpunkte erhöht
40% + 50% von 40% = 40% + 20% = 60% … der Kakaoanteil hat sich um 50 Prozent erhöht

****Neun Punkte:** Neun Punkte – vgl. Skizze Mitte – sollen mit einem zusammenhängenden, aus 4 Teilen bestehenden Streckenzug verbunden werden.
Kein Punkt darf zweimal von dem Streckenzug erfasst werden.
Neun Punkte – Lösung: Skizze rechts



Neun Punkte – Kommentar: Man muss (!) über die Zeichnung (metaphorisch: über den Tellerrand!) hinausgehen.

****Noten:**
Studienrat Mildemann macht seine Noten so: Er wirft einen roten und einen blauen Würfel und nimmt die kleinere der beiden Augenzahlen als Note. Beispiele: (2;4): Note 2; (5;1): Note 1.
a) Wie sind die Chancen ungefähr, bei Herrn Mildemann eine 1 oder wenigstens eine 2 zu bekommen?
b) Mit welchem Notendurchschnitt kann die Klasse von Herrn Mildemann etwa rechnen?
[ggf. Hinweis der Lehrkraft, nachdem die Tabelle vorhanden ist: Wir denken uns die Klasse zu 36 Schülern und dass jedes der 36 Würfelergebnisse einmal vorkommt – das ist eine plausible Annahme!]

Noten – Lösung:
a) In 20 von 36 Fällen gibt es eine 1 oder eine 2. Die Chancen stehen also gut, sie sind größer als 50%!
b) Wertet man die Tabelle aus, kommt man auf einen Notendurchschnitt von ca. 2,5 (91/36).

(1;1): 1	(1;2): 1	(1;3): 1	(1;4): 1	(1;5): 1	(1;6): 1
(2;1): 1	(2;2): 2	(2;3): 2	(2;4): 2	(2;5): 2	(2;6): 2
(3;1): 1	(3;2): 2	(3;3): 3	(3;4): 3	(3;5): 3	(3;6): 3
(4;1): 1	(4;2): 2	(4;3): 3	(4;4): 4	(4;5): 4	(4;6): 4
(5;1): 1	(5;2): 2	(5;3): 3	(5;4): 4	(5;5): 5	(5;6): 5
(6;1): 1	(6;2): 2	(6;3): 3	(6;4): 4	(6;5): 5	(6;6): 6

Noten – Kommentar: Strategie: alle Fälle systematisch „abklappern“.
Diese Aufgabe können Schülerinnen und Schüler gut ohne das Instrumentarium der Stochastik lösen. Ein bisschen „Starthilfe“ in Form des Tabellenanfangs wird der Lehrer allerdings geben müssen.
Man sollte keine unbekannten Begrifflichkeiten (Wahrscheinlichkeit, Anzahl der günstigen Fälle geteilt durch Anzahl der möglichen Fälle usw.) verwenden.

*****Paradies-Hölle:**
An einer Weggabelung führt ein Weg nach links und einer nach rechts. Einer der beiden Wege führt ins Paradies, der andere in die Hölle. An der Weggabelung stehen zwei Brüder. Man weiß, dass der eine stets die Wahrheit sagt, der andere aber immer lügt. Man weiß nicht, welcher der beiden die Wahrheit sagt und welcher lügt. Man darf einem von ihnen eine einzige Frage stellen, um den Weg ins Paradies zu finden. Wie muss man fragen, damit man sicher ins Paradies kommt?

Paradies-Hölle – Lösung:
Man fragt einen der beiden: “Was würde dein Bruder auf die Frage antworten, in welche Richtung es ins Paradies geht?“ Es gibt zwei Möglichkeiten:
1.) Der Weg nach **links** führt **ins Paradies**.
Haben wir den Ehrlichen gefragt, bekommen wir die Antwort „**Nach rechts**“.
Haben wir den Lügner gefragt, bekommen wir auch die Antwort „**Nach rechts**“.
2.) Der Weg nach **rechts** führt **ins Paradies**.
Haben wir den Ehrlichen gefragt, bekommen wir die Antwort „**Nach links**“.
Haben wir den Lügner gefragt, bekommen wir auch die Antwort „**Nach links**“.
Also: Man höre sich die Antwort an und nehme dann die andere Richtung.

Paradies-Hölle – Kommentar:
Warum „funktioniert“ das? Bei der Antwort auf diese Frage ist auf jeden Fall „genau eine Lüge enthalten“.
Man kann mit den Schülerinnen und Schülern die Situation mit verteilten Rollen durchspielen.
Zunächst würde man größerer Beträge darauf verwetten, dass es keine solche Frage gibt.

***Prozente:**
Was ist mehr: 30% von 40% oder 40% von 30%?

Prozente - Lösung:
Es ergibt sich beides Mal 12%.
3/10 von 4/10 = 3/10 · 4/10 = 12/100 und 4/10 von 3/10 = 4/10 · 3/10 = 12/100.

***Quadratzahlen:**
Der Vier-Quadratzahlensatz von LAGRANGE lautet:
Jede natürliche Zahl kann als Summe von vier Quadratzahlen geschrieben werden.
Dieser Satz ist eine Steilvorlage für Übungsaufgaben zu den Quadratzahlen und zum Kopfrechnen.
Schreibe 123 (die Auswahl an Ausgangszahlen ist grenzenlos ☺) als Summe von vier Quadratzahlen.

Quadratzahlen – Lösung:
$8^2 + 7^2 + 3^2 + 1^2 = 64 + 49 + 9 + 1 = 123$

****Richtig oder falsch?** (Begründung oder Gegenbeispiel)
a) Beim Multiplizieren von zwei Kommazahlen bleibt das Ergebnis gleich, wenn man beim 1. Faktor das Komma um eine Stelle nach rechts und beim 2. Faktor das Komma um eine Stelle nach links verschiebt.
b) Beim Dividieren von zwei Kommazahlen bleibt das Ergebnis gleich, wenn man beim Dividenden (= 1. Zahl) das Komma um eine Stelle nach rechts und beim Divisor (= 2. Zahl) das Komma um eine Stelle nach links verschiebt.
c) Man addiert zwei Brüche, indem man die beiden Zähler und die beiden Nenner addiert.
d) Immer wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich lang sind, dann hat es einen rechten Winkel.
e) Immer wenn ein Viereck vier rechte Winkel hat, dann ist es ein Quadrat.
f) Bei jedem Rechteck halbieren die Diagonalen die Eckwinkel.
g) Es gibt kein Dreieck mit zwei rechten Winkeln.
h) Für zwei beliebige Zahlen a und b ist a + b = b + a.
i) Für zwei beliebige Zahlen ist a · (b + c) immer dasselbe wie a · b + a · c.
j) Für zwei beliebige Zahlen a und b ist a^b immer dasselbe wie b^a.

Richtig oder falsch? – Lösungen:
a) richtig; Begründung: Das bedeutet also 1. Faktor mal 10 und 2. Faktor :10. Das gleicht sich aus wegen der Kommutativität der Multiplikation. Schülerinnen und Schüler würden den Sachverhalt ggf. anhand eines konkreten Zahlenbeispiels begründen.
b) falsch; Gegenbeispiel: 40,00 : 20,00 = 2 ist nicht dasselbe wie 400,0 : 2,000 = 200
c) falsch; Gegenbeispiel: 1/2 + 1/2 = 1 ist nicht dasselbe wie (1+1) / (2 +2) = 2/4 = 1/2.
d) offensichtlich falsch – geeignete Zeichnung
e) falsch; es könnte auch ein Rechteck mit unterschiedlichen Seitenlängen sein
f) falsch; man denke sich ein sehr langes und wenig breites Rechteck
g) richtig; die beiden freien Schenkel wäre dann ja parallel, sie würden sich nicht in einem Dreieckspunkt schneiden, ggf. kann man auch mit dem Winkelsummensatz argumentieren
h) richtig; Grundvorstellung der Addition

i) richtig; die Regel ist bekannt als „Ausmultiplizieren“, ggf. veranschaulichen mit einem unterteilten Rechteck und dessen Inhalt o.ä.
j) falsch; Gegenbeispiel $3^2 = 9$ ist nicht $2^3 = 8$.

Richtig oder falsch? – Kommentar:
Das ist ein beliebtes Format zur Durchdringung von Sachverhalten.

***Rollende Körper:**
Ein Körper liegt auf einer Ebene und wird angestoßen.
a) Er rollt gerade aus.
b) Er rollt im Kreis.
Um welchen Körper könnte es sich handeln?

Rollende Körper – Lösungen:
a) Ein Zylinder, eine Kugel
b) Ein Kegel

*****Schachbrett:**
Aus einem Schachbrett sind ein Eck-Feld und das diagonal gegenüberliegende herausgesägt, so dass also noch 62 Felder übrig sind. Kann man diese mit rechteckigen Dominosteinen (diese decken immer zwei Felder ab) lückenlos und ohne Überhang abdecken?

Schachbrett – Lösung:
Nein, das geht nicht. Diagonal gegenüber liegende Felder haben dieselbe Farbe, es gibt also entweder 30 weiße und 32 schwarze oder umgekehrt. Ein Dominostein deckt aber immer gleichzeitig ein weißes und ein schwarzes Feld ab.

Schachbrett – Kommentar:
Strategie: ein Problem „verkleinern“. Man kommt durch Probieren zur Auflösung, wenn man z.B. ein 4 x 4-Schachbrett untersucht.

***Schätzfragen:**
Wie viel wiegt das?
a) Ein DIN A4 Blatt normales Papier (= 80 g/m^2)
b) Das Schulbuch Lambacher Schweizer 7 (Klett 2016)
c) Ein Päckchen Papiertaschentücher (10 Stück, normale Größe)
d) Eine 2 € Münze

Schätzfragen – Lösungen:
a) 5 g
b) 696 g
c) 26 g
d) 8,5 g

Schätzfragen – Kommentar:
Eignet sich als Wettspiel zum Stundenabschluss: wer am besten geschätzt hat, bekommt einen (kleinen) Preis. Weitere Anregungen: Welchen Flächeninhalt hat die Tafel? Wie hoch ist das Klassenzimmer? usw. (Ein Zollstock gehört sowieso zur Grundausrüstung jedes Mathematiklehrers ☺.)

***Sechs-sechs-sechs:**
Wie kann man die Zahl 666 um die Hälfte größer machen, ohne sie durch eine Rechnung zu verändern?

Sechs-sechs-sechs – Lösung:
Indem man die Zahl (bzw. seinen Kopf) umdreht.

***Spaghetti:**
Mariam kocht Spaghetti, Kochzeit fünf Minuten. Mariam stehen zwei Sanduhren zur Verfügung. Die erste braucht genau vier Minuten um ganz durchzulaufen, die zweite genau drei Minuten. Wie kann Mariam mit Hilfe dieser beiden Sanduhren die Kochzeit abmessen?

Spaghetti – Lösungen:
Mariam setzt die Spaghetti auf und lässt beide Sanduhren gleichzeitig laufen. Wenn die 3-Minuten-Sanduhr durchgelaufen ist, dreht sie sie um. Nach vier Minuten, wenn die 4-Minuten-Sanduhr fertig ist, dreht sie die 3-Minuten-Sanduhr noch mal um und hat so noch die letzte Minute. Insgesamt hat sie die Spaghetti dann 5 Minuten gekocht.

***Spiegelung:** (Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)
a) Spiegle ein Dreieck an seiner längsten Seite. Welche Gesamtfigur ergibt sich?
b) Spiegle ein rechtwinkliges Dreieck an seiner kürzesten Seite. Welche Gesamtfigur ergibt sich?

Spiegelung – Lösungen:
a) Ein Drachenviereck
b) Ein gleichschenkliges Dreieck

***Stimmt’s?**
a) 50% von 40% sind 30%.
b) Eine Million hat neun Nullen.
c) 1 Meter sind 100 Zentimeter.
d) 1 Ar sind 100 Quadratmeter.
e) 1 Liter sind 100 Kubikzentimeter.
f) Der Flächeninhalt eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist $a \cdot b$.
g) Der Umfang eines Rechtecks mit den Seiten a und b ist $a + b$.
h) Man berechnet 20% von 200 €, indem man 200 € durch 20 teilt.
i) Ein Fünftel ist dasselbe wie 25%.
j) Null Komma neun plus null Komma zehn ist null Komma neunzehn.
k) Eine Tonne sind 1000 Gramm.
l) Die Hälfte von einer Hälfe ist ein Viertel.
m) Ein Viertel von einem Viertel ist ein Achtel.
n) 1 plus 2 mal 3 plus 4 ist 5.

Stimmt’s? – Lösungen:
a) falsch, es sind 20%
b) falsch, 6 Nullen
c) richtig
d) richtig
e) falsch, es sind 1000 Kubikzentimeter
f) richtig
g) falsch, er ist $2 \cdot (a + b)$

h) falsch, indem man durch 5 teilt
i) falsch, es ist dasselbe wie 20%
j) eher falsch, wenn man null Komma zehn versteht als 0,10, das ist eben eine ungute Sprechweise
k) falsch, es sind 1000 Kilogramm
l) richtig
m) falsch, es ist ein Sechzehntel
n) falsch, es ergibt sich 11 (Punkt vor Strich beachten!)

Stimmt's? – Kommentar:
Das ist ein beliebtes Format zur Reaktivierung von Wissen.

****Summe:**
Jonathan berechnet der Reihe nach die folgenden Summen

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=$

a) Rechne die Summen aus.
b) Wann hat Jonathan die Zahl 1 erreicht?

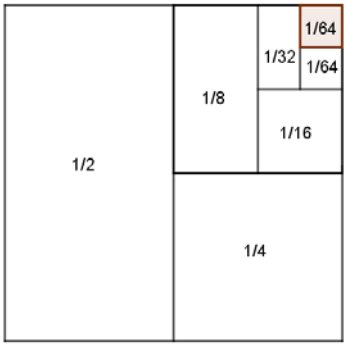
Summe – Lösung:
a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\frac{15}{16}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$



b) Er erreicht die Zahl 1 nie. Es fehlt zur 1 jeweils immer noch einmal der letzte Summand der jeweiligen Summe. Man kann diese Situation – wie in der Abbildung gezeigt – veranschaulichen.

Summe – Kommentar:
Das ist schon bemerkenswert –
es kommt immer noch etwas dazu und doch wird die Zahl 1 nicht erreicht oder gar überschritten.

***Teilbar:**
Setze für ! und ? Ziffern ein, sodass die Zahl 123!5678?
a) durch 5 und 9 teilbar ist
b) durch 4 und 9 teilbar ist
c) durch 2; 3; 4; 5 und 6 teilbar ist
Teilbar – Lösungen:
a) 123856785

b) 123956784
c) 123456780

***Telefonbuch:**
Simon sucht sich im Stuttgarter Telefonbuch zufällig irgendeinen Telefon-Anschluss heraus, den Nora herausfinden soll, z.B. *Alois Müller in 70199 Stuttgart, Spechtweg 43*. Nora darf nur solche Fragen stellen, die Simon mit *ja* oder *nein* beantworten kann. Mit wie vielen Fragen kann Nora auskommen?

Telefonbuch – Lösung:
Wir schätzen die Anzahl der im Telefonbuch abgedruckten Telefonanschlüsse auf etwa 250.000. Berta kommt mit etwa 18 Fragen aus, denn 2^{18} ist ca. 250.000. Sie geht zunächst in die Mitte des Telefonbuchs und fragt, ob der ausgewählte Anschluss vor oder nach der Mitte liegt. Damit kommen nur noch ca. 125.000 Anschlüsse in Frage! Dann halbiert sie die angezeigte Hälfte wieder usw.

Telefonbuch – Kommentar:
Hier lohnt sich eine Durchführung mit der Lerngruppe auf jeden Fall!
Man kann z.B. ein Mathematikbuch nehmen und eine Aufgabe auf irgendeiner Seite auswählen. Wenn das Buch 200 Seiten hat und auf jeder Seite fünf Aufgaben stehen, kommt man mit 10 Fragen aus.

Viele Teiler:
Wie lautet die kleinste Zahl, die durch 2; 3; 4; 5; 6; und 7 teilbar ist?

Viele Teiler – Lösung:
$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$ ist zu groß. $3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 = 420$ ist „automatisch“ auch 2 und 6 teilbar.

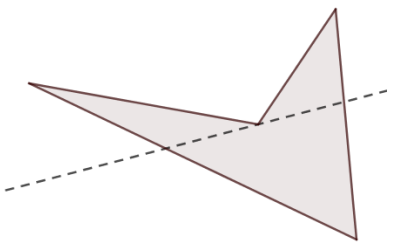
*Viereck 1:
Alle vier Seiten eines Vierecks sind gleich lang, es ist aber kein Quadrat. Kann das sein?

Viereck 1 - Lösung:
Ja, es ist eine Raute.

*Viereck 2:
Die gegenüber liegenden Seiten eines Vierecks sind parallel, es ist aber kein Rechteck. Kann das sein?

Viereck 2 - Lösung:
Ja, es ist ein Parallelogramm.

*Viereck 3:
Zeichne ein Viereck, das sich mit einem geraden Schnitt in drei Dreiecke zerteilen lässt.



Viereck 3 – Lösung:
Vgl. Abbildung rechts: ein Viereck mit einspringender Ecke, ohne die geht’s nicht

*Vier Töchter:

Eine Mutter hat 4 Töchter. Jede Tochter hat einen Bruder. Wie viele Kinder hat die Mutter insgesamt?

Vier Töchter - Lösung:
Die Mutter hat fünf Kinder, nämlich vier Töchter und einen Sohn (!).

****Waageproblem 1**:**
Auf einem Tisch liegen 10 Stapel zu jeweils 10 Schokoladentafeln. Alle Tafeln wiegen 100g mit Ausnahme der Tafeln eines einzigen Stapels, die jeweils 110g wiegen.
Wie kann man durch eine einzige Wägung mit einer Anzeigen-Waage den Stapel mit den besonderen Tafeln sicher herausfinden?

Waageproblem 1 – Lösung:
Man nimmt vom 1. Stapel 1 Tafel, vom 2. Stapel 2 Tafeln usw. und legt alle 55 Tafeln zusammen auf die Waage. Würden alle Tafeln 100 g wiegen, wäre die Anzeige 5500 g.
Wenn die Anzeige 5510 g lautet, dann sind die 110 g- Tafeln im 1. Stapel, denn auf der Waage liegt eine davon.
Wenn die Anzeige 5520 g lautet, dann sind die 110 g-Tafeln im 2. Stapel, denn auf der Waage liegen zwei davon usw.

****Waageproblem 2**:**
Auf einem Tisch liegen 5 Stapel zu jeweils 20 Schokoladentafeln. Alle Tafeln in einem Stapel sind gleich schwer, sie wiegen 100 g oder 110 g.
Wie kann man durch eine einzige Wägung mit einer Anzeigen-Waage herausfinden, welche Stapel Tafeln mit 100 g und welche Stapel Tafeln mit 110 g enthalten?

Waageproblem 2 – Lösung:
Man nimmt vom 1. Stapel 1 Tafel, vom 2. Stapel 2 Tafeln, vom 3. Stapel 4 Tafeln, vom 4. Stapel 8 Tafeln und vom 5. Stapel 16 Tafeln und legt alle 31 Tafeln zusammen auf die Waage.
Würden alle Tafeln 100 g wiegen, wäre die Anzeige 3100 g.
Wenn die Anzeige 3110 g lautet, dann sind nur im 1. Stapel 110 g-Tafeln.
Wenn die Anzeige 3120 g lautet, dann sind nur im 2. Stapel 110 g-Tafeln.
Wenn die Anzeige 3130 g lautet, dann sind nur im 1. Stapel und 2. Stapel 110 g-Tafeln.
Wenn die Anzeige 3140 g lautet, dann sind nur im 3. Stapel 110 g-Tafeln.
…
Wenn die Anzeige 3200 g lautet, dann sind nur im 2. Stapel und 4. Stapel 110 g-Tafeln.
…
Wenn die Anzeige 3310 g lautet, dann sind nur im 1. Stapel, 3. Stapel und 5. Stapel 110 g-Tafeln.
…
Wenn die Anzeige 3410 g lautet, dann sind in allen fünf Stapeln 110 g-Tafeln.

Waageproblem 2 – Kommentar:
Die Lösung vom Waageproblem 1 funktioniert nicht, man kann aber durch sukzessives Probieren auf die richtige Lösung kommen. Die ist ja ganz schön „tricky“ ☺.

****Waageproblem 3**:**
Von neun äußerlich gleichen Kugeln K1, K2 … K9 ist genau eine schwerer als die acht andern. Diese soll sicher durch zwei Wägungen mit einer Balkenwaage gefunden werden.

Waageproblem 3 – Lösung:

Lege K1, K2 und K3 auf die linke Seite der Balkenwaage, lege K4, K5 und K6 auf die rechte Seite. Jetzt gibt es drei Möglichkeiten:
- Links schwerer: die gesuchte Kugel ist K1, K2 oder K3 → zweite Wägung: links K1, rechts K2 → bei Gleichgewicht ist K3 die gesuchte Kugel
- Rechts schwerer: die gesuchte Kugel ist K4, K5 oder K6 → zweite Wägung: links K4, rechts K5 → bei Gleichgewicht ist K6 die gesuchte Kugel
- Gleichgewicht: die gesuchte Kugel ist K7, K8 oder K9 → zweite Wägung: links K7, rechts K8 → bei Gleichgewicht ist K9 die gesuchte Kugel

Waageproblem 3 – Kommentar:
Man muss sich von der Idee verabschieden, die gesuchte Kugel eventuell schon nach dem ersten Wägen benennen zu können. Hier geht es strategisch gesehen um ein schrittweises Eingrenzen der Lösung.

****Wassergraben:**
Ein Schloss steht auf einer Wiese mit quadratischem Grundriss und ist von einem Wassergraben umgeben, dessen Außenbegrenzung ebenfalls quadratisch ist. Der Graben ist gleichermaßen 3 m breit. Ein Ritter möchte zu seiner Liebsten, aber die Brücke ist hochgezogen. Er findet zwei tragfähige Balken, die 3 m lang sind. Kann er sich helfen?

Wassergraben – Lösung:
Er legt einen Balken über eine Ecke und auf diesen im rechten Winkel dann den zweiten hin zur Ecke der Wiese. Dass es reicht zeigt z.B. eine maßstäbliche Zeichnung.

****Wolf-Ziege-Kohlkopf:**
Ein Fährmann hat eine Ziege, einen Wolf und einen Kohlkopf. Er möchte alle drei und sich selbst über den Fluss bringen, kann aber nur immer eins von den dreien auf der Fähre mitnehmen. Das Problem ist: Wenn er nicht dabei ist, wird die Ziege den Kohlkopf oder der Wolf die Ziege fressen!
Wie stellt er es an, dass das nicht passiert?

Wolf-Ziege-Kohlkopf - Lösung:
Zuerst nimmt der Fährmann die Ziege mit ans andere Ufer und fährt alleine wieder zurück. Dann fährt er mit dem Wolf ans andere Ufer und nimmt die Ziege wieder mit zurück. Danach fährt er den Kohlkopf ans andere Ufer und fährt alleine zurück. Zum Schluss fährt er mit der Ziege ans andere Ufer.

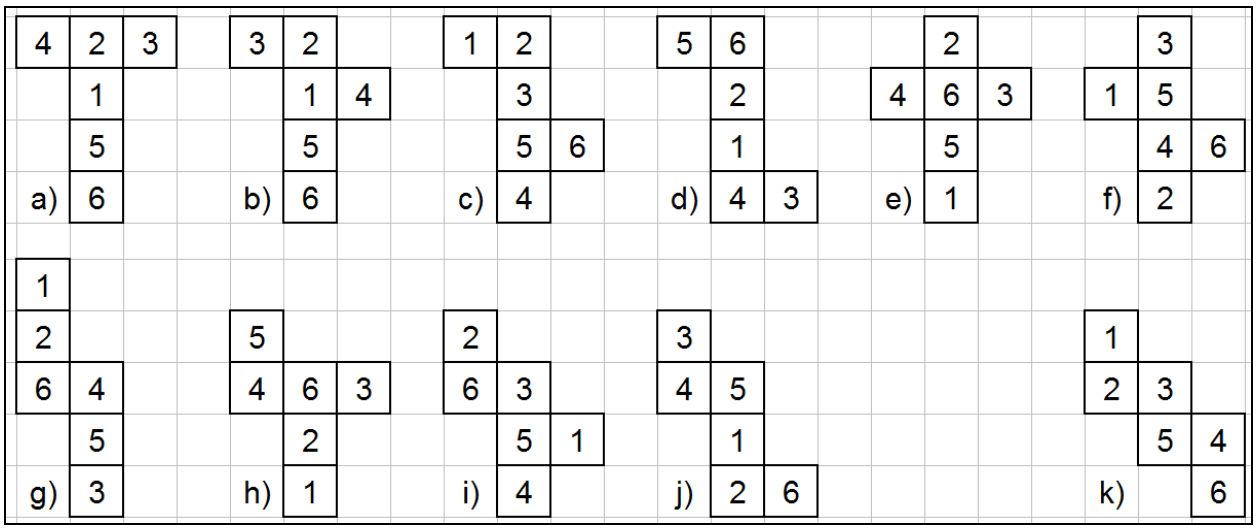
Wolf-Ziege-Kohlkopf - Kommentar:
Strategie: Vorwärtsarbeiten – weiterführende Feststellungen treffen, z.B. diese: nur den Wolf und den Kohlkopf kann er zusammen alleine lassen!
Dass der Fährmann die Ziege einmal mit zurück nimmt, ist der kontraintuitive Clou an diesem Rätselklassiker und eine psychologische Gedankenhürde.

***Würfel:** (Die Aufgaben sollen „im Kopf“ gelöst werden.)
27 gleiche Würfel werden zu einem großen Würfel zusammengesetzt. Der große Würfel wird außen rot angemalt.
a) Wie viele der 27 kleinen Würfel sind zu 50% rot angemalt?
b) Welcher Anteil der Würfel hat zwei rote Quadrate?
c) Gibt einen gänzlich unbemalten Würfel?
Würfel – Lösungen:
a) 8 Würfel
b) 12/27 = 4/9

c) Ja, einen, der in der Mitte.

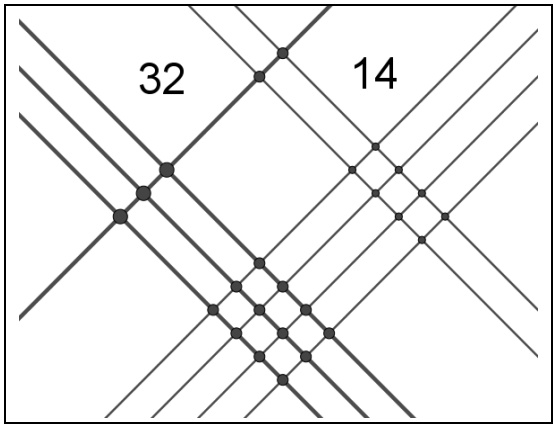
Würfel – Kommentar:
Schülerinnen und Schüler können weitere solche Aufgaben erfinden, ggf. auch an einem 4 x 4 x 4-Würfel.

***Würfelnetze:**
Bei Spielwürfeln müssen gegenüberliegenden Ziffern zusammen immer 7 ergeben. Prüfe, ob die Würfelnetze korrekt beschriftet sind.



***Würfelnetze – Lösungen:**
a); b); c); e); f); g); h) und i) sind korrekt beschriftet, d); j) und k) nicht.

****Zeichnerisches Multiplizieren:**
Wie löst man die Multiplikationsaufgabe 32 · 14 durch eine Zeichnung, ohne das „kleine Einmal-Eins“?
Wir betrachten die Abbildung rechts.

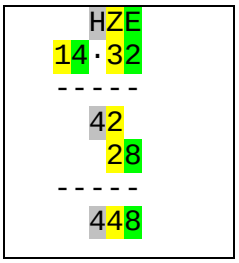


Man zeichnet die Zahl 32 so:
3 dicke Parallelen und 2 dünne Parallelen in einigem Abstand davon von links oben nach rechts unten.

Man zeichnet die Zahl 14 so:
1 dicke Gerade und 4 dünne Parallelen in einigem Abstand davon von rechts oben nach links unten.

Jetzt zählt man die Schnittpunkte:
8 Schnittpunkte bei „dünn-dünn“ → **8 Einer**
12 + 2 = 14 = 10 + 4 Schnittpunkte bei „dünn-dick“ bzw. „dick-dünn“ → **4 Zehner** und 1 Übertrag
3 Schnittpunkte bei „dick-dick“ + 1 Übertrag → **4 Hunderter**
Ergebnis: 32 · 14 = **448**
a) Führe dieses Verfahren durch für 45 · 23.
b) Gelingt dies auch für 123 · 45?
c) Oder sogar für 234 · 345?
d) Vergleiche mit dem Verfahren der schriftlichen Multiplikation.

Zeichnerisches Multiplizieren – Lösung:
a) 1035
b) 5535
c) 80730
d) Es ist genau dasselbe wie bei der schriftlichen Staffelrechnung
3 Zehner mal 4 Einer ergibt 12 Zehner, das sind 2 Zehner und 1 Hunderter,
3 Zehner mal 1 Zehner ergibt 3 Hunderter, zusammen sind es also **4 H**underter,
2 Einer mal 4 Einer ergibt **8 E**iner und 2 Einer mal 1 Zehner ergibt 2 Zehner,
zusammen also **4 Z**ehner.
Anstelle des Abzählens, wie viele Punkte die „Rechtecke" enthalten, kann man natürlich das „kleine Einmal-Eins" verwenden.



Zeichnerisches Multiplizieren – Kommentar:
Man kann (mit weiteren Beispielen, bitte nicht mehr als dreistellige Faktoren) eine Doppelstunde mit diesem Thema füllen, wenn man möchte ☺. Anstelle von dünnen und dicken Strichen wird man – insbesondere bei dreistelligen Faktoren – mit Farben arbeiten. Hier muss man schauen, dass man den Überblick über die Bedeutung der einzelnen „Rechtecke" (Einer? Zehner? Hunderter? usw.) nicht verliert.
Wenn der Überblick gesichert ist, dann ist es unerheblich, ob man auf kariertem Papier und mit dem Geodreieck arbeitet oder auf Konzeptpapier frei Hand.

****Zerlegung 1:**
Die Summe der vier Zahlen a, b, c und d ergibt 33.
Die Summe 33 ergibt sich auch, wenn man a um 3 vermindert, b um 3 vermehrt, c mit 3 multipliziert und d durch 3 teilt. Welche Zahlen könnten a, b, c und d sein?

Zerlegung 1 – Lösung:
Wegen a + b + c + d = (a + 3) + (b – 3) + 3·c + d:3 gibt es gibt viele Lösungen, es muss nur
a + b + c + d = 33 und d = 3 · c sein. Also z.B.: 8 + 9 + 4 + 12.

****Zerlegung 2:**
Die Summe der vier natürlichen Zahlen a, b, c und d ergibt 55. Die vier Zahlen sind kleiner als 20. Die Summe 55 ergibt sich auch, wenn man a um 5 vermindert, b um 5 vermehrt, c mit 5 multipliziert und d durch 5 teilt. Bestimme a, b, c und d.

Zerlegung 2 – Lösung:
Wegen a + b + c + d = (a + 5) + (b – 5) + 5·c + d:5
muss a + b + c + d = 55 und d = 5 · c sein. Für Zahlen zwischen 1 und 19 bleibt nur 18 + 19 + 3 + 15.

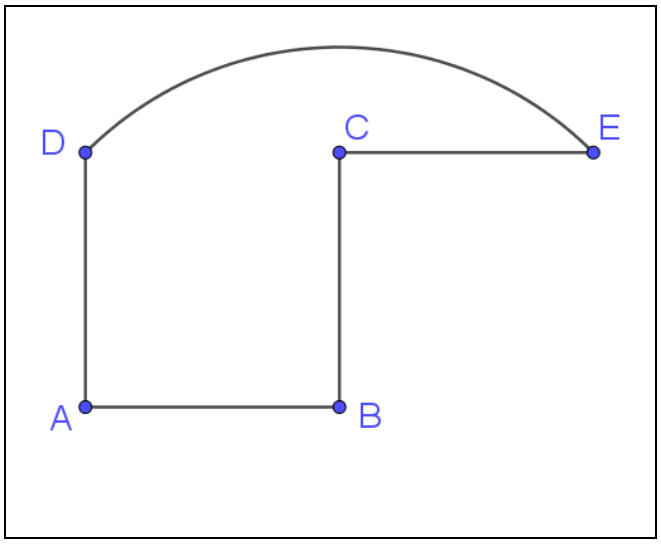
****Zwei Liter:**
Ein Würfel mit der Kantenlänge 10 cm hat das Volumen von genau 1 Liter (= 1000 cm^3).
a) Welches Volumen bekommt man bei einer Kantenlänge von 20 cm?
b) Wie viele ganze cm müsste die Kantenlänge für das Volumen von etwa 2 Litern etwa sein?

Zwei Liter – Lösung:
a) Damit bekommt man 8 Liter (= 8000 cm^3).
b) Nur 12 cm oder 13 cm (1,7 Liter oder 2,2 Liter)

Zwei Liter – Kommentar:

Zu a) Oder in der Veranschaulichung („Kopfgeometrie“): Wie viele 10 cm-Würfel passen in einen 20 cm-Würfel? Einer links vorne unten, einer rechts vorne unten, …
Zu b) Das ist schon bemerkenswert. Die Verlängerung der Kantenlänge um (nur) 26% bewirkt eine Verdopplung des Volumens.

******Zwei Teile:**
In der Abbildung rechts ist ABCD ein Quadrat, E liegt auf der Geraden DC und der Kreisbogen DE gehört zum Kreis mit dem Mittelpunkt B und dem Radius BD.
Teile das Flächenstück ABCED durch zwei gerade Schnitte in zwei zusammenhängende deckungsgleiche Teile auf – auch wenn das auf den ersten Blick unmöglich erscheint.



Zwei Teile – Lösung:
Die Lösung ist unten in sehr kleiner Schrift abgedruckt, damit man wirklich in Ruhe knobeln kann.

Der Punkt F sei die Mitte des Bogens DE. Fälle das Lot von F auf die Strecke BD, der Lotfußpunkt sei G. BG und FG sind die beiden gesuchten geraden Schnitte.
Oder so: Dreht man den Streckenzug BAD um B um 90°, so erhält man den Streckenzug BCE, bei dieser Drehung wird die Figur insgesamt überstrichen.
Dreht man nur um 45°, so teilt der Streckenzug die Figur in zwei kongruente Teile.

****Zwei-Würfel-Wurf:**
Bei den Spielen Monopoly oder Siedler von Catan werfen die Spieler zwei Würfel, zum Beispiel einen roten und einen blauen, und bilden die Summe der beiden Augenzahlen.
a) Welche Augensumme kommt am seltensten vor?
b) Welche Augensumme kommt am häufigsten vor?
c) Wie viel mal so häufig kommt die häufigste Augensumme vor wie die seltenste?

Zwei-Würfel-Wurf – Lösung:
a) Die Augensumme 2 (nur eine Möglichkeit: 1+1) und die Augensumme 12 (nur eine Möglichkeit: 6+6) kommen am seltensten vor.
b) Die Augensumme 7 kommt am häufigsten vor (sechs Möglichkeiten: 1+6;2+5;3+4;4+3;5+2;6+1)
c) Die Augensumme 7 kommt sechsmal (!) so häufig vor wie die Augensumme 2 oder 12.

Zwei-Würfel-Wurf – Kommentar:
In der Aufgabenstellung wurde absichtlich ein roter und ein blauer Würfel eingeführt, um die beiden Fälle 1+6 und 6+1 usw. gut unterscheiden zu können.

***Zylinder:**
Was erhält man, wenn man den Mantel eines Zylinders (Mantel = Oberfläche ohne Boden und Deckel) aufschneidet?

Zylinder – Lösung:
Man erhält ein Rechteck. Wenn man „schräg“ schneidet erhält man ein Parallelogramm. Vorausgesetzt natürlich, dass man mit der Schere nicht „wackelt“.

Lehrerblatt

Sachanalyse:

Jedes handelbare Produkt hat eine so genannte globale Artikelnummer **GTIN** (**G**lobal **T**rade **I**tem **N**umber). Dies ist die aktuelle Bezeichnung für die bis 2005 gebräuchliche **EAN** (**E**uropean **A**rticle **N**umber).
Die GTIN ist auf dem Produkt bzw. dessen Etikett in Ziffernform und auch in einem so genannten Barcode („Balkencode“) abgedruckt, vgl. roter Kreis im Bild rechts.
Der Barcode kann von einem Scanner an der Supermarkt-Kasse eingelesen werden und dann wird der im Supermarkt-System eingespeicherte zugehörige Preis dem Käufer berechnet.
Wenn der Barcode nicht abgescannt werden kann, zum Beispiel weil das Etikett des Produkts eingerissen ist, müssen die Ziffern der GTIN von Hand über die Tastatur eingegeben werden.
In beiden Fällen können beim Einlesen der GTIN Fehler auftreten.

(Bild zur Wiederverwendung mit Veränderung gekennzeichnet: *https://pixabay.com/de/photos/nutella-schokolade-lecker-süß-2064069/*

Die Zusammensetzung einer 13-stelligen GTIN wird im Folgenden am Beispiel der GTIN 4008400402222 erklärt:

400 … steht für das **Land** Deutschland (ebenso: 401-440)

8400 … steht für die **Firma** Ferrero

40222 … steht für das **Produkt** 500g-Glas Nutella (450g + 50g gratis)

2 … steht für die **Prüfziffer**

Wie wird die Prüfziffer gebildet?
Die 13 Ziffern werden der Reihe nach abwechselnd mit 1 und mit 3 multipliziert und dann werden die Produkte addiert. Dabei wird die letzte Ziffer, die **Prüfziffer**, so gewählt, dass diese **Prüfsumme** eine **Zehnerzahl** ist.
Wir vollziehen die Berechnung der Prüfsumme an unserem Beispiel oben nach:
4·1 + 0·3 + 0·1 +8·3 + 4·1 + 0·3 + 0·1 + 4·3 + 0·1 + 2·3 + 2·1 + 2·3 + 2·1= 60 ✓ 60 ist eine Zehnerzahl.

Welchen Sinn hat die Prüfziffer?
Mithilfe der Prüfziffer soll das Vorliegen einer falschen Eingabe, bei Eingabe von Hand oder beim Einscannen des Barcodes, erkannt werden. Nicht, dass anstelle eines 500 g-Glases Nutella ein XXL 5000g-Vorratseimer Nutella abgerechnet wird 😊.

- **Einzelfehler:** 4007400402222 oder 4006400402222 anstelle von 4008400402222
  Angenommen bei der 4. Stelle wird anstelle der 8 eine 7 eingelesen. Als Prüfsumme ergibt sich:
  4·1 + 0·3 + 0·1 +7·3 + 4·1 + 0·3 + 0·1 + 4·3 + 0·1 + 2·3 + 2·1 + 2·3 + 2·1= 57, das ist keine Zehnerzahl, also liegt ein Fehler vor!
  Angenommen bei der 4. Stelle wird anstelle der 8 eine 6 eingelesen. Als Prüfsumme ergibt sich:
  4·1 + 0·3 + 0·1 +6·3 + 4·1 + 0·3 + 0·1 + 4·3 + 0·1 + 2·3 + 2·1 + 2·3 + 2·1= 54, das ist keine Zehnerzahl, also liegt ein Fehler vor!
- **Zahlendreher:** 4004852402222 anstelle von 4008452402222
  Angenommen die 4. und die 5. Stelle werden vertauscht. Als Prüfsumme ergibt sich:
  4·1 + 0·3 + 0·1 +4·3 + 8·1 + 0·3 + 0·1 + 4·3 + 0·1 + 2·3 + 2·1 + 2·3 + 2·1= 52, das ist keine Zehnerzahl, also liegt ein Fehler vor!

Eine wichtige Erkenntnis:
Wenn die Prüfsumme keine Zehnerzahl ist, dann bedeutet das, dass ein Fehler vorliegt.
Was es für ein Fehler ist (Einzelfehler, Zahlendreher oder ein anderer Fehler) und an welcher Stelle sich der Fehler genau befindet, zeigt diese von einer Zehnerzahl abweichende Prüfsumme aber nicht an!

Das Verfahren mit der **Prüfsumme erkennt alle Einzelfehler.**
Beweis:
Sei x eine der Ziffern und y die dafür fälschlicherweise eingegebene Ziffer.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x < y$.

- Ist x eine mit 1 gewichtete Ziffer, so erhöht sich die Prüfsumme um $y – x$.
  Da $0 < y – x < 10$ ist, kann die Prüfsumme keine Zehnerzahl sein.
- Ist x eine mit 3 gewichtete Ziffer,
  so erhöht sich die Prüfsumme um $3 \cdot (y – x)$.
  $3 \cdot (y – x)$ ist unter den genannten Voraussetzungen kein ganzzahliges Vielfaches von 10.

Das Verfahren mit der **Prüfsumme erkennt aber nicht alle Zahlendreher**, nur etwa 89%.
Beweis:
x und y seien benachbarte Ziffern (0; 1; … ; 9) die vertauscht werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x > y$ und es werde x mit 1 und y mit 3 gewichtet.
Anstelle von $x \cdot 1 + y \cdot 3$ hat man in der Prüfsumme also $x \cdot 3 + y \cdot 1$.
Der Unterschied in der Prüfsumme ist damit $(x + 3y) – (3x + y) = 2 \cdot (x – y)$.
Wird der Zahlendreher nicht erkannt, muss der Unterschied 10 sein, denn beim Unterschied 0 in der Prüfsumme sind x und y gleich, beim Unterschied 20; 30 usw. in der Prüfsumme sind x oder y keine Ziffern.
Es ist also: $2 \cdot (x – y) = 10$ bzw. $x – y = 5$
Folgende fünf Zahlendreher werden nicht erkannt:
9 ↔ 4 8 ↔ 3 7 ↔ 2 6 ↔ 1 5 ↔ 0
Es gibt $\binom{10}{2} = 45$ Zweiermengen aus zwei verschiedenen Ziffern, bei fünf von ihnen wird der Zahlendreher nicht erkannt, das sind etwa 11%.

Warum nimmt man nicht einfach die Quersumme als Prüfsumme?
Die Quersumme als Prüfsumme erkennt offensichtlich alle Einzelfehler, aber keinen einzigen Zahlendreher.

Warum multipliziert man für die Prüfsumme nicht abwechselnd mit 1 und mit 2 (anstelle der „3“)?
Die zugehörige Prüfsumme („1-2-Prüfsumme“) erkennt zwar
a) alle Zahlendreher, b) aber nicht alle Einzelfehler!
Zu a):
x und y seien benachbarte Ziffern (0; 1; … ; 9) die vertauscht werden. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x > y$ und es werde x mit 1 und y mit 2 gewichtet.
Anstelle von $x \cdot 1 + y \cdot 2$ hat man in der Prüfsumme also $x \cdot 2 + y \cdot 1$.
Der Unterschied in der Prüfsumme ist damit $(x + 2y) – (2x + y) = x – y$.
Es ist $0 < x – y < 10$, man kommt also nicht zur nächsten Zehnerzahl.
Zu b):
Sei x eine der Ziffern und y die dafür fälschlicherweise eingegebene Ziffer.
Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x < y$.

- Ist x eine mit 1 gewichtete Ziffer, so erhöht sich die Prüfsumme um $y – x$.
  Da $0 < y – x < 10$ ist, kann die Prüfsumme keine Zehnerzahl sein.

- Ist x eine mit 2 gewichtete Ziffer, so erhöht sich die Prüfsumme um 2 · (y – x).
  Könnte 2 · (y – x) eine Zehnerzahl sein?
  Ja, genau dann, wenn y – x = 5 ist.

An den mit 2 gewichteten Positionen werden die Ersetzungen
5 statt 0, 6 statt 1, 7 statt 2, 8 statt 3, 9 statt 4 bzw. umgekehrt nicht erkannt, es ergibt sich in diesen Fällen als Prüfsumme jeweils wieder eine Zehnerzahl.
Da der Einzelfehler die häufigste Fehlerart ist, gibt man der „1-3-Prüfsumme“ den Vorzug vor der „1-2-Prüfsumme“.

Didaktische Bemerkungen:

Man kann es beim Anreißen des zweifellos interessanten Themas und der Bearbeitung des Schülerarbeitsblattes 1 belassen.
Bei der Vorstellung des Themas (vgl. Verlaufsplan, Erarbeitung I) wird man bereits die auf den Schülerblättern angebotene Tabellendarstellung zur Berechnung der Prüfsumme verwenden.
Diese entlastet die Schülerinnen und Schüler von Schreibarbeit und lenkt den Fokus später dann auch auf die Auswirkung der unterschiedlichen Eingabefehler.

GTIN	**4**	**0**	**0**	**8**	**4**	**0**	**0**	**4**	**0**	**2**	**2**	**2**	**2**
mal	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*
=	4	0	0	24	4	0	0	12	0	6	2	6	2
Prüfsumme = 60				Ist das eine Zehnerzahl? Ja.									

Bei der Vorstellung eines Einzelfehlers sollte die Lehrkraft im Hinblick auf die Bearbeitung des Schülerblattes 2 darauf abheben, dass bei der Veränderung eines der Summanden (Tabelle unten: -3) sich die Prüfsumme in derselben Weise verändert. Es muss also nicht die gesamte Prüfsumme neu berechnet werden:

GTIN	**4**	**0**	**0**	**~~8~~ 7**	**4**	**0**	**0**	**4**	**0**	**2**	**2**	**2**	**2**
mal	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*
=	4	0	0	~~24~~ 21	4	0	0	12	0	6	2	6	2
Prüfsumme = ~~60~~ 57				Ist das eine Zehnerzahl? ~~Ja.~~ Nein.									

Man kann auch etwas tiefer in die Materie vorstoßen und mit dem Schülerblatt 2 die Leistungsfähigkeit der „1-3-Prüfsumme“ thematisieren oder sogar in einem Unterrichtsgespräch in einem abschließenden Exkurs noch einen Vergleich mit der Quersumme oder der „1-2-Prüfsumme“ anstellen.

Bei der jeweils letzten Aufgabe der beiden Schülerblätter lässt sich ein typisches Differenzierungsmuster anwenden, dies wird im Folgenden für die Frage, welche Zahlendreher die Prüfsumme nicht erkennt (Schülerblatt 2, Aufgabe 3c)), näher ausgeführt:
- finde eine Lösung → Schülerinnen und Schüler können zunächst planlos probieren und dabei feststellen, dass „kleine“ und „große“ Unterschiede zwischen den beiden zu vertauschenden Ziffern nicht zur nächsten Zehnerzahl führen.
- finde mehrere Lösungen → Diese erste Erkenntnis, s. o., führt auch zu weiteren Lösungen.
- finde alle Lösungen → Hier kann das Gefühl tragen, dass „mittelgroße“ Unterschiede zwischen den beiden Ziffern zu gesuchten Zahlenpaaren führen.
- begründe, dass es keine weiteren Lösungen geben kann → Dazu muss man, ggf. auch ohne die Verwendung von Variablen, im Wesentlichen erkennen, dass bei einem Zahlendreher sich die Prüfsumme um das Doppelte der Zifferndifferenz der vertauschten Ziffern ändert.

1.) Ein 500g-Glas Nutella hat die folgende **GTIN** (**G**lobal **T**rade **I**tem **N**umber)

4 0 0 8 4 0 0 4 0 2 2 2 2

Die **Prüfsumme** dieser GTIN rechnet man so aus:
Die 13 Ziffern werden der Reihe nach abwechselnd mit 1 und mit 3 multipliziert und dann werden die 13 Produkte addiert. Dabei ist die letzte Ziffer, die **Prüfziffer**, so gewählt worden, dass diese **Prüfsumme** eine **Zehnerzahl** ist.
(Bild zur Wiederverwendung mit Veränderung gekennzeichnet:
https://pixabay.com/de/photos/nutella-schokolade-lecker-süß-2064069/

Rechne für diese GTIN die Prüfsumme mit der Tabelle unten aus. Es muss sich eine Zehnerzahl ergeben.

GTIN	**4**	**0**	**0**	**8**	**4**	**0**	**0**	**4**	**0**	**2**	**2**	**2**	**2**
mal	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*
=													
Prüfsumme = ...				Ist das eine Zehnerzahl?									

2.) Vielleicht hast du irgendein Handelsprodukt (zum Beispiel einen Schokoriegel, eine Wasserflasche, einen Bleistift) mit einer 13-stelligen GTIN dabei. Du findest die GTIN oft unterhalb des Balken-Codes. Trage diese GTIN in der Tabelle ein und berechne die Prüfsumme. Es muss sich eine Zehnerzahl ergeben.

GTIN													
mal	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*
=													
Prüfsumme = ...				Ist das eine Zehnerzahl?									

3.) Ein 2B-Bleistift der Firma Staedler hat die folgende **GTIN**

4 0 0 7 8 1 7 1 0 4 5 8 ?

Berechne mithilfe der Tabelle die Prüfziffer.

GTIN	**4**	**0**	**0**	**7**	**8**	**1**	**7**	**1**	**0**	**4**	**5**	**8**	
mal	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*
=													
Prüfsumme ohne Prüfziffer= .....; nächste Zehnerzahl: .....; Prüfziffer:													

4.) Ein Paket Waschmittel Persil Megaperls 1,332 kg der Firma Henkel hat die folgende **GTIN**

4 0 1 5 0 0 0 9 6 8 ? ? 4

Welche Möglichkeiten kommen für die 11. und 12. Ziffer in Frage? Findest du eine oder sogar mehrere?

GTIN	**4**	**0**	**1**	**5**	**0**	**0**	**0**	**9**	**6**	**8**			**4**
mal	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*
=													
Prüfsumme ohne 11. und 12. Ziffer= .....; nächste Zehnerzahlen:													
Mögliche 11. und 12. Ziffer:													

Ein Filzschreiber Pen 68 schwarz der Firma Stabilo hat die folgende **GTIN**

4 0 0 6 3 8 1 3 3 3 4 2 9

Die **Prüfsumme** dieser GTIN ist die Zehnerzahl 90.

(Bild zur Wiederverwendung mit Veränderung gekennzeichnet: *https://www.bueromarkt-ag.de/filzstifte_stabilo_pen_6846,p-68s,l-google-prd,pd-b2c.html?gclid=EAIaIQobChMIha2Zm8-I6AIVAcDeCh126QujEAQYAyABEgLFg_D_BwE*

GTIN	**4**	**0**	**0**	**6**	**3**	**8**	**1**	**3**	**3**	**3**	**4**	**2**	**9**
mal	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*	*3*	*1*
=	4	0	0	18	3	24	1	9	3	9	4	6	9
Prüfsumme = 90				Ist das eine Zehnerzahl? Ja.									

1a) Wir nehmen an: Bei der Eingabe dieser GTIN wurde die 11. Ziffer versehentlich falsch eingegeben. Anstelle der „4“ wurde eine „5“ eingegeben. Wie verändert sich die Prüfsumme dadurch? ……
Welche Prüfsumme erhält man damit als Ergebnis? ……

1b) Wir nehmen an: Bei der Eingabe dieser GTIN wurde die 11. Ziffer versehentlich falsch eingegeben. Als Prüfsumme ergab sich 93. Welche Ziffer wurde anstelle der „4“ eingegeben? ……

1c) Wir nehmen an: Bei der Eingabe dieser GTIN wurde die 11. Ziffer versehentlich falsch eingegeben. Anstelle der „2“ wurde irgendeine andere Ziffer eingegeben.
Welche Prüfsummen könnten sich dadurch ergeben? ……

2a) Wir nehmen an: Bei der Eingabe dieser GTIN wurde die 12. Ziffer versehentlich falsch eingegeben. Anstelle der „2“ wurde eine „3“ eingegeben. Wie verändert sich die Prüfsumme dadurch? ……
Welche Prüfsumme erhält man damit als Ergebnis? ……

2b) Wir nehmen an: Bei der Eingabe dieser GTIN wurde die 12. Ziffer versehentlich falsch eingegeben. Als Prüfsumme ergab sich 99. Welche Ziffer wurde anstelle der „2“ eingegeben? ……

2c) Wir nehmen an: Bei der Eingabe dieser GTIN wurde die 12. Ziffer versehentlich falsch eingegeben. Anstelle der „2“ wurde irgendeine andere Ziffer eingegeben.
Welche Prüfsummen könnten sich dadurch ergeben? ……

Einzelfehler: ……

3a) Wir nehmen an: Bei der Eingabe dieser GTIN wurde die 11. und die 12. Ziffer vertauscht.
Wie verändert sich die Prüfsumme dadurch? ……
Welche Prüfsumme erhält man damit als Ergebnis? ……

3b) Wir nehmen an: Bei der Eingabe dieser GTIN wurde die 5. und die 6. Ziffer vertauscht.
Hier ergibt sich eine Zehnerzahl als Prüfsumme, welche? ……
Was bedeutet das? ……

3c) Der Zahlendreher bei den Ziffern „3“ und „8“ wird durch die Prüfsumme nicht erkannt, da die „falsche“ Prüfsumme wieder eine Zehnerzahl ist.
Findest du noch weitere solche Ziffernpaare? ……

Zahlendreher: ……

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer LV … Lehrer(innen)vortrag
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit feU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Auch der Exkurs ist ein möglicher Zeitpuffer.
Das Material reicht gut auch für zwei Nachmittage zu je 45 Minuten.

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Erarbeitung I LV bzw. feU 15 Min.	L stellt das Thema GTIN vor am Beispiel des Produkts Nutella, vgl. Lehrerblatt, SuS schreiben dabei nicht mit: - Aufbau der GTIN - Prüfsumme und Berechnung der Prüfziffer → in Tabellenform aufschreiben - Sinn der Prüfziffer am Beispiel eines Einzelfehlers → in der Tabelle Veränderungen vornehmen	Tafel o.ä.
2. Übung I EA/PA 30 Min. abschließend feU	SuS bearbeiten das Schülerblatt 1, in der Aufgabe 1.) vollziehen sie das soeben Vorgeführte selbständig nach Binnendifferenzierung bei der Aufgabe 4, die auch schon zu den Gedankengängen des Teils II hinführt L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend. Schülerblatt 1 wird besprochen, Lösungen: 1.) Prüfsumme 60 2.) L hat einen Vorrat von GTINs: • 4006040054429 – Kokosriegel, Naturkost GmbH • 4021851200889 – Salatkartoffeln, Bioland • 4002919001136 – Heiligtaler Mineralwasser • 8000070036321 – Lavazza, Kaffee ganze Bohnen • 5000112547849 – Fanta, Orangenlimonade 1,5 L • 4017100131004 – Russisch Brot, Bahlsen • 4004764007967 – permanent marker, Edding Eine Ländercode-Tabelle findet man unter: https://ean-code.eu/ean-13-ean-codes-laendercode-tabelle/ 3.) Prüfziffer 3 4.) 11.|12. Ziffer von Persil Megaperls 1,332 kg heißt 1|6, in Frage kommen grundsätzlich die Zahlenpaare: 0|3 1|6 2|9 3|2 4|5 5|8 6|1 7|4 8|7 9|0	Schülerblatt 1
3. Erarbeitung II LV bzw. feU 15 Min.	L fragt die SuS nach möglichen Fehlern außer den schon vorgestellten Einzelfehlern und stellt die Fehlerart *Zahlendreher* vor, vgl. Lehrerblatt. → in der Tabelle Veränderungen vornehmen Nebenbei: Wie kommt es zu Zahlendrehern? Beim Zahlwort wird im Deutschen der Einer vor dem Zehner genannt, z.B. „zweiunddreißig“ und nicht „dreißigzwei“ für 32. Das ist eine grundsätzlich nicht zu unterschätzende Fehlerquelle.	Tafel o.ä.

	L thematisiert die Interpretation des Ereignisses „die Prüfsumme ist keine Zehnerzahl“ (vgl. Lehrerblatt: „Wichtige Erkenntnis …“)	
4. Übung II EA/PA 30 Min. abschließend feU	SuS bearbeiten das Schülerblatt 2, Binnendifferenzierung bei der Aufgabe 3c) L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend. Schülerblatt 2 wird besprochen, Lösungen: 1a) Veränderung +1, Prüfsumme dann: 91 1b) die Ziffer 7 führt zur Prüfsumme 93 1c) mit den Ziffern 0 bis 9 (außer 4) können sich die Prüfsummen 86 bis 95 ergeben (außer 90) 2a) Veränderung +3, Prüfsumme dann: 93 2b) die Ziffer 5 führt zur Prüfsumme 99 2c) mit den Ziffern 0 bis 9 (außer 5) können sich die Prüfsummen 78; 81; 84; 87; 93; 96; 99; 102; 105 ergeben 3a) Veränderung +4, Prüfsumme dann: 94 3b) Prüfsumme: 80, der Fehler wird nicht erkannt (!) 3c) alle diese fünf Zahlenpaare : 0|5; 1|6; 2|7; 3|8; 4|9 L bestätigt, dass die Vermutungen – ausgehend von den Beispielen des Schülerblattes – richtig sind, diese werden in die „Kästen“ eingetragen: - *Die Prüfsumme „erkennt“ alle Einzelfehler.* - *Die Prüfsumme erkennt aber nur fast alle Zahlendreher.* Nebenbei eine Beobachtung aus der Praxis: Wenn im Supermarkt die Kassiererin eine GTIN von Hand eingibt und diese vom System als eine gültige GTIN angenommen wird (Zehnerzahl!), schaut sie immer noch einmal auf ihr Display, ob tatsächlich auch das richtige Produkt verrechnet wurde.	Schülerblatt 2
5. Exkurs feU 15 Min.	L thematisiert die Alternativen zur tatsächlich verwendeten Prüfsumme: Quersumme und „1-2-Prüfsumme“ (vgl. Lehrerblatt) mit den zugehörigen Qualitäten der Fehlererkennung. SuS fragen nach der **ISBN** (**I**nternational **S**tandard **B**ook **N**umber): - Die Prüfsumme der **13-stelligen ISBN** wird genau so gebildet wie die der GTIN und hat mit der Prüfbedingung: … ist eine 10er-Zahl damit dieselbe Fehlererkennungsqualität. - Die Prüfsumme der **10-stelligen ISBN** wird so gebildet: 1. Ziffer mal 1 + 2. Ziffer mal 2 + … + 9. Ziffer mal 9 – 10. Ziffer (=Prüfziffer); Prüfbedingung: … ist eine 11er-Zahl. Es könnte somit vorkommen, dass die Prüfziffer „10“ heißen muss. Man schreibt als Prüfziffer dann „X“. Fehlererkennungsqualität: Alle Einzelfehler und Zahlendreher werden erkannt, dafür ist diese Prüfsumme auch komplizierter.	Tafel o.ä.

Lehrerblatt

Sachanalyse

Als Palindrom bezeichnet man eine Zeichenkette (Buchstaben oder Zahlen), die von links nach rechts und von rechts nach links gelesen gleich ist.
Palindrom-Namen sind zum Beispiel: VIV, HANNAH oder ANNA-SUSANNA (wenn man den Bindestrich jeweils an der richtigen Stelle setzt).
Palindrom-Sätze sind zum Beispiel: UND NU? oder ERIKA FEUERT NUR UNTREUE FAKIRE. (wenn man die Leerzeichen und Satzzeichen an der richtigen Stelle setzt).
Der 02.02.2020 ist ein Palindrom-Tag (wenn man beim Rückwärtslesen die Punkte so setzt, wie es das Datumformat TT.MM.JJJJ vorgibt).

02.02.2020

Für das Folgende vereinbaren wir das Datumformat TT.MM.JJJJ.

Bei der Suche nach Palindrom-Tagen geht man sinnvollerweise von der Vorgabe von Tag und Monat aus. Durch die Palindrom-Eigenschaft ist das Jahr dann bestimmt.
Zum Beispiel gehört zum 04.12. das Jahr 2140, also der Palindrom-Tag 04.12.2140.
Da der 29.02.2092 tatsächlich ein Schalttag ist (2092 ist durch 4, aber nicht durch 100 teilbar, also ist das Jahr 2092 ein Schaltjahr) gibt es 366 Palindrom-Tage im Bereich der Jahre 0001 bis 9999.
Einen kleinen Ausschnitt der 366 Palindrom-Tage zeigt die nachfolgende Tabelle:

09.11.1190	19.11.1191	29.11.1192	10.02.2001	20.02.2002	01.02.2010	11.02.2011	21.02.2012	02.02.2020	12.02.2021
22.02.2022	03.02.2030	13.02.2031	23.02.2032	04.02.2040	14.02.2041	24.02.2042	05.02.2050	15.02.2051	25.02.2052
06.02.2060	16.02.2061	26.02.2062	07.02.2070	17.02.2071	27.02.2072	08.02.2080	18.02.2081	28.02.2082	09.02.2090
19.02.2091	29.02.2092	10.12.2101	20.12.2102	30.12.2103	01.12.2110	11.12.2111	21.12.2112	31.12.2113	02.12.2120
12.12.2121	22.12.2122	03.12.2130	13.12.2131	23.12.2132	04.12.2140	14.12.2141	24.12.2142	05.12.2150	15.12.2151
25.12.2152	06.12.2160	16.12.2161	26.12.2162	07.12.2170	17.12.2171	27.12.2172	08.12.2180	18.12.2181	28.12.2182
09.12.2190	19.12.2191	29.12.2192	10.03.3001	20.03.3002	30.03.3003	01.03.3010	11.03.3011	21.03.3012	31.03.3013

Die gregorianische Kalenderreform mit Auslassung der zehn Tage 05.10.1582 bis 14.10.1582 hat auf die Anzahl der Palindrom-Tage keine Auswirkung.
Es sind also 366 von etwa 3,65 Millionen Tagen bzw. etwa 0,01%. Somit kann man sagen, dass durchschnittlich etwa jeder 10000. Tag ein Palindrom-Tag oder durchschnittlich etwa jedes 27. Jahr ein Jahr mit Palindrom-Tag ist. Der Eindruck der Häufigkeit der Palindrom-Tage zum Beginn des 21. Jahrhunderts täuscht also bezüglich der langfristigen Verteilung.
Die Palindrom-Tage findet man jeweils nur – überschlägig gesprochen – zum Beginn des jeweiligen Jahrtausends. Mit den zwölf Monatsangaben 01; 02; 03; 04; 05; 06; 07; 08; 09; 10; 11; 12 kommt für den Beginn der Jahreszahl eines Palindrom-Tages nur in Frage 01; 10; 11; 20; 21; 30; 40; 50; 60; 70; 80; 90

Didaktische Bemerkungen:

Zu Beginn wird das Thema vorgestellt und es werden einige Beispiele für Palindrom-Tage produziert. Hierbei sollte die Erkenntnis gefasst werden, dass durch die Palindrom-Eigenschaft die Vorgabe von Tag und Monat das Jahr vollständig bestimmt und umgekehrt.
Anschließend bearbeiten die Schülerinnen und Schüler das Schülerblatt.
Je nach Lerngruppe kann man auch vor dem Austeilen des Schülerblattes fragen, „welche Fragen sich jetzt stellen“ und damit die ganze Theorie der Palindrom-Tage entfalten. Das ist für die Schülerinnen und Schüler vielleicht zunächst ungewohnt, kann aber ein sehr reizvolles Unterfangen sein.
Für die Beantwortung der Fragen insgesamt ist die Erkenntnis zentral.

Lösungen der Aufgaben des Schülerblattes:

1.) *Durch Ausprobieren der Jahreszahlen der kommenden Jahre:*
Der nächste Palindrom-Tag nach dem 02.02.2020 ist der 12.02.2021.

2.) *Durch Ausprobieren der Jahreszahlen der kommenden Jahre:*
Der übernächste Palindrom-Tag nach dem 02.02.2020 ist der 22.02.2022.

3.) *Durch Ausprobieren der Jahreszahlen der vergangenen Jahre:*
Der letzte Palindrom-Tag vor dem 02.02.2020 war der 21.02.2012.

4.) *Durch Ausprobieren der Jahreszahlen der vergangenen Jahre:*
Der vorletzte Palindrom-Tag vor dem 02.02.2020 war der 11.02.2011.

5.) *Wiederholung der zentralen Erkenntnis:*
Es kann höchstens einen Palindrom-Tag im Jahr geben, weil durch die Festlegung des Jahres der Monat und Tag festgelegt sind.

6.) Nicht jedes Jahr hat einen Palindrom-Tag.
Begründung: Viele Jahreszahlen führen zu einem unzulässigen Datum. Z.B. 2019 → 91.02.2019

7.) Nur im Jahr 2113 ist der Sylvestertag (31.12.2113) ist ein Palindrom-Tag.
Begründung – Wiederholung der zentralen Erkenntnis:
Das Jahr ist wegen der Palindrom-Eigenschaft durch die Angabe von Tag und Monat vollständig bestimmt.

8.) Der 29.02.2092 ist tatsächlich ein Schalttag, denn 2092 ist durch 4, aber nicht durch 100 teilbar.

9.) Die Jahre 2021; 2022; 2030; 2031; 2032 und 2040 sind die sechs Jahre nach 2020, die einen Palindrom-Tag haben.

10.) Die Jahre 2012; 2011; 2010; 2002; 2001 und (davor erst wieder) 1192 (!) sind die sechs Jahre vor 2020, die einen Palindrom-Tag haben.

11.) Die ersten 100 Jahre 0001 bis 0100 liefern keinen Palindrom-Tag. Das Jahr 0101 hat damit den ersten Palindrom-Tag, nämlich den 10.10.0101.

12.) Von den Jahren des 10. Jahrtausends kommen nur Jahre mit Beginn 90... in Frage, 91.., 92.. usw. würden die Monate 19., 29. usw. ergeben. Der letzte Palindrom-Tag ist der 29.09.9092.

13.) Im Bereich der 9999 Jahre 0001 bis 9999 gibt es 366 Palindrom-Tage, denn es gibt eben 366 Möglichkeiten für ein Datum im Ablauf eines Jahres. Wegen des dabei enthaltenen Schalttages 29.02. vgl. die Überlegungen in h).

Mkid 7-37 Palindrom-Tage

1.) Wann ist der nächste Palindrom-Tag nach dem 02.02.2020?

02.02.2020

……

2.) Wann ist der übernächste Palindrom-Tag nach dem 02.02.2020?

……

3.) Wann war der letzte Palindrom-Tag vor dem 02.02.2020?

……

4.) Wann war der vorletzte Palindrom-Tag vor dem 02.02.2020?

……

5.) Wie viele Palindrom-Tage kann es in einem Jahr geben?

……

6.) Hat jedes Jahr einen Palindrom-Tag?

……

7.) In welchen Jahren ist Sylvester ein Palindrom-Tag?

……

8.) Gibt es einen Schalttag (29. Februar) als Palindrom-Tag?

……

9.) Welches sind die nächsten sechs Jahre nach dem Jahr 2020, die einen Palindrom-Tag haben?

……

10.) Welches sind die sechs Jahre vor dem Jahr 2020, die einen Palindrom-Tag hatten?

……

11.) Welches war der erste Palindrom-Tag im Zeitraum der Jahre 0001 bis 9999?

……

12.) Welches wird der letzte Palindrom-Tag im Zeitraum der Jahre 0001 bis 9999 sein?

……

13.) Wie viele Palindrom-Tage gibt es im Zeitraum der Jahre 0001 und 9999?

……

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer LV … Lehrer(innen)vortrag
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit feU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Erarbeitung LV bzw. feU 15 Min.	L stellt Palindrome vor, vgl. Lehrerblatt L stellt das Thema Palindrom-Tage vor am Beispiel des 02.02.2020. SuS suchen selbständig nach Palindrom-Tagen SuS erkennen dabei: • *Die Vorgabe von Tag und Monat bestimmt das Jahr vollständig.* • *Die Vorgabe eines Jahres bestimmt Tag und Monat vollständig.* SuS erkennen dabei vielleicht auch schon: • *Nicht jedes Jahr hat einen Palindrom-Tag.* • *Jeder Tag im Jahresablauf (1. Mai, Heiligabend, …) ist irgendwann ein Palindrom-Tag* Ggf. stellt L die Frage: „Welche Fragen stellen sich jetzt?“	Tafel o.ä.
2. Übung I EA/PA 30 Min. abschließend feU	SuS bearbeiten das Schülerblatt, die Aufgaben haben aufsteigenden Schwierigkeitsgrad, daraus ergibt sich eine Binnendifferenzierung L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend	Schülerblatt

Lehrerblatt

Sachanalyse – Superzahl

Als die Superzahl soll hier die (eindeutig bestimmte) zehnstellige Zahl bezeichnet werden, die so aufgebaut ist, dass

- jede der Ziffern 0 bis 9 je einmal vorkommt
- die aus den ersten beiden Stellen gebildete Zahl durch 2 teilbar ist
- die aus den ersten 3 Stellen gebildete Zahl durch 3 teilbar ist
- die aus den ersten 4 Stellen gebildete Zahl durch 4 teilbar ist
- die aus den ersten 5 Stellen gebildete Zahl durch 5 teilbar ist
- die aus den ersten 6 Stellen gebildete Zahl durch 6 teilbar ist
- …
- die aus den ersten 10 Stellen gebildete Zahl (also die komplette Superzahl) durch 10 teilbar ist.

Bestimme die Superzahl.
Die Zahl 1234567890 ist nicht die Superzahl, denn es ist zwar 12 durch 2 teilbar und auch 123 durch 3 teilbar, aber 1234 ist nicht durch 4 teilbar.

Zunächst muss man feststellen, dass es 10! = 3.628.800 Möglichkeiten gibt, die zehn Ziffern anzuordnen. Ohne PC-Hilfe möchte man die nicht alle durchprobieren, um die Superzahl zu finden.
Kann man die Auswahl etwas eingrenzen?

- Wegen der Teilbarkeit der gesamten Superzahl durch 10 muss an der 10. Stelle die Ziffer 0 stehen.
- Die Teilbarkeit der Zahl aus den ersten neun Ziffern durch 9 liefert keine Einschränkung, da die Quersumme der zehn Ziffern 45 beträgt und 45 eine Neunerzahl ist.
- Wegen der Teilbarkeit der aus den ersten 5 Stellen gebildeten Zahl durch 5 muss an der 5. Stelle die 5 stehen, denn die 0 ist ja schon vergeben.
  Das ist ja schon einmal etwas. Es gibt noch 8! = 40.320 Möglichkeiten die restlichen acht Ziffern anzuordnen. Das sind noch etwa 1,1% der vorigen Anzahl.
- Wegen der Teilbarkeit durch 2; 4; 6 und 8 muss an der 2., 4. 6. und 8. Stelle eine gerade Ziffer (2; 4; 6 oder 8) stehen. Damit sind die geraden Ziffern verbraucht.
  Also muss an der 1., 3., 7. und 9. Stelle eine ungerade Ziffer stehen (1; 3; 7 oder 9).
  Damit gibt es noch 4! · 4! = 24 · 24 = 576 Möglichkeiten. Das sind noch etwa 1,5% der vorigen Anzahl.
- Jetzt wird es etwas schwieriger: Wir betrachten die 3. und die 4. Stelle. Wegen der Teilbarkeit durch 4 kann die aus den ersten 4 Stellen der Superzahl gebildete Zahl an ihren letzten beiden Stellen (nämlich die 3. und die 4. Stelle) nach dem Vorherigen nur noch so lauten:
  12; 16; 32; 36; 52; 56; 72; 76; 92; 96.
  Die 4. Stelle kann also nur mit der Ziffer 2 oder der Ziffer 6 belegt sein.
  Da aus der Teilbarkeit durch 8 die Teilbarkeit durch 4 folgt, gilt entsprechend:
  Die 8. Stelle kann also ebenfalls nur mit der Ziffer 2 oder der Ziffer 6 belegt sein.
  Da die Ziffern 2 und 6 an der 4. und 8. Stelle der Superzahl stehen müssen, bleiben für die 2. und die 6. Stelle nur die beiden andern geraden Ziffern 4 und 8 übrig.
  Damit gibt es jetzt noch 2 · 2 · 4! = 2 · 2 · 24 = 96 Möglichkeiten, vgl. Tabelle rechts. Das sind noch etwa 16,7% der vorigen Anzahl.

Stelle	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
mögliche Ziffern	1	4	1	2	5	4	1	2	1	0
	3	8	3	6		8	3	6	3	
	7		7				7		7	
	9		9				9		9	

Man kann nun arbeitsteilig in vier Gruppen die Möglichkeiten notieren und für die jeweils 4! = 24 Möglichkeiten die restlichen Teilbarkeitsforderungen überprüfen, um die Superzahl

herauszufiltern:

Stelle	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Gruppe A	1 | 3 | 7 | 9	4	1 | 3 | 7 | 9	2	5	8	1 | 3 | 7 | 9	6	1 | 3 | 7 | 9	0
Gruppe B	1 | 3 | 7 | 9	8	1 | 3 | 7 | 9	2	5	4	1 | 3 | 7 | 9	6	1 | 3 | 7 | 9	0
Gruppe C	1 | 3 | 7 | 9	4	1 | 3 | 7 | 9	6	5	8	1 | 3 | 7 | 9	2	1 | 3 | 7 | 9	0
Gruppe D	1 | 3 | 7 | 9	8	1 | 3 | 7 | 9	6	5	4	1 | 3 | 7 | 9	2	1 | 3 | 7 | 9	0

Unter uns: Man kann natürlich auch weitere Überlegungen anstellen.

- Wegen der Teilbarkeit durch 3 muss die aus der 1. bis 3. Stelle gebildete Zahl die Quersumme 3 haben. Mit Blick auf die Tabelle kommen nur zehn Möglichkeiten in Frage:
  147; 183; 189; 381; 387; 741; 783; 789; 981 oder 987.
  Wegen der Teilbarkeit durch 6 und daraus folgend die Teilbarkeit durch 3 muss die aus den ersten 6 Stellen der Superzahl gebildete Zahl die Quersumme 3 haben. Da schon die aus den ersten 3 Stellen gebildete Zahl die Quersumme 3 haben muss, gilt dies auch für die aus der 4. bis 6. Stelle gebildete Zahl, damit kommen mit Blick auf die Tabelle nur zwei Möglichkeiten in Frage:
  258 oder 654.
- Wegen der Teilbarkeit durch 8 muss die aus der 6. bis 8. Stelle gebildete Zahl durch 8 teilbar sein (Die 8er-Regel: *Eine Zahl ist nur dann durch 8 teilbar, wenn die Zahl aus den letzten drei Ziffern durch 8 teilbar ist.*).
  Mit Blick auf die Tabelle kommen nur vier Möglichkeiten in Frage:
  416; 432; 472; 496; 816; 832; 872 oder 896.
- Die letzten beiden Betrachtungen betreffen beide die 6. Stelle. Da jede Ziffer nur einmal vorkommen darf, bleiben für die aus der 4. bis 8. Stelle gebildete Zahl nur die folgenden vier Möglichkeiten:
  25816; 25896; 65432 oder 65472
- Berücksichtigt man bei der Zusammensetzung der Zahl aus der 1. bis 3. Stelle und der Zahl aus der 4. bis 8. Stelle und der 9. Stelle, dass jede Ziffer nur einmal vorkommt darf, so bleibt nur noch eine kleine Auswahl:
  1472589630; 1836547290; 1896543270; 1896547230; 3816547290;
  7412589630; 7896543210; 9816543270; 9816547230; 9876543210
  Mit der Probe auf die Teilbarkeit durch 7 (hier wird man eben die Division ausführen) siebt man die **Superzahl 3816547290** aus.

Nebenbei unter uns: Es gibt ja mehrere 7er-Regeln, eine davon (die „1-3-2-Regel“) heißt so:
Nimm die 1er-Ziffer mal 1, die Zehnerziffer mal 3, die 100er-Ziffer mal 2, die 1000er-Ziffer mal -1, die 10000er-Ziffer mal – 3 und die 100000er-Ziffer mal -2, die 1000000er-Ziffer wieder mal 1 usw.
Die Zahl ist genau dann durch 7 teilbar, wenn diese gewichtete Quersumme durch 7 teilbar ist.
Muss man sich nicht merken 😊.

Sachanalyse – Mini-Superzahl:

Um sich in die Gedankenwelt einzufinden, kann man zunächst das Problem etwas verkleinern und nach der **Mini-Superzahl aus den sechs Ziffern 1; 2; 3; 4; 5 und 6** fragen.
Man kommt mit den nachfolgenden Überlegungen aus:

- geradzahlige Stellen müssen mit geraden Ziffern belegt werden (2er-Regel)
- für die ungeradzahligen Stellen bleiben dann nur noch die ungeraden Ziffern übrig
- an der 5. Stelle muss die Ziffer 5 stehen (5er-Regel)
- für die 1. und die 3. Stelle ist damit nur noch die Ziffer 1 und die Ziffer 3 übrig
- wir haben also die Form 1 * 3 * 5 * bzw. 3 * 1 * 5 *, an den Positionen * steht eine der geraden Zahlen 2; 4 oder 6

- die Quersumme der Ziffern der ersten drei Stellen muss eine Dreierzahl sein (3er-Regel), damit bleibt 123654 oder 123456 bzw. 321456 oder 321654
- wegen der Teilbarkeit durch 4 (4er-Regel) bleiben als Lösungen nur die beiden Möglichkeiten **123654** und **321654,** denn die Teilbarkeit durch 6 ist bei gerader letzter Ziffer immer erfüllt wegen 1+2+3+4+5+6=21

Betrachtung der schrittweisen Reduktion der Anzahl der Möglichkeiten:

- Zunächst hat man für die Anordnung der sechs Ziffern 6! = 720 Möglichkeiten.
- Nach der Zuweisung der geradzahligen Ziffern zu den geradzahligen Stellen (und in Folge der ungeradzahligen Ziffern zu den ungeradzahligen Stellen) sind es nur noch 3! · 3! = 6 · 6 = 36 Möglichkeiten (!).
- Nach der Positionierung der Ziffer 5 sind es noch 2 · 3! = 12 Möglichkeiten.
- Nach der Berücksichtigung der 3er-Regel sind es noch 4 Möglichkeiten.

Didaktische Bemerkungen:

Dieser Knobelaufgaben-Klassiker ist eine richtig schwierige Aufgabe und von Schülerinnen und Schülern der Klasse 7 alleine nicht zu bewältigen. Selbst Studenten der Mathematik „knabbern“ erfahrungsgemäß heftig daran.
Lehrreich ist die Aufgabe vor allem deshalb, weil man durch geeignete Überlegungen die unvorstellbare Anzahl von Möglichkeiten immer weiter einengen kann.
Trotzdem bleibt noch viel zu tun.
Fürs Leben kann man lernen: Zur Bewältigung von komplexen Problemen kommt man oft nur durch die Kombination von guten Ideen & harter Arbeit!
Zu Beginn wird man die Teilbarkeitsregeln wiederholen:
Eine Zahl ist nur dann durch 2 teilbar, wenn ihre Endziffer 2; 4; 6; 8 oder 0 heißt.
Eine Zahl ist nur dann durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist.
Eine Zahl ist nur dann durch 4 teilbar, wenn die Zahl aus den beiden letzten Ziffern durch 4 teilbar ist.
Eine Zahl ist nur dann durch 5 teilbar, wenn ihre Endziffer 0 oder 5 heißt.
Eine Zahl ist nur dann durch 6 teilbar, wenn sie durch 2 und durch 3 teilbar ist.
(Diese Regel könnte zum Schluss der Bearbeitung nützlich sein, ist aber nicht zwingend:
Eine Zahl ist nur dann durch 8 teilbar, wenn die Zahl aus den letzten drei Ziffern durch 8 teilbar ist.)
Eine Zahl ist nur dann durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.
Eine Zahl ist nur dann durch 10 teilbar, wenn ihre Endziffer 0 heißt.

Zum Ablauf:
- gemeinsame Erarbeitung der Mini-Superzahl
- selbständige Arbeit: reduzieren der Möglichkeiten bei der Superzahl mithilfe des Schülerblattes
- durchprobieren der restlichen 4 mal 24 Möglichkeiten in vier Gruppen, die Lösung befindet sich auf dem Blatt der Gruppe D
Aus motivationspsychologischen Gründen erhalten alle Schülerinnen und Schüler dieses Blatt der Gruppe D.
Wenn man die 8er-Regel kennt, beschleunigt das die abschließende Suche.

Mkid 7-38 Superzahl

1.) Ist die Zahl 1234567890 die Superzahl?

……

2.) Welche Ziffer kommt für die 10. Stelle nur in Frage? Die Ziffer ……

3.) Welche Ziffer kommt dann für die 5. Stelle nur noch in Frage? Die Ziffer ……

4.) Welche Ziffern kommen für die 2., 4., 6. und 8. Stelle nur in Frage? Die Ziffern ……; ……; ……; ……

5.) Welche Ziffern kommen für die 1., 3., 7. und 9. Stelle dann nur noch in Frage?
Die Ziffern ……; ……; ……; ……

6.) Ist die Zahl 9876543210 die Superzahl?

……

7.) Wie könnte die Zahl aus der 3. und 4. Stelle lauten? Zähle die 10 Möglichkeiten auf.
Beachte dabei: die 3. Stelle muss eine der noch verfügbaren ungeraden Zahlen sein.

……; ……; ……; ……; ……; ……; ……; ……; ……; ……

8.) Wenn eine Zahl durch 8 teilbar ist, dann ist sie auch durch 4 teilbar.
Wie könnte damit die Zahl aus der 7. und 8. Stelle lauten? Zähle die 10 Möglichkeiten auf.
Beachte dabei: die 7. Stelle muss eine der noch verfügbaren ungeraden Zahlen sein.

……; ……; ……; ……; ……; ……; ……; ……; ……; ……

9.) Welche beiden Ziffern können also nur an der 4. und 8. Stelle stehen? Die Ziffern …… und …… .

10.) Welche beiden Ziffern bleiben jetzt noch für die 2. und 6. Stelle übrig? Die Ziffern …… und …… .

11.) Trage in den grauen Feldern die jeweils noch möglichen Ziffern ein.

Stelle	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
mögliche Ziffern										

Eine der 24 Zahlen ist die Superzahl. Findest du sie?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Zahl:	Superzahl?	Warum?
1	8	3	6	5	4	7	2	9	0	1836547290	Nein	1836547 ist nicht durch 7 teilbar
1	8	3	6	5	4	9	2	7	0			
1	8	7	6	5	4	3	2	9	0	1876543290	Nein	187 ist nicht durch 3 teilbar
1	8	7	6	5	4	9	2	3	0			
1	8	9	6	5	4	3	2	7	0			
1	8	9	6	5	4	7	2	3	0			
3	8	1	6	5	4	7	2	9	0			
3	8	1	6	5	4	9	2	7	0			
3	8	7	6	5	4	1	2	9	0			
3	8	7	6	5	4	9	2	1	0			
3	8	9	6	5	4	1	2	7	0	389654127	Nein	389 ist nicht durch 3 teilbar
3	8	9	6	5	4	7	2	1	0			
7	8	1	6	5	4	3	2	9	0			
7	8	1	6	5	4	9	2	3	0			
7	8	3	6	5	4	1	2	9	0			
7	8	3	6	5	4	9	2	1	0	7836549210	Nein	78365492 ist nicht durch 8 teilbar
7	8	9	6	5	4	1	2	3	0			
7	8	9	6	5	4	3	2	1	0			
9	8	1	6	5	4	3	2	7	0			
9	8	1	6	5	4	7	2	3	0			
9	8	3	6	5	4	1	2	7	0			
9	8	3	6	5	4	7	2	1	0	9836547210	Nein	9836547 ist nicht durch 7 teilbar
9	8	7	6	5	4	1	2	3	0			
9	8	7	6	5	4	3	2	1	0			

Verlaufsplan

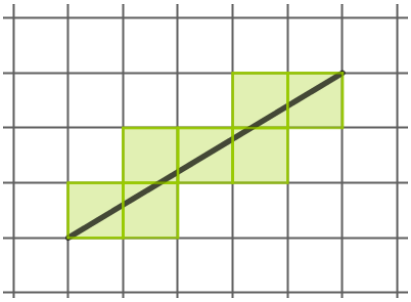
SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer LV … Lehrer(innen)vortrag
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit feU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung!
Bei Bedarf kann man die Erarbeitung II oder III abkürzen.

Phase / Zeit	L / SuS	Medien
1. Erarbeitung I LV bzw. feU 20 Min.	L stellt das Thema Superzahl vor und betont mehrmals, dass dies ein außerordentlich schwieriges Problem ist, das sogar viele Mathematiklehrer überfordern würde. SuS wiederholen die Teilbarkeitsregeln Zur Einführung in die Vorgehensweise bei der Suche nach der Superzahl: SuS und L ermitteln gemeinsam die Mini-Superzahl (vgl. Lehrerblatt) L thematisiert die anfängliche Anzahl der Möglichkeiten (720) und deren stufenweise Reduktion	Tafel o.ä.
2. Erarbeitung II EA/PA 30 Min. abschließend feU	SuS bearbeiten das Schülerblatt L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend Vergleich der Lösungen: 1.) Nein. 1234 ist nicht durch 4 teilbar. … 6.) Nein. 9876543 ist nicht durch 7 teilbar. 8.) und 9.): 12; 16; 32; 36; 52; 56; 72; 76; 92; 96 11.) L erläutert die Aufteilung der jetzt noch 96 Möglichkeiten (zu Beginn waren es noch 3.628.800) in die vier Gruppen A, B, C und D (vgl. Lehrerblatt). L verteilt nur das Blatt der Gruppe D	Schülerblatt
3. Erarbeitung III EA/PA 20 Min.	SuS suchen in der Tabelle nach der Superzahl. Man kann dabei arbeitsteilig vorgehen oder die SuS können sich frei in der Tabelle Zahlen wählen, die sie untersuchen möchten. Alle Zahlen der Tabelle der Gruppe D außer der Superzahl sind nicht durch 3 oder nicht durch 7 oder nicht durch 8 teilbar. Eine Vorsortierung mit der 8er-Regel würde die abschließende Suche beschleunigen. Die Superzahl heißt **3816547290.**	

Stelle	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
mögliche Ziffern	1	4	1	2	5	4	1	2	1	0
	3	8	3	6		8	3	6	3	
	7		7				7		7	
	9		9				9		9	

Lehrerblatt

Sachanalyse



Unter einer *a-b-Strecke* soll hier das Folgende verstanden werden:
Zu einem beliebigen Punkt auf dem Gitter („Anfangspunkt“) bestimmt man denjenigen Punkt („Endpunkt“) , der a Einheiten („Karos“) weiter rechts und b Einheiten („Karos“) höher liegt.
a und b sind natürliche Zahlen, ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei a ≥ b.
Die a-b- Strecke ist dann die Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte.
Die im Bild gezeigte 5-3-Strecke durchquert 7 Karos des Gitters.
Wie kann man für eine beliebige a-b-Strecke die Anzahl d der Karos berechnen, die durchquert werden?

Wir betrachten zunächst den einfachen Fall, dass a und b *teilerfremd* sind, der größte gemeinsame Teiler von a und b also 1 ist, kurz: ggT(a,b) = 1. Das bedeutet, dass die Strecke – außer Anfangs- und Endpunkt – keine Gitterpunkte enthält. Denn: Gäbe es einen Gitterpunkt im Innern der Strecke, der vom Anfangspunkt aus gesehen a' Einheiten weiter rechts und b' Einheiten höher liegt, wäre a'/b' = a/b wegen derselben Steigung der a-b-Strecke und der a'-b'-Strecke im Widerspruch zur Voraussetzung.

Man betrachte die Entwicklung der Anzahl der Karos beim Zeichnen der Strecke. Beim Erreichen der ersten Gitterlinie hat man 1 Karo durchquert. Das Überqueren einer Gitterlinie erhöht die Anzahl der durchquerten Karos d um 1. Wie viele Gitterlinien werden überquert? Es werden a – 1 senkrechte und b – 1 waagerechte Gitterlinien überquert.
Insgesamt sind es also d(a,b) = 1 + (a – 1) + (b – 1) = a + b – 1 durchquerte Karos.

Sie nun ggT(a,b) > 1. Die Anzahl der überquerten Gitterpunkte im Innern der Strecke ist ggT(a,b) – 1. Beim Überqueren eines Gitterpunktes wird gleichzeitig eine senkrechte und eine waagerechte Gitterlinie überquert. In der Zählung nach Gitterlinien ist also für jeden Gitterpunkt die Anzahl um 1 zu reduzieren.
Insgesamt sind es also d(a,b) = 1 + (a – 1) + (b – 1) – (ggT(a,b) – 1) = **a + b – ggT(a,b) durchquerte Karos**.
In diesem Ergebnis ist der oben abgehandelte einfache Fall mit enthalten.

Didaktische Bemerkungen

Dies ist ein echter Forschungsauftrag nach dem Muster *aus Beispielen eine Vermutung generieren*.
Beim Zeichnen von a-b-Strecken auf kariertem Papier durch die Schülerinnen und Schüler ist der Hinweis auf die Arbeit mit einem gespitzten (!) Bleistift unerlässlich.

Man wird beim Ausfüllen der Tabelle sinnvollerweise arbeitsteilig vorgehen. Vor den Überlegungen zu dem Zusammenhang zwischen a, b und d muss die Tabelle vollständig und korrekt ausgefüllt sein.
(Bild zur Wiederverwendung mit Veränderung gekennzeichnet: https://www.flickr.com/photos/foto_db/25501721655/)

a	1
b	1
d	1

a	2	2
b	1	2
d	2	2

a	3	3	3
b	1	2	3
d	3	4	3

a	4	4	4	4
b	1	2	3	4
d	4	4	6	4

a	5	5	5	5	5
b	1	2	3	4	5
d	5	6	7	8	5

a	6	6	6	6	6	6
b	1	2	3	4	5	6
d	6	6	6	8	10	6

a	7	7	7	7	7	7	7
b	1	2	3	4	5	6	7
d	7	8	9	10	11	12	7

a	8	8	8	8	8	8	8	8
b	1	2	3	4	5	6	7	8
d	8	8	10	8	12	12	14	8

a	9	9	9	9	9	9	9	9	9
b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d	9	10	9	12	13	12	15	16	9

a	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	10	10	12	12	10	14	16	16	18	10

Zunächst werden die Schülerinnen und Schüler Teilergebnisse feststellen können, die offensichtlich allgemein zutreffen:

- Wenn a = b ist, dann ist d(a,b) = a.
- Wenn b = 1 ist, dann ist d(a,1) = a.

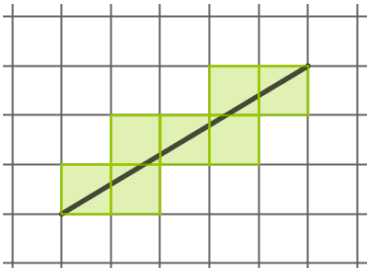
Stärkere Aussagen könnte man – ohne Begründung – vermuten (von Schülerseite auch gerne in Prosa, z.B. „Wenn b um 1 kleiner ist als a, dann ist d um 1 kleiner als a + b):

- Wenn b = 2 ist und a gerade, dann ist d(a,2) = a.
- Wenn b = 2 ist und a ungerade, dann ist d(a,2) = a + 1.
- Wenn b = a – 1 ist, dann ist d(a,a-1) = a + b – 1 = 2·a – 2.
- Wenn b die Hälfte von a (a gerade) ist, dann ist d(a,a/2) = a.
- Wenn b ein Teiler von a ist , dann ist d(a,b) = a.

Abschließend wird die Lehrkraft etwas lenken müssen und den ggT ins Spiel bringen z.B. mit dem Impuls „Was lässt sich vermuten, wenn a und b keinen gemeinsamen Teiler haben, wenn also ggT(a,b) = 1 ist?“
Beispiele: d(4,3) = 6; d(5,2) = 6; d(5,3) = 7; d(6,5) = 10; d(7,5) = 11; d(10,3) = 12; d(10,7) = 16

- Wenn ggT(a,b) = 1 ist, dann ist d(a,b) = a + b – 1.

Betrachtet man zusätzlich zu a und b sowie d(a,b) den ggT(a,b) (Tipp: mit einer Farbe in der zugehörigen Spalte dazu schreiben), so liegt die Vermutung für den allgemeinen Fall nicht mehr fern.
Wichtig: Dass die Vermutung tatsächlich zutrifft, muss die Lehrkraft beisteuern. An eine Erarbeitung der Begründung für die nicht offensichtlichen Sachverhalte ist nicht gedacht.



Die im Bild gezeigte 5-3-Strecke
(der Endpunkt liegt 5 Karos weiter rechts und 3 Karos höher)
durchquert 7 Karos des Gitters.

Wie kann man für eine beliebige a-b-Strecke (a ≥ b) die Anzahl d der Karos berechnen, die durchquert werden?

Finde für möglichst viele Kombinationen von a und b einen Zusammenhang mit d.

.....

.....

.....

a	1
b	1
d	

a	2	2
b	1	2
d		

a	3	3	3
b	1	2	3
d			

a	4	4	4	4
b	1	2	3	4
d				

a	5	5	5	5	5
b	1	2	3	4	5
d					

a	6	6	6	6	6	6
b	1	2	3	4	5	6
d						

a	7	7	7	7	7	7	7
b	1	2	3	4	5	6	7
d							

a	8	8	8	8	8	8	8	8
b	1	2	3	4	5	6	7	8
d								

a	9	9	9	9	9	9	9	9	9
b	1	2	3	4	5	6	7	8	9
d									

a	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
b	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d										

Verlaufsplan

SuS … Schülerinnen und Schüler L … Lehrerin bzw. Lehrer LV … Lehrer(innen)vortrag
EA … Einzelarbeit PA … Partnerarbeit feU … fragendentwickelnder Unterricht
Die Zeitangaben dienen nur zur groben Orientierung! Je nach der zur Verfügung stehenden Zeit kann der L mehr oder weniger lenken, bzw. auch Eintragungen der Tabelle vorgeben.

Phase / Zeit	**L / SuS**	**Medien**
1. Erarbeitung I feU 25 Min.	L stellt das Thema *durchquerte Karos* am Beispiel der 5-3-Strecke vor. Die Schreibweise wird geklärt, auch unter Verwendung der Variablen a und b: *a-b-Strecke*. Die Tabelle wird bei arbeitsteiligem Vorgehen ausgefüllt. L weist auf Notwendigkeit eines gespitzten Bleistiftes hin beim Eintrag der Strecke. L klärt die Fragestellung *Wie kann man für eine beliebige a-b-Strecke (a ≥ b) die Anzahl d der Karos berechnen, die durchquert werden?* und leitet hin auf das Teilergebnis *Wenn a gleich b ist, dann ist d = a.* (Notation von d ohne Argumente, diese ergeben sich aus dem Zusammenhang).	Tafel o.ä. Schülerblatt ein Blatt kariertes Papier
2. Erarbeitung II EA/PA 15 Min.	SuS produzieren aufgrund der korrekt ausgefüllten Tabelle Vermutungen über Zusammenhänge und notieren diese. L lobt, beobachtet und berät zurückhaltend und kontrolliert die Richtigkeit der Einträge. Sus kommen bis zu der Vermutung *Wenn b ein Teiler von a ist, dann ist d = a.* L gibt ggf. dazu einen Tipp.	Schülerblatt ein Blatt kariertes Papier
3. Erarbeitung III feU 15 Min.	L bringt den ggT ins Spiel (Notation von ggT ohne Argumente, diese ergeben sich aus dem Zusammenhang) mit den Impulsen: 1) „Was lässt sich vermuten, wenn a und b keinen gemeinsamen Teiler haben, wenn also ggT = 1 ist?“ SuS ziehen die zugehörigen Beispiele (d(4,3); d(5,3); d(6,5); d(7,5); d(8,3); d(9,4); d(10,7)) heran und erkennen: *Wenn der ggT = 1 ist, dann ist d = a + b – 1.* 2) „Was lässt sich vermuten, wenn a und b einen gemeinsamen Teiler haben, wenn also ggT > 1 ist?“ SuS ziehen die zugehörigen Beispiele heran (d(6,4); d(8,6), d(9,6); d(10,4); d(10,6); d(10,8) → SuS schreiben den ggT jeweils mit einer Farbe in der zugehörigen Spalte dazu) und erkennen: *Wenn ggT > 1 ist, dann ist d = a + b – ggT.* L erläutert, dass damit auch der Fall ggT = 1 abgedeckt ist.	Tafel o.ä. Schülerblatt ein Blatt kariertes Papier

Lehrerblatt

Wie viel Prozent der Fläche der Figur sind gefärbt?
Diese Fragestellung lässt sich auf viele unterschiedliche Figuren anwenden.
Aufgaben dieser Art bereiten vielen Schülerinnen und Schülern erfahrungsgemäß Freude.

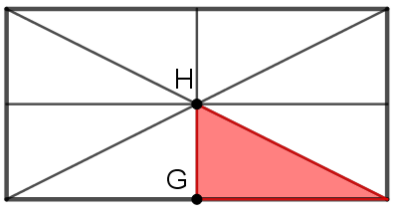
Man wird eine oder zwei Figuren mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam bearbeiten und diese dann selbständig die weiteren Figuren des Schülerblattes bearbeiten lassen.
Vor der rechnerischen Bestimmung des prozentualen Anteils (kleine Übung nebenbei: Umwandlung eines Anteils in %) soll dieser geschätzt werden.
Mit einer abschließenden Besprechung ist der Zeitbedarf etwa 45 Minuten.

Die Bestimmung von Flächenanteilen ohne Verwendung von Formeln kann gelingen durch die Aufteilung der Gesamtfläche in gleiche (= kongruente) Flächenstücke.
Die vorhandenen Symmetrien und Kongruenzen „darf" man dabei ohne Begründung „erkennen".

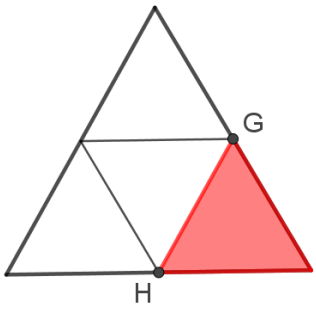
Hierbei sind die folgenden **Strategien** von Bedeutung:
- trage Hilfslinien ein, zum Beispiel
  zeichne Parallelen ein
  verbinde Punkte, die noch nicht verbunden sind
- schneide geeignete Teile ab und füge sie geeignet an

Lösungen des Schülerblattes:

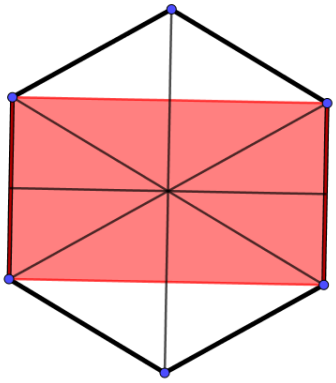
a) Unterteilt man das Rechteck geeignet (Skizze rechts), so erkennt man, dass es aus insgesamt acht solchen rechtwinkligen Dreiecken besteht.
Der gefärbte Anteil beträgt also ein Achtel oder 12,5%.



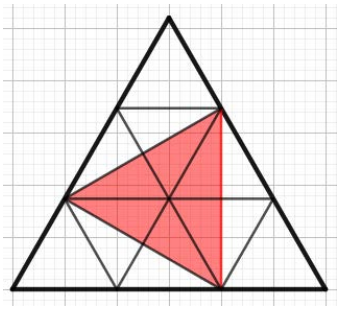
b) Unterteilt man das gleichseitige Dreieck geeignet (Skizze rechts), so erkennt man, dass es aus insgesamt vier solchen Dreiecken besteht.
Der gefärbte Anteil beträgt also ein Viertel oder 25%.



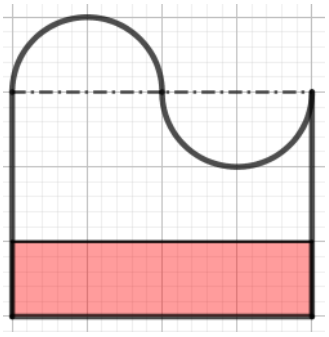
c) Unterteilt man das regelmäßige Sechseck geeignet (Skizze rechts), so erkennt man, dass es aus insgesamt sechs gleichen gleichseitigen Dreiecken oder 12 halben gleichseitigen Dreiecken besteht. Die gefärbte Fläche besteht aus 8 solchen halben gleichseitigen Dreiecken.
Der gefärbte Anteil beträgt also zwei Drittel oder ca. 66,7%.



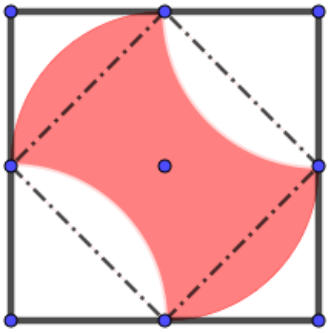
d) Zunächst unterteilt man die Seiten des äußeren Dreieckes mit Hilfe drei weiterer Punkte, die die längeren Teilabschnitte halbieren, und zieht geeignete Verbindungsstrecken (Skizze rechts). Man erkennt nun, dass das äußere Dreieck aus insgesamt neun gleichen gleichseitigen Dreiecken oder 18 halben gleichseitigen Dreiecken besteht. Die gefärbte Fläche besteht aus 6 solchen halben gleichseitigen Dreiecken.
Der gefärbte Anteil beträgt also ein Drittel oder ca. 33,3%.



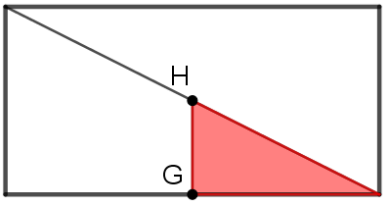
e) Schneidet man den linken überstehenden Halbkreis ab und setzt ihn in die halbkreisförmige Vertiefung rechts, so erhält man ein Rechteck und erkennt:
Der gefärbte Anteil beträgt also ein Drittel oder ca. 33,3%.



f) Schneidet man die Kreissegmente links oben und rechts unten ab und setzt sie in die Einbuchtungen rechts oben und links unten, so erhält man ein Quadrat und erkennt:
Der gefärbte Anteil beträgt die Hälfte oder 50%.



a) Wie viel Prozent der Fläche des Rechtecks sind gefärbt?

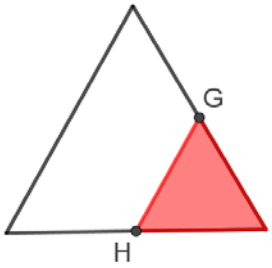


Schätzung: ……%

G und H sind Strecken-Mittelpunkte (Skizze rechts).

Lösung: ……%

b) Wie viel Prozent der Fläche des gleichseitigen Dreiecks sind gefärbt?

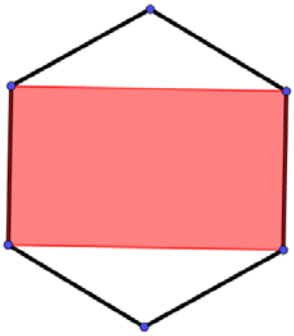


Schätzung: ……%

G und H sind Strecken-Mittelpunkte (Skizze rechts).

Lösung: ……%

c) Wie viel Prozent des regelmäßigen Sechsecks sind gefärbt?

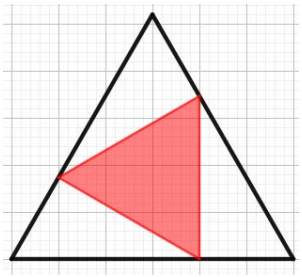


Schätzung: ……%

„Regelmäßig“ bedeutet:
alle Seiten sind gleich lang, alle Innenwinkel sind gleich groß.

Lösung: ……%

d) Wie viel Prozent der Fläche des gleichseitigen Dreiecks sind gefärbt?

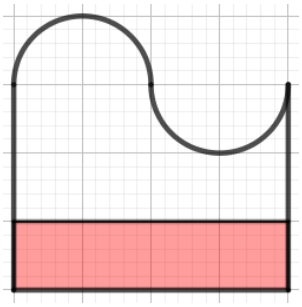


Schätzung: ……%

Die Eckpunkte des inneren Dreiecks teilen die Seiten des äußeren Dreiecks im Verhältnis 1:2 (Skizze rechts).

Lösung: ……%

e) Wie viel Prozent der Fläche sind gefärbt?

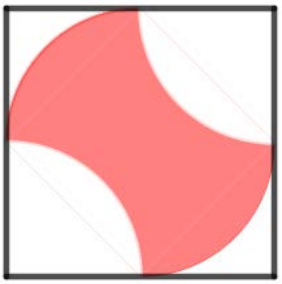


Schätzung: ……%

Bei den beiden Bögen handelt es sich um gleiche Halbkreise (Skizze rechts).

Lösung: ……%

f) Wie viel Prozent der Fläche sind gefärbt?



Schätzung: ……%

Der Rahmen ist ein Quadrat. Bei den vier Bögen handelt es sich um gleiche Viertelkreise. Die Endpunkte der Bögen sind die Mittelpunkte der Quadratseiten (Skizze rechts).

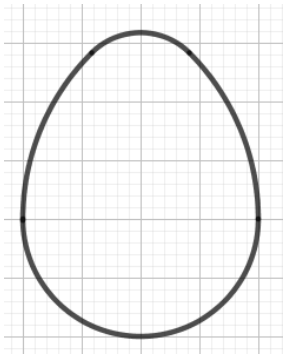
Lösung: ……%

Lehrerblatt

Wie ist die Figur entstanden? Das ist sozusagen eine Detektiv-Aufgabe.

Man kann vor der selbständigen Arbeit der Schülerinnen und Schüler mit dem Schülerblatt als erstes Beispiel das „Ei“ zunächst gemeinsam im fragendentwickelnden Unterricht erschließen und sie diese dann mithilfe des Zirkels auch nachzeichnen lassen. Die beschriebenen Lösungsschritte sind für die anderen Aufgaben im Wesentlichen dieselben.
Je nach Zeitbudget kann man auch eine Auswahl treffen beim Erschließen und beim Nachzeichnen der sechs Figuren. Die beiden Fischblasen-Figuren sind etwas anspruchsvoller.

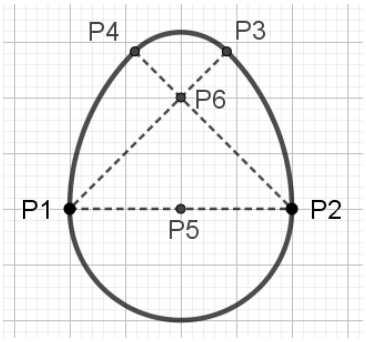
Kreisbogen-Figur 1 (Ei):
Wie ist das Ei (Bild rechts) entstanden?



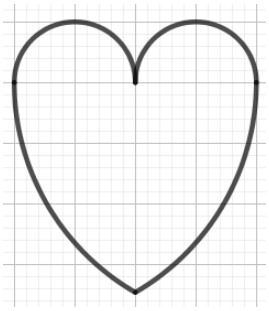
Lösungs-Schritte:
- Erkenntnis: die Ei-Figur ist aus vier Kreisbögen aufgebaut
- markiere die Punkte, an denen die Bögen ineinander übergehen
- ermittle bzw. schätze für jeden der vier Kreisbögen, welchen Anteil des Vollkreises sie darstellen
- schließe daraus auf den zugehörigen Mittelpunktswinkel
- schließe daraus auf den zugehörigen Mittelpunkt

Kreisbogen-Figur 1 (Ei) – Lösung:
Bild rechts

- ein Halbkreis unten (Mittelpunkt P5)
- zwei Achtelkreise (Mittelpunktswinkel 45°) links und rechts (Mittelpunkte P1 und P2 mit Radius P1P3 bzw. P2P4)
- ein Viertelkreis (Mittelpunktswinkel 90°) oben (Mittelpunkt P6 mit Radius P6P4)



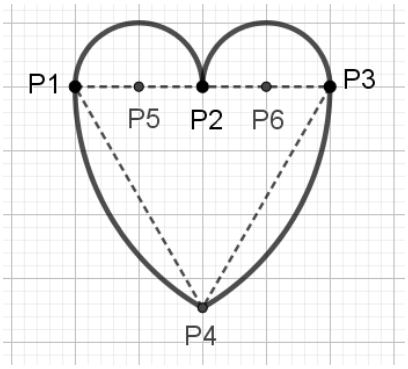
Kreisbogen-Figur 2 (Herz):
Wie ist das Herz (Bild rechts) entstanden?



Lösungs-Schritte:
- Erkenntnis: die Herz-Figur ist aus vier Kreisbögen aufgebaut
- markiere die Punkte, an denen die Bögen ineinander übergehen
- ermittle bzw. schätze für jeden der vier Kreisbögen, welchen Anteil des Vollkreises sie darstellen
- schließe daraus auf den zugehörigen Mittelpunktswinkel
- schließe daraus auf den zugehörigen Mittelpunkt

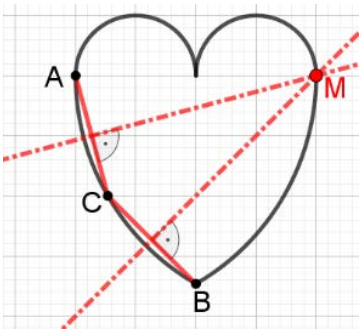
Kreisbogen-Figur 2 (Herz) – Lösung:
Bild rechts

- zwei Halbkreise oben (Mittelpunkte P5 und P6)
- zwei Sechstelkreise (Mittelpunktswinkel 60°) links und rechts (Mittelpunkte P1 und P3 jeweils mit Radius P1P3)



Außer bei den Halbkreisen kann man „durch Draufschauen“ die Lage des Mittelpunktes der Kreisbögen nur schätzen. Immerhin muss er auf der Mittelsenkrechten der Kreisbogen-Endpunkte liegen. Anschließend könnte man einen vermuteten Mittelpunkt mithilfe eines Zirkels überprüfen.

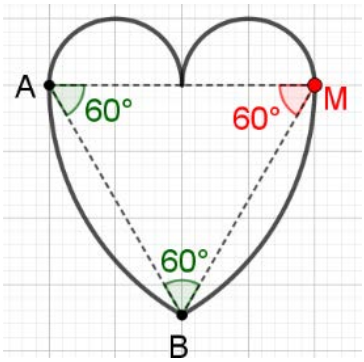
Man kann den Mittelpunkt eines Kreisbogens aber auch konstruieren:
Wähle auf drei Punkte auf dem Kreisbogen (zum Beispiel die beiden Endpunkte A und B und einen weiteren Punkt C), der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten der Strecken AC und BC ist der gesuchte Mittelpunkt des Kreisbogens (Bild rechts).



Kennt man den Anteil p der Vollkreises, kann man für $p < \frac{1}{2}$ über den Endpunkten des Kreisbogens ein gleichschenkliges Dreieck errichten. Die „Spitze“ ist der gesuchte Mittelpunkt. Die betreffenden Basiswinkel ergeben sich zu $90° - 180° \cdot p$.

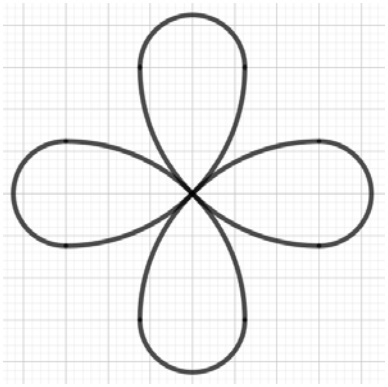
Für $p = \frac{1}{4}$ erhält man die Basiswinkel 45° bzw. ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck.

Für $p = \frac{1}{6}$ erhält man die Basiswinkel 60° bzw. ein gleichseitiges Dreieck (Bild rechts).



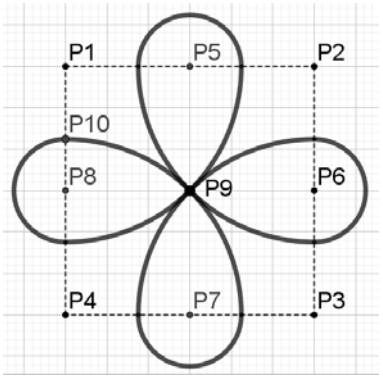
Außer bei der „3er-Fischblase“ und „4er-Fischblase“ (s.u.) kommen nur Halb-, Viertel-, Sechstel- oder Achtelkreise zur Verwendung. Das könnte man eventuell auch als Hilfe vorgeben.

Kreisbogen-Figur 3 (Kleeblatt):
Wie ist das Kleeblatt (Bild rechts) entstanden?



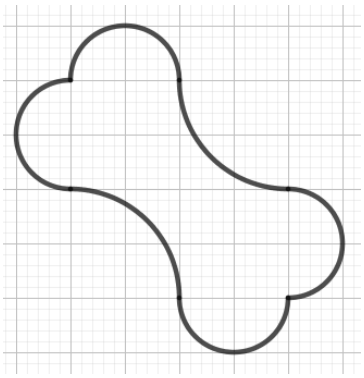
<u>Lösungs-Schritte:</u>
- Erkenntnis: die Kleeblatt-Figur ist aus acht Kreisbögen aufgebaut
- markiere die Punkte, an denen die Bögen ineinander übergehen
- ermittle bzw. schätze für jeden der acht Kreisbögen, welchen Anteil des Vollkreises sie darstellen
- schließe daraus auf den zugehörigen Mittelpunktswinkel
- schließe daraus auf den zugehörigen Mittelpunkt

Kreisbogen-Figur 3 (Kleeblatt) – Lösung:
Bild rechts



- vier Viertelkreise (Mittelpunkte P1 bis P4 mit Radius P1P9)
- vier daran anschließende Halbkreise (Mittelpunkte P5 bis P8 mit Radius P8P10)

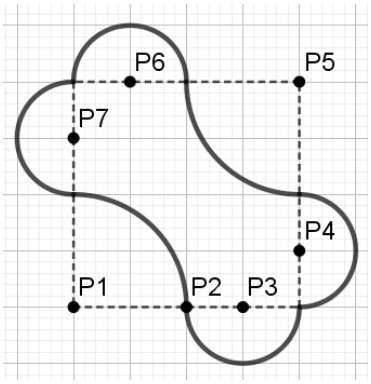
Kreisbogen-Figur 4 (Knochen):
Wie ist der Knochen (Bild rechts) entstanden?



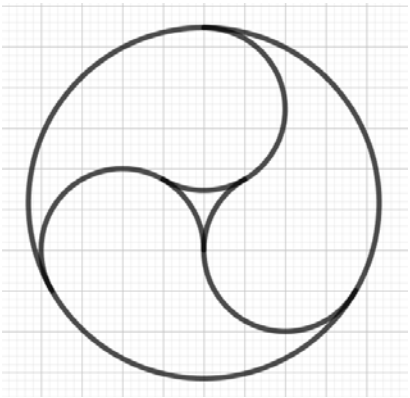
Lösungs-Schritte:
- Erkenntnis: die Knochen-Figur ist aus sechs Kreisbögen aufgebaut
- markiere die Punkte, an denen die Bögen ineinander übergehen
- ermittle bzw. schätze für jeden der sechs Kreisbögen, welchen Anteil des Vollkreises sie darstellen
- schließe daraus auf den zugehörigen Mittelpunktswinkel
- schließe daraus auf den zugehörigen Mittelpunkt

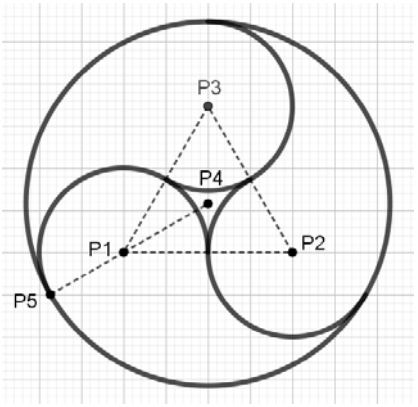
Kreisbogen-Figur 4 (Knochen) – Lösung:
Bild rechts

- vier Halbkreise (Mittelpunkte P3, P4, P6 und P7)
- zwei Viertelkreise (Mittelpunkte P1 und P5, Radius P1P2)



Kreisbogen-Figur 5 (3er-Fischblase):
Wie ist die 3er-Fischblase entstanden (Bild Mitte)? Ohne Hilfe ist das wohl zu schwierig. Schon allein deshalb, weil die Punkte, an denen die Kreisbögen mit gleicher Tangente ineinander übergehen, nicht gut zu lokalisieren sind.

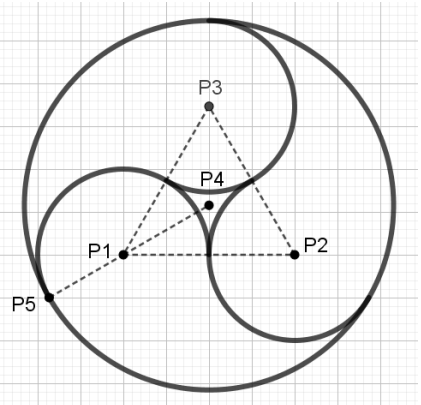




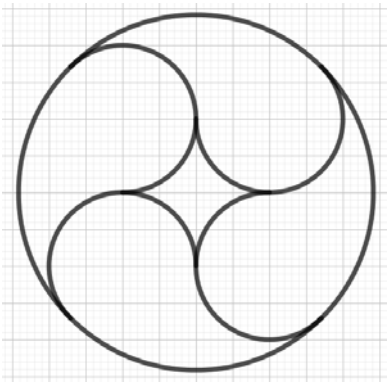
Deshalb:
Wie kann man eine 3er-Fischblase zeichnen (Bild rechts)?
Orientiere dich an den eingetragenen Hilfspunkten und Hilfslinien.

Kreisbogen-Figur 5 (3er-Fischblase) – Lösung:
Bild rechts

- zeichne ein gleichseitiges Dreieck P1P2P3
- sein Mittelpunkt sei P4 (z.B. der Schnittunkt von Mittelsenkrechten)
- zeichne einen Kreisbogen um P1 mit Radius 0,5 · P1P2, der Mittelpunktswinkel ist 30° + 180° = 210°
- der äußere Endpunkt dieses Kreisbogens sei P5 (es ist auch einer der beiden Schnittpunkte des Kreises um P1 mit Radius 0,5 · P1P2 mit der Geraden durch P1 und P4)
- zeichne einen Vollkreis um P4 mit Radius P4P5
- zeichne je einen Kreisbogen um P2 und P3 mit Radius 0,5 · P1P2, der Mittelpunktswinkel ist 30° + 180° = 210°

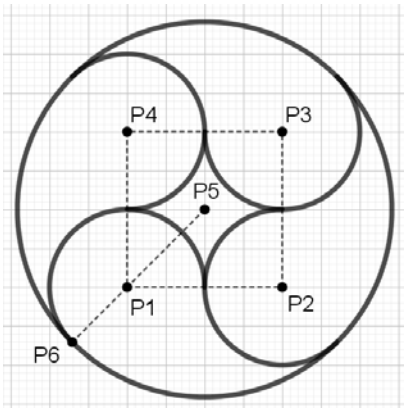


Kreisbogen-Figur 6 (4er-Fischblase):
Wie ist die 4er-Fischblase entstanden (Bild rechts)?
Die 4er-Fischblase ist leichter zu erschließen als die 3er-Fischblase, insbesondere wenn man die 3er-Fischblase schon bearbeitet hat und analog vorgehen kann.
Zwar sind die Punkte, an denen die Kreisbögen ineinander übergehen, nicht markiert, jedoch könnte das hinterlegte Raster zum Auffinden der Mittelpunkte der Kreisbögen im Innern hier hilfreich sein.



Kreisbogen-Figur 6 (4er-Fischblase) – Lösung:
Bild rechts

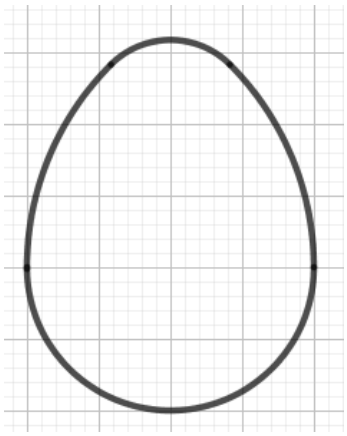
- zeichne ein Quadrat P1P2P3P4
- sein Mittelpunkt sei P5 (Schnittpunkt der Diagonalen)
- zeichne einen Kreisbogen um P1 mit Radius 0,5 · P1P2, der Mittelpunktswinkel ist 45° + 180° = 225°
- der äußere Endpunkt dieses Kreisbogens sei P6 (es ist auch einer der beiden Schnittpunkte des Kreises um P1 mit Radius 0,5 · P1P2 mit der Geraden durch P1 und P5)
- zeichne einen Vollkreis um P5 mit Radius P5P6
- zeichne je einen Kreisbogen um P2, P3 und P4 mit Radius 0,5 · P1P2, der Mittelpunktswinkel ist 45° + 180° = 225°



Bemerkung zum Zeichnen der Figuren:
Möchte man die sechs Figuren zeichnen, geht man sinnvollweise von dem in den Lösungen zu erkennenden „Grundgerüst“ aus:

- Ei → rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit verlängerten Katheten
- Herz → gleichseitiges Dreieck, bei der Konstruktion des dritten Dreieckspunktes ergeben sich automatisch die Seitenbögen des Herzes
- Kleeblatt → Quadrat samt Mittelpunkt, beginne mit den Viertelkreisen
- Knochen → Quadrat mit den Mittelpunkten der Seiten
- 3er-Fischblase → gleichseitiges Dreieck samt Mittelpunkt, verlängere die Verbindungsstrecken vom Mittelpunkt zu den Eckpunkten des Dreiecks jeweils über diese hinaus
- 4er-Fischblase → Quadrat samt Mittelpunkt, verlängere die Verbindungsstrecken vom Mittelpunkt zu den Eckpunkten des Quadrats jeweils über diese hinaus

Kreisbogen-Figur 1 (Ei):
Wie ist das Ei (Bild rechts) entstanden?



……

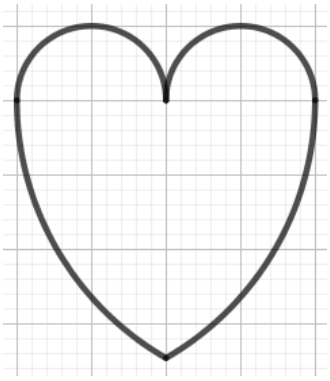
……

……

……

Zeichne auf einem karierten Papier das Ei nach (Breite 6 cm).

Kreisbogen-Figur 2 (Herz):
Wie ist das Herz (Bild rechts) entstanden?



……

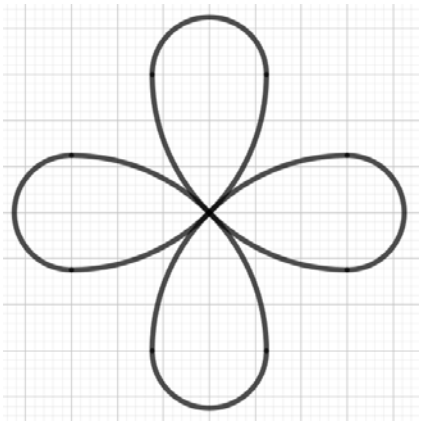
……

……

……

Zeichne auf einem karierten Papier das Herz nach (Breite 6 cm).

Kreisbogen-Figur 3 (Kleeblatt):
Wie ist das Kleeblatt (Bild rechts) entstanden?



……

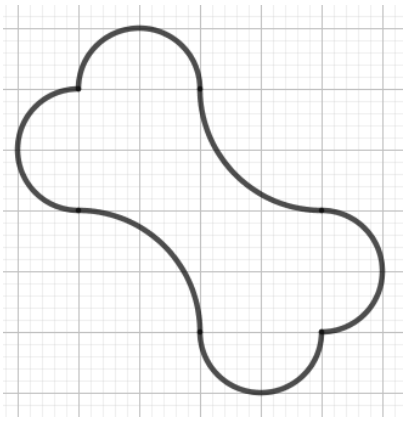
……

……

……

Zeichne auf einem karierten Papier das Kleeblatt nach (Breite 8 cm).

Kreisbogen-Figur 4 (Knochen):
Wie ist der Knochen (Bild rechts) entstanden?



……

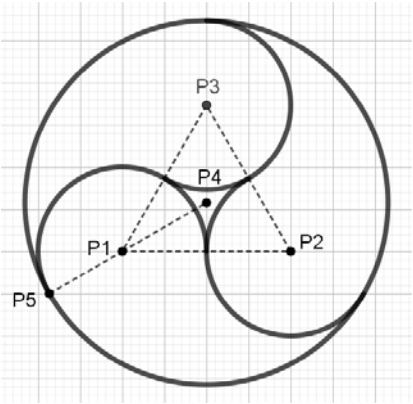
……

……

……

Zeichne auf einem karierten Papier den Knochen nach (Breite 8 cm).

Kreisbogen-Figur 5 (3er-Fischblase):
Wie kann man eine 3er-Fischblase zeichnen (Bild rechts)?



……

……

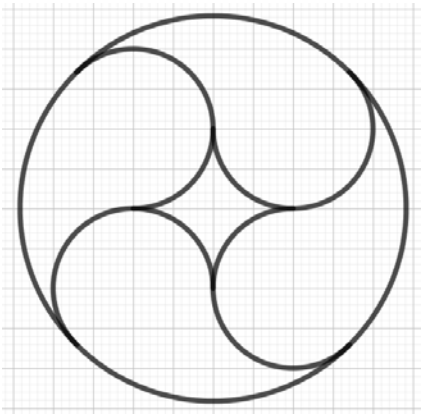
……

……

……

Zeichne auf einem karierten Papier die 3er-Fischblase nach.
Anleitung:
Zeichne zuerst ein gleichseitiges Dreieck (Dreieckseite: 6 cm).
Orientiere dich dann an den eingetragenen Hilfspunkten und Hilfslinien.

Kreisbogen-Figur 6 (4er-Fischblase):
Wie ist die 4er-Fischblase entstanden (Bild rechts)?



……

……

……

……

……

Zeichne auf einem karierten Papier die 4er-Fischblase nach.
Anleitung:
Zeichne zuerst ein Quadrat (Quadratseite: 6 cm).

Lehrerblatt

Die Kringeladdition:

Das Vorgehen bei der Addition zweier Bruchzahlen ist bekannt. Man erweitert die beiden gegebenen Brüche auf einen gemeinsamen Nenner und addiert dann die Zähler.

So ist zum Beispiel $\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\cdot5}{3\cdot5}+\frac{4\cdot3}{5\cdot3}=\frac{10}{15}+\frac{12}{15}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15}$.

Ein „beliebter“ Fehler bei der Addition von Bruchzahlen ist (in Anlehnung an die Multiplikation) jeweils Zähler und Nenner zu addieren.

Man könnte diese Vorgehensweise aber als eine neue Verknüpfung von zwei Brüchen auffassen und nennen sie im Folgenden die *Kringel-Addition* (entsprechend sprechen wir vom *kringel-addieren* bzw. von der *Kringel-Summe*) und schreiben nicht „+“, sondern „$\oplus$“.

So ist zum Beispiel $\frac{2}{3}\oplus\frac{4}{5}=\frac{2+4}{3+5}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$.

Lösungen der Aufgaben:

Zu 1.) Ja, das ist immer so. Schülerinnen und Schüler können ggf. ohne Variable beispielgebunden argumentieren: $\frac{7}{13}\oplus\frac{7}{13}=\frac{7+7}{13+13}=\frac{2\cdot7}{2\cdot13}=\frac{7}{13}$

Oder die Schülerinnen und Schüler versprachlichen die Begründung:
Nach der Kringel-Addition sind Zähler und Nenner des Ergebnisses jeweils doppelt so groß.
Wenn man mit 2 kürzt, erhält man den Ausgangsbruch.

Zu 2.) Ja, das ist immer so. Schülerinnen und Schüler können ggf. ohne Variable beispielgebunden argumentieren: $\frac{7}{13}\oplus\frac{13}{7}=\frac{7+13}{13+7}=\frac{20}{20}=1$

Oder die Schülerinnen und Schüler versprachlichen die Begründung:
Nach der Kringel-Addition sind Zähler und Nenner des Ergebnisses gleich, nämlich jeweils die Summe aus Zähler und Nenner des Ausgangsbruchs.

Zu 3.) Die Kringel-Summe ergibt genau dann 1, wenn die Summe der beiden Zähler und die Summe der beiden Nenner gleich sind. Das ist nicht nur für einen Bruch und seinen Kehrbruch der Fall.

Beispiel: $\frac{3}{5}\oplus\frac{9}{7}=\frac{3+9}{5+7}=\frac{12}{12}=1$

Zu 4.) Ja, das ist immer so. Schülerinnen und Schüler können ggf. ohne Variable beispielgebunden argumentieren: $\frac{3}{13}\oplus\frac{4}{13}=\frac{3+4}{13+13}=\frac{3+4}{2\cdot13}=\frac{(3+4):2}{13}=\frac{3{,}5}{13}$ oder

$\frac{3}{13}\oplus\frac{4}{13}=\frac{3+4}{13+13}=\frac{3+4}{26}$ und $\frac{3}{13}=\frac{2\cdot3}{2\cdot13}=\frac{2\cdot3}{26}$ sowie $\frac{4}{13}=\frac{2\cdot4}{2\cdot13}=\frac{2\cdot4}{26}$

Oder die Schülerinnen und Schüler versprachlichen die Begründung:
Nach der Kringel-Addition ist der Nenner doppelt so groß wie vorher.
Kürzt man mit 2, erhält man den Mittelwert der beiden Zähler und den ursprünglichen Nenner.

Didaktischer Kommentar:

Die Lehrkraft wird die Kringeladdition anhand einiger Beispiele vorstellen und mit den Schülerinnen und Schülern die Aufgabe 1.) des Schülerblattes exemplarisch gemeinsam lösen.
Anschließend lösen die Schülerinnen und Schüler die Aufgaben 2.) bis 4.) selbständig.
Abschließend werden die Lösungen besprochen.
Der Zeitbedarf beträgt etwa 45 Minuten.

Für die Aufgaben 1.) bis 4.) gilt das bekannte Differenzierungsmuster, hier in leichter Abwandlung:
- finde mehrere weitere Beispiele
- erkenne die Gesetzmäßigkeit
- begründe die Gesetzmäßigkeit

Weitere Bemerkungen:

Die übliche Addition von Brüchen entspricht der Grundvorstellung des Hinzufügens und ist vom jeweils gewählten Vertreter der Bruchzahl unabhängig.

Es ist also zum Beispiel $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{7}{6}$ und $\frac{2}{4}+\frac{2}{3}=\frac{6}{12}+\frac{8}{12}=\frac{14}{12}=\frac{7}{6}$.

Man erhält bei der Verwendung von $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ dasselbe Ergebnis.

Die Kringel-Addition dagegen ist vom gewählten Vertreter abhängig.

Es ist zum Beispiel $\frac{1}{2}\oplus\frac{2}{3}=\frac{1+2}{2+3}=\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{4}\oplus\frac{2}{3}=\frac{2+2}{4+3}=\frac{4}{7}$.

Man erhält bei der Verwendung von $\frac{1}{2}$ und $\frac{2}{4}$ <u>nicht</u> dasselbe Ergebnis.

Diese Abhängigkeit ist sehr unschön.

Immerhin gilt der folgende **Satz**:

Das Ergebnis der Kringel-Addition liegt immer zwischen den beiden Brüchen.

Beweis: Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\frac{a}{b}\le\frac{c}{d}$ und damit $ad\le bc$ bzw. $bc\ge ad$, dabei seien a, b, c und d natürliche Zahlen, und es sei b > 0 und d > 0.

$\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$, es gilt $\frac{a+c}{b+d}\ge\frac{a}{b} \Leftrightarrow ab+bc\ge ab+ad \Leftrightarrow bc\ge ad$

$\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$, es gilt $\frac{a+c}{b+d}\le\frac{c}{d} \Leftrightarrow ad+cd\le bc+cd \Leftrightarrow ad\le bc$.

Zur Aufgabe 4.) des Schülerarbeitsblattes lässt sich noch sagen, dass das Ergebnis der Kringel-Addition nur dann der Mittelwert der Brüche ist, wenn diese gleichnamig sind oder die Brüche dieselbe Bruchzahl bezeichnen.

Beweis (Belegungen von a, b, c und d wie oben):

$\frac{a}{b}\oplus\frac{c}{d}=\frac{1}{2}\cdot(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}) \Leftrightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{ad+cb}{2bd}$

$\Leftrightarrow 2abd+2bcd=abd+bbc+add+bcd$

$\Leftrightarrow abd+bcd=bbc+add \Leftrightarrow ad\cdot(b-d)=bc\cdot(b-d) \Leftrightarrow b=d$ oder $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$.

Mkid 7-42 Kringel-Addition

1.) Es ist $\frac{2}{3} \oplus \frac{2}{3} = \frac{2+2}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
Ist es immer so, dass die Kringel-Summe von zwei gleichen Brüchen wieder diesen Bruch ergibt?
Rechne zunächst zwei weitere selbst gewählte Beispiele durch. Kannst du deine Antwort begründen?

Beispiele: ……

…… Antwort: ……

Begründung: ……

……

2.) Es $\frac{2}{3} \oplus \frac{3}{2} = \frac{2+3}{3+2} = \frac{5}{5} = 1$.
Ist es immer so, dass die Kringel-Summe eines Bruchs und seinem Kehrbruch die Zahl 1 ergibt?
Rechne zunächst zwei weitere selbst gewählte Beispiele durch. Kannst du deine Antwort begründen?

Beispiele: ……

…… Antwort: ……

Begründung: ……

……

3.) Gibt es noch andere Brüche außer Bruch und Kehrbruch, deren Kringel-Summe die Zahl 1 ergibt?

Ein Beispiel oder eine Begründung, dass es keine anderen gibt:

……

…… Antwort: ……

4.) Es ist $\frac{2}{7} \oplus \frac{4}{7} = \frac{2+4}{7+7} = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$. Das Ergebnis $\frac{3}{7}$ ist genau der Mittelwert von $\frac{2}{7}$ und $\frac{4}{7}$.
Ist es immer so, dass die Kringel-Summe von zwei gleichnamigen Brüchen den Mittelwert der beiden Brüche ergibt?
Rechne zunächst zwei weitere selbst gewählte Beispiele durch. Kannst du deine Antwort begründen?

Beispiele: ……

…… Antwort: ……

Begründung: ……

……

Lehrerblatt

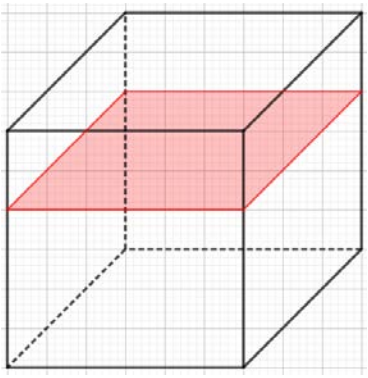
Didaktische Bemerkungen:

Würfelschnitte, genauer: Schnittflächen von ebenen Würfelschnitten, sind ein interessantes und spannendes Thema.
Schrägbilder als solche sollten den Schülerinnen und Schülern aus Klasse 5 bekannt sein.
Die Teilaufgaben a) und b) des Schülerblattes ist einfach zu bewältigen, die Teilaufgabe c) ist schon etwas anspruchsvoller. Die Teilaufgabe d) und insbesondere die Teilaufgabe e) sind schwierig. Die Lehrkraft kann als Hilfestellung einzelne Punkte der Schnittfläche vorgeben.
Zur Unterstützung der Vorstellung ist ein großes Kantenmodell eines Würfels (oft gibt es so etwas in der Schul-Sammlung!) und ein Gummiband zum Aufspannen der Schnittfläche hilfreich.

Die Lehrkraft wird **zur Einführung die Teilaufgabe d) gemeinsam** mit den Schülerinnen und Schülern im fragendentwickelnden Unterricht erarbeiten.
Anschließend lösen die Schülerinnen und Schüler selbständig die anderen Teilaufgaben. Die Lehrkraft lobt und gibt ggf. Tipps.
Dass sich bei einem ebenen Würfelschnitt ein Sechseck ergeben kann (!) ist schon erstaunlich.
Als Vorstellungshilfe kann die Lehrkraft den Übergang von der Raute zu einem Sechseck durch eine Drehung thematisieren, s.u.
Der Zeitbedarf beträgt insgesamt etwa 30 Minuten.

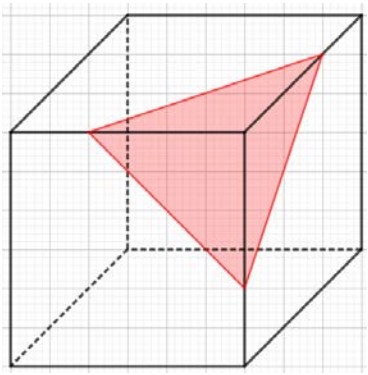
Lösungen der Aufgaben des Schülerblattes:

a) Quadrat:
Jeder Schnitt parallel zu einer Würfelfläche ergibt ein Quadrat.
Auch geeignete Schnitte parallel zu einer Würfelkante können ein Quadrat liefern.



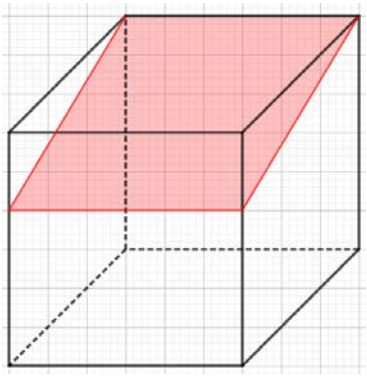
Schnittfläche Quadrat

b) Gleichseitiges Dreieck:
Zum Beispiel wählt man je einen Punkt der Kanten rechts oben, vorne rechts und vorne oben, die vom rechten oberen Punkt der Vorderfläche gleich weit entfernt sind (vgl. Schrägbild rechts).
Legt man den Schnitt durch diese drei Punkte, so erhält man als Schnittfläche ein gleichseitiges Dreieck.
Was erstaunlich ist: Je zwei Seiten dieses gleichseitigen Dreiecks befinden sich in zueinander senkrechten Ebenen, bilden aber keinen rechten Winkel (!), sondern einen Winkel der Weite 60°.

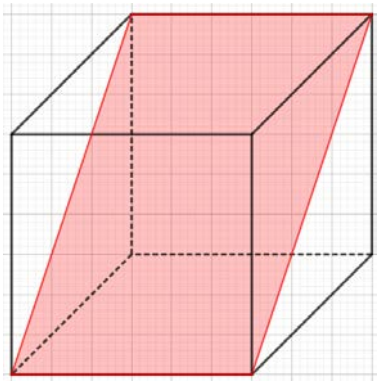


Schnittfläche gleichseitiges Dreieck

c) Rechteck:
Legt man den Schnitt zum Beispiel durch die hintere obere Kante und eine Parallele zur vorderen oberen Kante, so erhält man als Schnittfläche ein Rechteck (vgl. Schrägbilder rechts).
Die viereckige Schnittfläche hat vier rechte Winkel, aber unterschiedliche Seitenlängen.



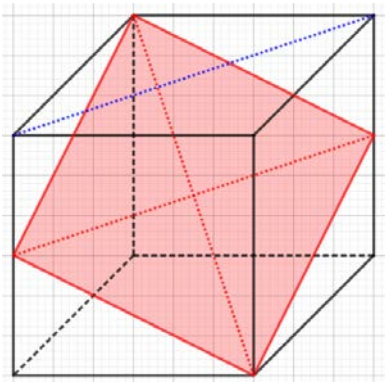
Schnittfläche Rechteck



Schnittfläche Rechteck

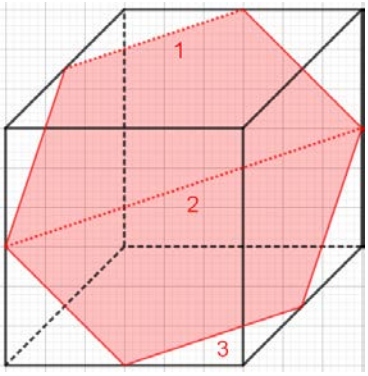
d) Raute:
Zum Beispiel wählt man die drei Punkte
- Würfelecke hinten links oben
- Mittelpunkt auf der Kante links vorne
- Mittelpunkt auf der Kante rechts hinten.

Legt man den Schnitt durch diese drei Punkte, so ist der vierte Punkt der Schnittfläche die Würfelecke vorne rechts unten (vgl. Schrägbild rechts). Diese Tatsache darf man ohne strengen Beweis „erkennen“.
Die viereckige Schnittfläche hat vier gleich lange Seiten, aber unterschiedliche lange Diagonalen (Raumdiagonale vs. Flächendiagonale des Würfels). Es handelt sich also um eine Raute.



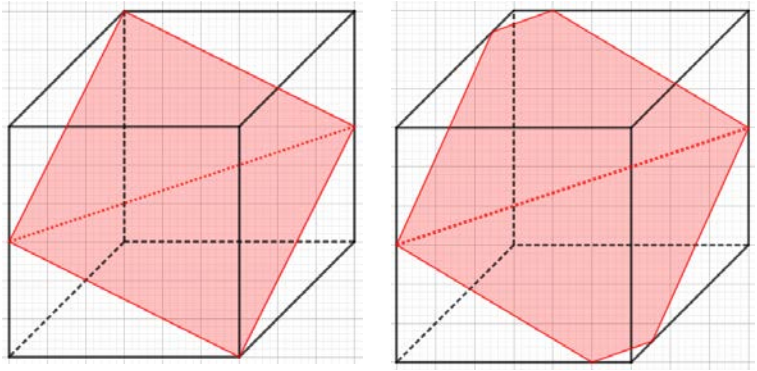
Schnittfläche Raute

e) Sechseck:
Legt man zum Beispiel den Schnitt durch die beiden Strecken 1 und 2 (vgl. Schrägbild rechts, die Strecken-Endpunkte sind Kantenmitten), so liegt die Strecke 3 ebenfalls auf der Schnittfläche. Diese Tatsache darf man ohne strengen Beweis „erkennen“.
Bei der sechseckigen Schnittfläche handelt es sich sogar um ein regelmäßiges Sechseck.



Schnittfläche Sechseck

Übergang von einer Raute zum Sechseck:
Dreht man die Schnittebene im Schrägbild (Mitte) geeignet um die gepunktete Achse, so erhält man als Schnittfläche mit dem Würfel ein Sechseck (Schrägbild rechts).

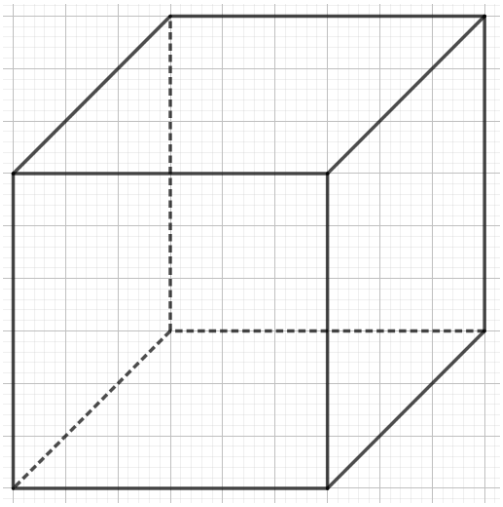


Übergang von der Raute zum Sechseck durch eine Drehung

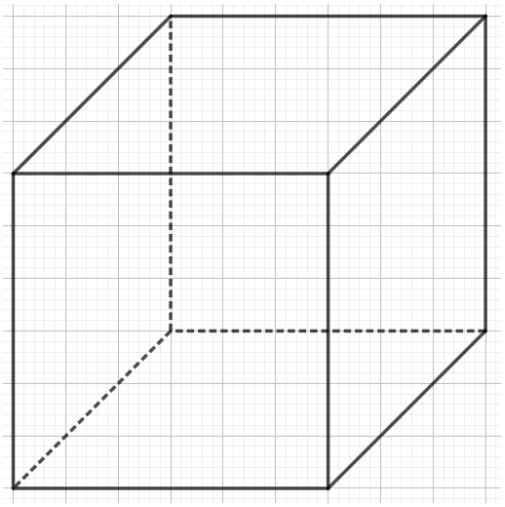
Schneidet man einen Würfel mit einem ebenen Schnitt in zwei Teile, so erhält man als Schnittfläche ein Vieleck. Bei welchem Schnitt ergibt sich …

a) … ein Quadrat? b) … ein gleichseitiges Dreieck? c) … ein Rechteck (das kein Quadrat ist)?

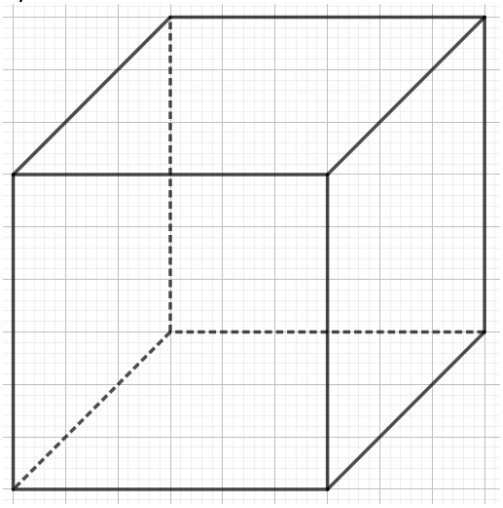
d) … eine Raute (die kein Quadrat ist)? e) … ein Sechseck?



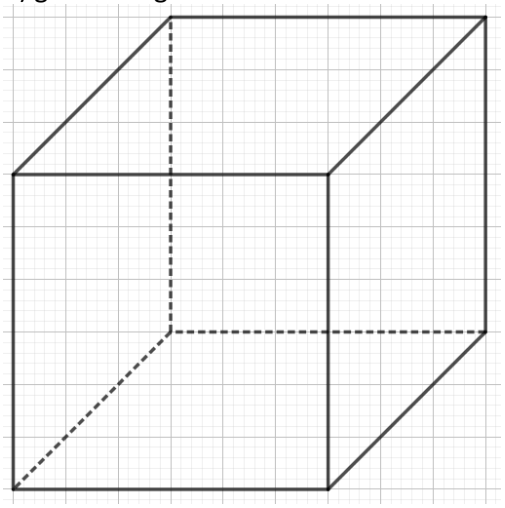
a) Quadrat



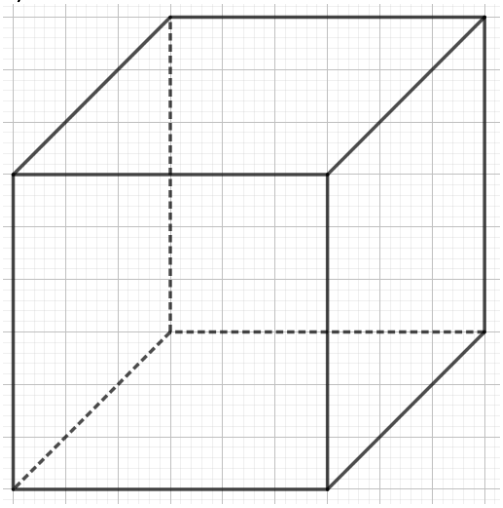
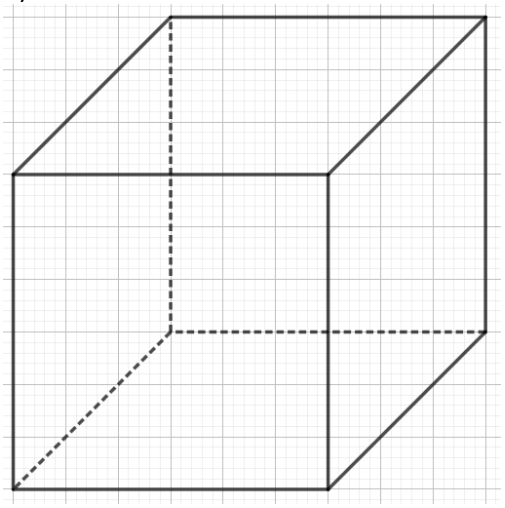
b) gleichseitiges Deieck



c) Rechteck



d) Raute



e) Sechseck